This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Stanford University Libraries
3 6105 000 993 563

Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

Herausgegeben

von

L. Kronecker und **K. Weierstrass.**

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preussischer Behörden.

Fortsetzung des von

A. L. Crelle (1826 bis 1856) und **C. W. Borchardt** (1856 bis 1880)

herausgegebenen Journals.

UNIVERSITY

Fünfundneunzigster Band.

In vier Heften.

Mit zwei Figurentafeln.

Berlin, 1883.

Druck und Verlag von G. Reimer.

116067

LIBRARY
LELAND STANFORD JUNIOR
UNIVERSITY

Inhaltsverzeichniss des fünfundneunzigsten Bandes.

G. Hauck. Neue Constructionen der Perspective und Photogrammetrie. (Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme, I. Artikel.) Hierzu Taf. I und II, Fig. 1—13. . . . . Seite 1

F. Caspary. Ueber einige Determinanten-Identitäten, welche in der Lehre von den perspectivischen Dreiecken vorkommen. . . . . — 36

L. W. Thomé. Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. . . . . — 44

J. Vályi. Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln. . . . . — 99

Stern. Ein combinatorischer Satz. . . . . — 102

P. H. Schoute. Die *Steiner*schen Polygone. . . . . — 105

J. N. Hazzidakis. Ueber die Curven, welche sich so bewegen können, dass sie stets geodätische Linien der von ihnen erzeugten Flächen bleiben. — 120

A. Weiler. Einfache Erzeugung einiger Complexe zweiten Grades. . . . — 140

S. Kantor. Ueber eine ein-dreideutige ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung. . . . . — 147

J. Hermes. Bemerkung über die Aequivalentsubstitutionen binärer quadratischer Formen. . . . . — 165

L. Königsberger. Eigenschaften irreductibler Functionen. . . . . — 171

Stern. Ueber Irrationalität von Reihen. . . . . — 197

A. Hurwitz. Beweis des Satzes, dass eine einwerthige Function beliebig vieler Variabeln, welche überall als Quotient zweier Potenzreihen dargestellt werden kann, eine rationale Function ihrer Argumente ist. . . — 201

F. Schur. Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung. . . . . — 207

L. Kiepert. Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen. Abhandlung 3. . . . . Seite 218

J. Perott. Sur la formation des déterminants irréguliers. . . . . — 232

E. Netto. Notiz über Gleichungen, deren Discriminante ein Quadrat ist. . — 237

F. Rudio. Zur Theorie der Flächen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen confocale Flächen zweiten Grades sind. . . . . — 240

Rosanes. Ueber abhängige Punktsysteme und deren Bedeutung für die reciproke Verwandtschaft zweier Ebenen. . . . . — 247

M. Krause. Zur Transformationstheorie der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. . . . . — 256

G. Frobenius. Ueber die principale Transformation der Thetafunctionen mehrerer Variabeln. . . . . — 264

W. Stahl. Ueber Strahlensysteme zweiter Ordnung. . . . . — 297

P. H. Schoute. Nachtrag zur Abhandlung „Die *Steiner*schen Polygone“ Seite 105 dieses Bandes. . . . . — 317

J. Weingarten. Zu der Abhandlung: Ueber die Eigenschaften des Linienelementes der Flächen von constantem Krümmungsmass. (Dieses Journal Bd. 94, pag. 181.) . . . . . — 325

Th. Reye. Ueber lineare und quadratische Strahlencomplexe und Complexen-Gewebe. . . . . — 330

Neue Constructionen der Perspective und Photogrammetrie.

(Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme, I. Artikel.)

Hierzu Taf. I und II, Fig. 1—13.

(Von Herrn *Guido Hauck.*)

§ 1.

Exposition. Allgemeines über trilineare Verwandtschaft. Technische Perspective und Photogrammetrie.

Die Herren *Rosanes, Schubert* und *Benno Klein* haben, theils auf analytischem, theils auf synthetischem Wege, Untersuchungen über die *trilineare Verwandtschaft* zwischen drei einstufigen Grundgebilden angestellt *), — eine Verwandtschaft, vermöge welcher in drei einstufigen Grundgebilden je drei Elemente einander so zugeordnet sind, dass durch zwei derselben das dritte eindeutig bestimmt ist. Der analytische Ausdruck dieser Verwandtschaftsbeziehung wird gebildet durch eine Gleichung, welche nach jeder von drei (die Lage der veränderlichen Elemente in den drei Grundgebilden ausdrückenden) Variabeln linear ist.

Ich habe mich schon seit längerer Zeit mit der trilinearen Verwandtschaft sowohl einstufiger als zweistufiger Grundgebilde beschäftigt, zu der ich jedoch auf einem wesentlich anderen Wege gelangt war, nämlich dadurch, dass ich vom Gesichtspunkt der *Descriptiven Geometrie* aus die Beziehungen untersuchte, die zwischen drei Projectionen eines und desselben ebenen oder räumlichen Systems obwalten.

So erhält man z. B. drei trilinear-verwandte Punktreihen, wenn man ein und dasselbe ebene System auf drei in seiner Ebene liegende feste Ge-

*) Vgl. *Rosanes:* „Ueber linear-abhängige Punktsysteme“ § 9, dieses Journal, Bd. 88, S. 269. — *Schubert:* „Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden“, Mathematische Annalen, Bd. XVII, S. 457. — *Benno Klein:* „Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde“, Marburg 1881.

rade von drei festen Centren aus projicirt und je drei solche Punkte einander zuordnet, welche die Projectionen eines und desselben Punktes des ebenen Systems vorstellen.

Die genannte ***Erzeugungsweise durch Projection*** kann aufgefasst werden als das dualistische Gegenstück zu der von Herrn ***Schubert*** angewendeten Erzeugungsweise, welche die ***Erzeugungsweise durch Schnitt*** genannt werden möge. Nach dieser erhält man drei trilinear-verwandte Punktreihen, wenn man von den Punkten dreier in der nämlichen Ebene liegenden Geraden je drei solche einander zuordnet, welche in gerader Linie liegen, und dann zu jeder dieser drei Punktreihen eine mit ihr projectivische Punktreihe construirt *).

Während nun diese beiden Erzeugungsweisen (durch Projection und durch Schnitt) bei einstufigen Grundgebilden zu einer und derselben Verwandtschaft führen, bedingen sie bei zweistufigen Grundgebilden zwei verschiedene Verwandtschaftscharaktere.

Es ist nämlich zunächst das Vorhandensein der zwei verschiedenen Fälle der zweifach gebundenen oder ***zweibündigen*** und der dreifach gebundenen oder ***dreibündigen*** trilinearen Verwandtschaft zu constatiren, je nachdem bei analytischer Behandlung die dreimal zwei Variabeln xy, $x'y'$, $x''y''$, welche die Coordinaten von drei zugeordneten Elementen der drei ebenen Systeme ausdrücken, durch zwei oder durch drei Gleichungen gebunden sind. Man könnte diese zwei Verwandtschaften auch durch die Bezeichnungen ***vierstufig*** und ***dreistufig*** unterscheiden, insofern der zweifache Verband eine vierfach unendliche Mannigfaltigkeit —, der dreifache Verband eine dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Tripeln zugeordneter Elemente liefert.

Da man ferner als Grundelemente der drei ebenen Systeme entweder deren Punkte oder deren gerade Linien ins Auge fassen —, oder also die Variabeln xy, $x'y'$, $x''y''$ entweder als Punktcoordinaten oder als Liniencoordinaten verstehen kann, so hat man eigentlich vier Einzelverwandtschaften zu unterscheiden, nämlich:

1. ***die zweifach gebundene*** —

---

*) Die durch die erste („*geradlinigte*“) Zuordnung gewonnenen drei Punktreihen sind zwar bereits trilinear verwandt, repräsentiren jedoch noch nicht den allgemeinsten Fall der trilinearen Verwandtschaft; dieser wird erst durch projectivische Transformation erreicht.

2. *die dreifach gebundene trilineare Verwandtschaft ebener Punktsysteme,*

3. *die zweifach gebundene —*

4. *die dreifach gebundene trilineare Verwandtschaft ebener Geradensysteme.*

Setzt man nun des weiteren fest, dass in drei ebenen Systemen zu gleicher Zeit die Punkte **und** die Geraden einander trilinear zugeordnet sein sollen, so tritt eine Combination einer der zwei ersten mit einer der zwei letzten genannten Einzelverwandtschaften ein. Man überzeugt sich aber leicht, dass dies nur in der Art möglich ist, dass entweder die Einzelverwandtschaften 1. und 4. oder 2. und 3. der obigen Classification zu einer *combinirten Verwandtschaft* zusammentreten, so dass man also zwei verschiedene Verwandtschaftscharaktere erhält: in der einen sind die Punkte dreifach, die Geraden zweifach gebunden, in der anderen sind die Punkte zweifach, die Geraden dreifach gebunden; und diese zwei combinirten Verwandtschaften stehen einander dualistisch gegenüber.

Seien nämlich xy, $x'y'$, $x''y''$ die Coordinaten der Punkte —, uv, $u'v'$, $u''v''$ die Coordinaten der geraden Linien der drei ebenen Systeme S, S', S'', und seien die Punkte dreifach gebunden durch die drei Gleichungen:

$$f_1(xy\,x'y'x''y'') = 0, \quad f_2(xy\,x'y'x''y'') = 0, \quad f_3(xy\,x'y'x''y'') = 0,$$

so müssen diese drei Gleichungen so beschaffen sein, dass den Punkten zweier Geraden der Systeme S' und S'':

$$u'x'+v'y'+1 = 0, \quad u''x''+v''y''+1 = 0$$

im dritten System S Punkte entsprechen, die ebenfalls in gerader Linie liegen. Man erhält die Gleichung dieser letzteren geraden Linie dadurch, dass man aus den vorliegenden fünf Gleichungen die vier Variabeln $x'y'x''y''$ eliminirt. Da die resultirende Gleichung vom ersten Grade nach x, y sein muss, so muss sie die Form haben:

$$\varphi(u'v'u''v'').x+\psi(u'v'u''v'').y+1 = 0.$$

Die Coordinaten der fraglichen Geraden sind somit:

$$u = \varphi(u'v'u''v''), \quad v = \psi(u'v'u''v''),$$

und dies sind nun die Gleichungen, durch welche die Coordinaten uv, $u'v'$, $u''v''$ dreier zugeordneter geraden Linien gebunden sind. Dieser Verband ist somit ein zweifacher. — Würden wir umgekehrt xy, $x'y'$, $x''y''$ als Liniencoordinaten, uv, $u'v'$, $u''v''$ als Punktcoordinaten deuten, so würde sich durch

dieselben Schlüsse ergeben, dass in derjenigen trilinearen Verwandtschaft, in welcher die Geraden dreifach gebunden sind, den Punkten ein zweifacher Verband zukommt. —

Am anschaulichsten wird wohl — um wieder zu der ursprünglichen Frage der Erzeugung durch Projection und durch Schnitt zurückzukehren — das gegenseitige Verhältniss zwischen unseren vier Einzelverwandtschaften sowie deren zwei Combinationen klargelegt durch folgenden Satz:

Bezieht man die Punkte, Geraden und Ebenen eines räumlichen Systems auf drei beliebige feste Projectionsebenen, indem man von allen Punkten und Geraden die Projectionen (von drei festen Centren aus, welche event. auch ins Unendliche fallen können) —, ferner von allen Geraden und Ebenen deren Spuren (Tracen) bestimmt und je drei solche Elemente der drei Ebenen einander zuordnet, welche die Projectionen oder die Spuren eines und desselben Raumelements vorstellen, so erhält man:

1. in der Gesammtheit der *Punktprojectionen:* drei dreibündig-trilineare Punktsysteme,

2. in der Gesammtheit der *Geradenprojectionen:* drei zweibündig-trilineare Geradensysteme,

3. in der Gesammtheit der *Geradenspuren:* drei zweibündig-trilineare Punktsysteme,

4. in der Gesammtheit der *Ebenenspuren:* drei dreibündig-trilineare Geradensysteme.

Es ist damit nicht gesagt, dass man durch das genannte Verfahren jedesmal den allgemeinsten Fall der betreffenden Verwandtschaft erhalte. In der That wird sich im Verlauf unserer Untersuchungen ergeben, dass dies nur bei 1. und 2., nicht aber bei 3. und 4. der Fall ist. Vorerst mag man sich damit begnügen, den Satz durch Illustration an Specialbeispielen sich zu veranschaulichen und daraus vorgreifend die Veranlassung zu entnehmen, dass wir von den besprochenen zwei combinirten Verwandtschaften diejenige, in welcher die Punkte dreifach, die Geraden zweifach gebunden sind, als *projectiv-trilineare Verwandtschaft* —, dagegen diejenige, bei welcher die Geraden dreifach, die Punkte zweifach gebunden sind, als *sectiv-trilineare Verwandtschaft* bezeichnen.

Durch das Gesagte ist zugleich die innige Zugehörigkeit der Theorie der trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme in das Gebiet der Descriptiven Geometrie gekennzeichnet. In der That dürfte diese Theorie in

gewissem Sinne vielleicht die Bedeutung einer Weiterbildung der „*Géométrie descriptive*“ im Geiste von *Monge* beanspruchen.

Der vorliegende I. Artikel giebt zunächst von der *projectiv-trilinearen Verwandtschaft* nichts als die Fundamentalconstruction und deren Anwendung auf praktische Beispiele. Das überaus lebhafte Interesse, das in allerjüngster Zeit der Methode der *Photogrammetrie* von massgebender Seite entgegengebracht worden ist, mag es rechtfertigen, dass ich mich bei der Anwendung auf dieses Gebiet länger verweile, als es vielleicht vom Standpunkt des Theoretikers angezeigt erscheinen möchte. Eben aus diesem Grunde erachtete ich es für nothwendig, die vorstehenden Erörterungen über die allgemeine Natur der trilinearen Verwandtschaft zur vorläufigen Orientirung vorauszuschicken.

In einem folgenden Artikel würde dann zunächst der Nachweis erbracht werden, dass die zwischen drei Projectionen eines räumlichen Punktsystems bestehende Beziehung in der That den allgemeinsten Fall der dreibündig-trilinearen Punktverwandtschaft repräsentirt. Hieran würde sich die Entwicklung der allgemeinen Eigenschaften dieser Verwandtschaft sowie die Betrachtung gewisser wichtiger Specialfälle —, fernerhin die Besprechung der sectiv-trilinearen Verwandtschaft sowie der trilinear-reciproken Verwandtschaft (mit ihren graphostatischen Beziehungen) reihen. Damit würden dann schliesslich die Mittel gewonnen sein, zu einer synthetischen Theorie der Erzeugnisse von trilinear-verwandten Grundgebilden (Curven und Flächen dritter Ordnung), wie dies schon von Herrn *Schubert* in seiner grundlegenden Abhandlung angedeutet worden ist.

Für den gegenwärtigen Aufsatz erscheint es angezeigt, den Gegenstand zunächst noch nicht vom Gesichtspunkt des allgemeinen Verwandtschaftsbegriffes, sondern vom Gesichtspunkt der *Darstellenden Geometrie* aus zu behandeln, um dann von hier aus allmählich zur allgemeineren Anschauung aufzusteigen.

Die *Darstellende Geometrie* (im engeren Sinne des Wortes) befasst sich mit der Aufgabe, gegebene räumliche Objecte in Central- oder Parallelprojection unter gegebenen Bedingungen *darzustellen*. Da aber ein räumliches Object nach Gestalt und Lage im Raum im Allgemeinen selbst wieder durch zwei Projectionen bestimmt ist, und in der Mehrzahl der Fälle auch wirklich durch zwei Projectionen gegeben vorliegt, so kann die Fundamentalaufgabe der in Rede stehenden Disciplin dahin präcisirt werden:

Es ist aus zwei gegebenen Projectionen eines räumlichen Gebildes eine beliebige dritte Projection zu ermitteln.

Hinsichtlich der praktischen Zwecke, welchen diese Aufgabe dient, sind zwei Specialformen derselben von besonderer Wichtigkeit:

1. Sind die zwei gegebenen Projectionen Parallelprojectionen (z. B. Grundriss und Aufriss), die gesuchte dritte Projection eine Centralprojection, so liegt das Problem der Perspective vor, und zwar mag diese specielle Form der Aufgabestellung im Gegensatz zur *„freien Perspective“* als *„technische Perspective“* gekennzeichnet werden.

2. Sind die zwei gegebenen Projectionen Centralprojectionen (z. B. zwei Photographien), die gesuchte dritte Projection eine Parallelprojection (z. B. Grundriss oder Aufriss): so liegt das Problem der ***Photogrammetrie*** vor, welche sich die Aufgabe stellt, geometrische Aufnahmen von Terrain- oder Architectur-Objecten mittelst photographischer Aufnahmen zu bewerkstelligen.

[Von *Beautemps-Beaupré* 1835 in Anregung gebracht — wurde die ***Photogrammetrie*** von Herrn ***Laussedat*** (d. Z. Directeur du conservatoire national des arts et métiers à Paris) seit 1851 definitiv ausgebildet und mit entschiedenem Erfolge praktisch ausgeübt [1]). Seine photogrammetrische Aufnahme von Paris erfuhr 1860 die günstigste Beurtheilung seitens der *Académie des sciences* [2]). In Deutschland wurden *Laussedats* grundlegende Arbeiten erst im Jahre 1865 durch einen Artikel Herrn *Girards* im *Photographischen Archiv* bekannt [3]), woraufhin Herr *Meydenbauer* den Gegenstand aufgriff und unter Benützung der — im nämlichen Jahre in den Handel gekommenen, bis zu einem Bildwinkel von 90° noch centralperspectivisch correct zeichnenden — *Weitwinkel-Linsen* (*Steinheils Periskop* und *Buschs Pantoskop*) [4]) die Methode praktisch ausübte und propagirte [5]). Auch der *grosse Generalstab* hatte dem Gegenstande von Anfang an seine besondere Aufmerksamkeit zugewendet und erzielte u. a. im Jahre 1870 mit seinen (ohne Zuthun *Meydenbauers*) ausgeführten Aufnahmen vorzügliche Resultate [6]). Wesentliche Verdienste um die Methode, namentlich in theoretischer Beziehung erwarb sich Herr *Jordan,* welcher sich derselben bei der *Rohlfs*schen Expedition in die Libysche Wüste 1873—74 mit grossem Glück bediente [7])] *).

*) Man vergl. hierzu: [1]) die verschiedenen Abhandlungen *Laussedats* im *Mémorial de l'officier du génie* seit 1851. — [2]) *Comptes rendus des séances de l'ac.*

Es lag nun sehr nahe, die oben präcisirte Aufgabe (aus zwei Projectionen eine beliebige dritte zu ermitteln) in ihrer allgemeinsten Form in Angriff zu nehmen. Es liess sich erwarten, dass ihre Lösung die manchfaltigen Specialconstructionen der praktischen Perspective und Photogrammetrie sämmtlich als einfache Specialfälle in sich enthalten werde. Die Fundamentalconstruction der projectiv-trilinearen Verwandtschaft, wie sie im Folgenden gegeben wird, erfüllte in der That diese Erwartung; sie erwies sich gleichzeitig als eine ergiebige Quelle von neuen Constructionsmethoden für die Darstellende Geometrie. Dieselben wurden bereits im Frühjahr 1882 im Constructionssaal für Descriptive Geometrie unserer Technischen Hochschule auf ihre praktische Brauchbarkeit geprüft und bewährt erfunden.

Ein besonderes Interesse gewinnen die in Rede stehenden Constructionen noch durch den Umstand, dass sie sich sehr leicht in einen mechanischen Apparat übertragen lassen, das heisst in einen Mechanismus, welcher — bestehend aus einem kinematisch verketteten Gestänge mit zwei Führungsstiften und einem Zeichenstift — die betreffende Construction in der Art mechanisch ausführt, dass, wenn man mit den zwei Führungsstiften die zugeordneten Linien der zwei gegebenen Projectionen durchfährt, gleichzeitig der Zeichenstift die entsprechenden Linien der gesuchten dritten Projection mechanisch beschreibt*). Während es bisher der *praktischen Geometrie* nur in der Weise möglich war, Curven aufzunehmen, dass man einzelne Punkte derselben einvisirte und festlegte, welche man dann durch einen stetigen Curvenzug aus freier Hand verbinden musste, stellt die photogrammetrische Methode nunmehr mit Hilfe des in Rede stehenden Apparates

---

des sc. t. 50 (1860), p. 1127. — [3]) *Girard:* „*Laussedats* Arbeiten in Bezug auf die Anwendung der Photographie zur Aufnahme von Plänen, (nach dem *Journal des Débats* und dem *Bulletin de la Soc. Franç. de Photogr.* vom März 1865)", *Photogr. Archiv,* Bd. 6, Jahrg. 1865, S. 316. — [4]) *Remelé:* „Das Periskop von *Steinheil* und das Pantoskop von *E. Busch*". *Photograph. Mittheilungen,* II. Jahrg., November 1865, S. 97. — [5]) *Meydenbauer:* „Ueber die Anwendung der Photographie zur Architektur- und Terrain-Aufnahme". *Zeitschrift für Bauwesen,* Jahrg. 17, 1867, S. 61. — [6]) Erklärung *Meydenbauers* in der *Deutschen Bauzeitung,* Jahrg. 16, 1882, S. 241. — [7]) *Jordan:* „Ueber die Verwerthung der Photographie zu geometrischen Aufnahmen (Photogrammetrie)". *Zeitschrift für Vermessungswesen,* Bd. 5, 1876, S. 1.

*) Das Modell eines solchen Apparates (eingestellt für das Beispiel: Perspective aus Grundriss und Aufriss) wurde von mir der *Physikalischen Gesellschaft* zu Berlin in ihrer Sitzung am 4. Mai d. J. vorgelegt. Vgl. „*Verhandlungen der physikal. Ges. in Berlin*", 1883, No. 8, S. 43.

die Möglichkeit in Aussicht, Curven in ihrem ganzen continuirlichen Verlaufe unmittelbar aufzunehmen. Erst hiedurch dürfte die Photogrammetrie ihre volle Leistungsfähigkeit gewinnen.

§ 2.

Fundamentalsatz über die Beziehung zwischen zwei Projectionen eines und desselben räumlichen Gebildes.

Es seien (Fig. 1. a) S' und S'' zwei Projectionsebenen, O_1 und O_2 die zugehörigen Projectionscentren. Die Schnittlinie g_{12} der zwei Projectionsebenen nennen wir den ***Grundschnitt.*** Die Verbindungslinie O_1O_2 möge die zwei Projectionsebenen in den Punkten o_2' und o_1'' schneiden, welche wir die ***Kernpunkte*** der zwei Ebenen nennen. Dieselben haben die Bedeutung, dass jeder die seinem System entsprechende Abbildung (Projection) des gegnerischen Projectionscentrums vorstellt. (Dieser Bedeutung entsprechend sind die Bezeichnungen o_2' und o_1'' hinsichtlich der Accente und Indices getroffen.)

Sollen nun x' und x'' die Projectionen eines und desselben Objectpunktes X vorstellen, oder — wie wir uns kurz ausdrücken — sollen x' und x'' zwei ***zugeordnete Punkte*** der Ebenen S' und S'' sein: so müssen die projicirenden Strahlen O_1x' und O_2x'' in einer Ebene liegen, — eine Bedingung, die leicht in den Projectionsebenen selbst verificirt werden kann. Da nämlich die drei Ebenen S', S'' und O_1O_2X sich nach den Linien g_{12}, $x'o_2'$ und $x''o_1''$ schneiden, und da die Schnittlinien dreier Ebenen in einem Punkte zusammentreffen: so müssen sich $x'o_2'$ und $x''o_1''$ in einem Punkte G_{12} des Grundschnitts g_{12} schneiden. Da dies für jedes Paar zugeordneter Punkte x' und x'' gilt und da die Kernpunkte o_2' und o_1'' unveränderlich sind, so haben wir den Satz (vgl. Fig. 1. b):

Die beiden Projectionsfiguren werden von den Kernpunkten aus durch perspectivische Strahlenbüschel projicirt, und zwar repräsentirt der Grundschnitt die Axe der Perspectivität.

Befinden sich zwei ebene Gebilde, welche die Projectionen eines und desselben räumlichen Objectes vorstellen, in derjenigen Lage im Raum, in welcher jedes zu dem räumlichen Objecte perspectivisch ist, so wollen wir sagen, sie befinden sich zu einander ***in orientirter Lage.*** Dem gefundenen Satze zufolge bildet also die Perspectivität der zwei ***Kernstrahlenbüschel*** das Kriterium für die orientirte Lage. — Da nun aber zwei projectivische Strahlenbüschel stets, und zwar auf unendlich ver-

schiedene Weise, in perspectivische Lage gebracht werden können, so lässt sich unser Satz in allgemeinerer Form auch so aussprechen:

Zwei ebene Gebilde, deren Punkte einander paarweise zugeordnet sind, können als die Projectionen eines und desselben räumlichen Gebildes angesehen werden, wenn sie sich von zwei in ihren Ebenen liegenden Punkten durch projectivische Strahlenbüschel projiciren lassen. — Zwei ebene Gebilde, welche dieser Bedingung genügen, können stets auf unendlich verschiedene Weise in orientirte Lage übergeführt werden, nämlich dadurch, dass die genannten zwei Strahlenbüschel in perspectivische Lage gebracht werden.

Die verschiedenen räumlichen Gebilde, als deren Projectionen die zwei ebenen Gebilde für verschiedene orientirte Lagen und für verschiedene Annahmen der Projectionscentren auf der Verbindungslinie der zwei Kernpunkte angesehen werden können, sind zu einander collinear-verwandt.

Es wurde schon oben bemerkt, dass die zwei Kernpunkte die Abbildungen der zwei Projectionscentren vorstellen. Man erkennt nun weiter, (vgl. Fig. 1. *a* und *b*), dass von den zwei in Rede stehenden Strahlenbüscheln o_2' und o_1'' jedes die seinem System entsprechende Abbildung des projicirenden Strahlenbündels des gegnerischen Projectionssystems repräsentirt. — (Von dieser Erwägung ausgehend hätte unser Satz einfach auch so bewiesen werden können: Zwei Strahlen der Büschel o_1'' und o_2', welche die Abbildungen zweier nach dem nämlichen Punkt X des Raumes führenden projicirenden Strahlen O_1X und O_2X vorstellen, mögen *zugeordnete* Strahlen genannt werden. Fasst man nun die einzelnen Punkte G_{12} des Grundschnitts g_{12} als räumliche Punkte X auf, so fallen für jeden solchen Punkt seine zwei Projectionen x' und x'' ebenfalls nach G_{12}. Daher sind immer zwei von o_1'' und o_2' nach einem Punkt G_{12} gezogene Strahlen einander zugeordnet.)

Die beiden Kernpunkte stellen *singuläre Punkte* ihrer respectiven Ebenen vor. Während im allgemeinen diejenigen Punkte, welche einem bestimmten Punkt der einen Ebene zugeordnet sein können, in der andern Ebene auf eine bestimmte Gerade, nämlich einen *Kernstrahl,* beschränkt sind, kommt dem Kernpunkt die Eigenthümlichkeit zu, dass ihm jeder beliebige Punkt der andern Ebene als zugeordneter zugetheilt werden kann.

Unser Satz erleidet keinerlei Alteration, auch wenn eines der beiden Projectionscentren, z. B. O_1 ins Unendliche fällt, wenn also die Projection auf S' eine Parallelprojection ist. In dem besonderen Fall, wo hiebei

das von O_1 ausgehende projicirende Parallelstrahlenbündel parallel zu der andern Projectionsebene S'' ist, fällt auch o_1'' ins Unendliche, und wird also aus dem Strahlenbüschel o_1'' ein Parallelstrahlenbüschel, welches dem Bündel O_1 parallel ist.

Liegen ferner beide Projectionscentren im Unendlichen, so fallen auch beide Kernpunkte ins Unendliche. Sind also beide Projectionen Parallelprojectionen, so gehen die zwei Strahlenbüschel o_2' und o_1'' in Parallelstrahlenbüschel über, und zwar sind dieselben parallel mit den Schnittlinien einer zu den zwei projicirenden Parallelstrahlenbündeln parallelen Ebene. Sie sind also in dem speciellen Fall der orthogonalen Parallelprojection senkrecht zum Grundschnitt. Man kann hiernach den in Rede stehenden Satz als eine Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der *Monge*schen *Géométrie descriptive* („die beiden Projectionen eines Punktes liegen in einer Senkrechten zum Grundschnitt") auffassen.

§ 3.

Die Fundamentalconstruction der projectiv-trilinearen Verwandtschaft ebener Systeme.

Es seien (Fig. 2. *a*) drei Projectionsebenen S, S', S'', nebst den zugehörigen Projectionscentren O, O_1, O_2 gegeben. Auf zweien derselben, z. B. S' und S'', seien die Projectionen eines räumlichen Objectes gegeben. Die Aufgabe ist: dessen Projection auf die dritte Ebene S zu finden, und zwar durch eine Construction, die sich bloss in den Projectionsebenen selbst bewegt.

Die Schnittlinien der drei Projectionsebenen werden wieder als *Grundschnitte* bezeichnet und seien: g_1 zwischen S und S', g_2 zwischen S und S'', g_{12} zwischen S' und S''. Der gemeinschaftliche Schnittpunkt der drei Grundschnitte sei A.

Der im vorigen Paragraphen bewiesene Satz gilt nun für je zwei der drei Projectionen und liefert die Mittel zur Lösung der in Frage stehenden Aufgabe.

Wird das von den drei Projectionsebenen gebildete Dreikant von der Ebene OO_1O_2 nach dem Dreieck $M_1M_2M_{12}$ geschnitten, so erhält man in den Schnittpunkten der Seiten dieses Dreiecks mit den Verbindungslinien der drei Projectionscentren die dreimal zwei Kernpunkte o_1 und o', o_2' und o_1'', o'' und o_2, wo die Bezeichnung einerseits hinsichtlich der Accente mit

Rücksicht auf die Ebene gewählt ist, welcher der betreffende Punkt angehört, andererseits hinsichtlich der Indices mit Rücksicht auf das Projectionscentrum, dessen Abbildung er repräsentirt*). Wir nennen die drei Verbindungslinien der Kernpunkte M_2M_1, M_1M_{12}, $M_{12}M_2$: die ***Hauptaxen*** der betreffenden Ebenen und bezeichnen die ganze Figur 2. *a* als die ***Vorbereitungsfigur.***

Man denke sich nun das Dreikant $A, g_1g_2g_{12}$ nach der Kante g_{12} aufgeschnitten und seine drei Flächen in die Zeichnungsebene ausgebreitet, (die Ebenen S' und S'' in die Ebene S ***umgeklappt***) (s. Fig. 2. *b*), wobei die zwei Lagen der aufgeschnittenen Kante g_{12} sowie der auf ihr liegenden Punkte durch einfache und zweifache Accentuirung unterschieden werden mögen. Die so entstehende Figur nennen wir die ***Ausführungsfigur.*** Die Uebertragung der Kernpunkte von der ***Vorbereitungsfigur*** in die ***Ausführungsfigur*** geschieht dadurch, dass zuerst auf den ***Grundschnitten*** die Entfernungen der Punkte M von Punkt A abgeschnitten und dann auf den Verbindungslinien der Punkte M die Kernpunkte aufgetragen werden.

Sind nun x' und x'' irgend zwei zugeordnete Punkte der gegebenen Projectionen, so findet man — zufolge dem im vorigen Paragraphen besprochenen Satze — den zugeordneten Punkt x der gesuchten dritten Projection durch folgende Construction:

Man zieht $x'o'$ und $x''o''$, bis sie die bezüglichen Grundschnitte g_1 und g_2 schneiden in G_1 und G_2; man zieht hierauf G_1o_1 und G_2o_2 und erhält in deren Schnittpunkt den gesuchten Punkt x.

Die Controle darüber, dass x' und x'' wirklich zwei zugeordnete Punkte sind, geschieht mittelst der zwei Kernpunkte o_2' und o_1'': Man zieht $x'o_2'$ und $x''o_1''$, bis sie g_{12}' und g_{12}'' schneiden in G_{12}' und G_{12}'', dann muss $AG_{12}' = AG_{12}''$ sein.

---

*) Noch unmittelbarer würde das Princip dieser Bezeichnung ins Auge fallen, wenn die Projectionsebenen durch S^0, S', S'' —, die Projectionscentren durch O_0, O_1, O_2 bezeichnet wären; die Kernpunkte würden dann sein: o_1^0 und o_0', o_2' und o_1'', o_0'' und o_2^0. Bei der im Text gewählten Bezeichnungsweise sind Accent und Index 0 überall unterdrückt. — Die consequente Festhaltung dieser Benennung ist für das Folgende von Wichtigkeit. Indessen werden wir uns späterhin bei Betrachtungen, wo die in jener Bezeichnung ausgedrückte Bedeutung der Kernpunkte weniger ins Gewicht fällt, mitunter auch einer kürzeren Benennung bedienen, indem wir (mit Anlehnung an Herrn *Schubert*) bezeichnen:

statt:

$$\begin{array}{cccccc} p & q & p' & q' & p'' & q'' \\ o_2 & o_1 & o' & o_2' & o_1'' & o''. \end{array}$$

Diese Controle kommt namentlich zur Verwerthung in dem Falle, wo die zwei gegebenen Projectionen Curven enthalten (vgl. Fig. 1.*b*). Um dann die dritte zugeordnete Curve aus einzelnen Curvenpunkten x zeichnen zu können, hat man zuvor auf den zwei gegebenen Curven K' und K'' eine Reihe von Paaren zugeordneter Punkte x' und x'' zu markiren, was dadurch geschieht, dass man etwa x' auf K' beliebig wählt, $x'o_2'$ zieht bis zum Schnitte G_{12}' mit g_{12}', $AG_{12}'' = AG_{12}'$ auf g_{12}'' macht und $G_{12}''o_1''$ zieht, welche die Curve K'' in x'' schneidet. — Man wird im allgemeinen mehrere Schnittpunkte x'' erhalten. Man bemerke aber, dass — wenn durch K' und K'' eine Curve im Raum eindeutig bestimmt sein soll — die zugeordneten Aeste von K' und K'' ausdrücklich bezeichnet sein müssen (wie dies schon aus der *Monge*schen Descriptiven Geometrie genügend bekannt ist.) —

Man erkennt leicht, dass das Verfahren vollkommen in Giltigkeit bleibt, bezw. wie sich dasselbe modificirt, wenn ein oder mehrere Projectionscentren oder Kernpunkte ins Unendliche fallen. —

Liegt von einem Tripel zugeordneter Punkte x, x', x'' einer in der *Hauptaxe* seiner Ebene, so findet (abgesehen von den nachher zu besprechenden Specialfällen) dasselbe auch für die zwei andern Punkte statt. Es lässt aber dann die angegebene allgemeine Construction im Stich. Man kann in diesem Falle entweder auf die *Vorbereitungsfigur* (Fig. 2. *a*) recurriren, wo auf den drei Hauptaxen die Punkte x, x', x'' durch die zugehörigen drei Projectionscentren einander so zugeordnet sind, dass sie drei *trilinear-verwandte Punktreihen* bilden (vgl. § 1, S. 1 unten); man erhält zu einem Paar x', x'' das zugehörige x dadurch, dass man O_1x' und O_2x'' zieht bis zu ihrem Schnitt X, hierauf OX zieht, welche die Hauptaxe o_1o_2 in x schneidet. Oder aber, wenn die Operationen ausschliesslich auf die *Ausführungsfigur* beschränkt bleiben sollen, kann man in dieser x' und x'' mit A verbinden, auf den Verbindungslinien irgend ein anderes Paar zugeordneter Punkte y' und y'' wählen (Controle für die Zuordnung mittelst o_2' und o_1''), den dritten zugeordneten Punkt y construiren und diesen mit A verbinden: so erhält man im Schnittpunkt der Linie Ay mit der Hauptaxe o_1o_2 den gesuchten Punkt x. — Statt des Punktes A (in welchem drei zugeordnete Punkte zusammenfallen) kann übrigens auch ein ganz beliebiges Tripel zugeordneter Punkte a, a', a'' benutzt werden.

Es empfiehlt sich dieses Verfahren nicht bloss für Punkte, welche auf den *Hauptaxen* selbst liegen, sondern auch für solche in nächster Nähe

derselben, da für sie die Bestimmung in Folge von *langen Schnitten* unsicher wird. —

Die sechs Kernpunkte stellen *singuläre Punkte* der betreffenden Projectionsebenen vor. Sie gruppiren sich in doppelter Weise zu Paaren von der Eigenschaft, dass, wenn die Punkte eines Paares als zugeordnete Punkte figuriren, der jedesmalige dritte zugeordnete Punkt mehr oder weniger unbestimmt wird. — Wir wollen zwei solche Kernpunkte, welche die Abbildungen eines und desselben Projectionscentrums repräsentiren, deren Bezeichnungen also den nämlichen Index tragen, (als: o' und o'', o_1 und o_1'', o_2 und o_2') — *correspondirende Kernpunkte* nennen, ferner zwei solche, von denen jeder die Abbildung des dem System des andern zugehörigen Projectionscentrums vorstellt, welche also hinsichtlich der Accente und Indices umgekehrt bezeichnet sind, (als: o_1 und o', o_2' und o_1'', o'' und o_2) — *gegnerische Kernpunkte* nennen. — Diese doppelte Paarung der Kernpunkte kommt nun in folgender Weise zur Geltung:

Fällt von einem Tripel zugeordneter Punkte einer in einen Kernpunkt, so muss stets ein zweiter ebenfalls in einen Kernpunkt fallen, und zwar entweder in den correspondirenden oder in den gegnerischen. Der dritte zugeordnete Punkt wird unbestimmt; und zwar kann zu zwei correspondirenden Kernpunkten als dritter zugeordneter Punkt jeder beliebige Punkt der dritten Ebene functioniren, während zweien gegnerischen Kernpunkten nur jeder beliebige Punkt der Hauptaxe der dritten Ebene zugeordnet ist.

Denn bezeichnet wieder X den Punkt des Raumes, dessen Projectionen die drei zugeordneten Punkte x, x', x'' vorstellen, und fällt z. B. (vgl. Fig. 2. *a*) der Punkt x' mit dem Kernpunkt o' zusammen, so muss der Punkt X irgendwo auf dem Strahl O_1o' liegen. Fällt er speciell mit O zusammen, so kommt x'' in den correspondirenden Kernpunkt o'' zu liegen, während der Strahl OX und folglich auch dessen Schnittpunkt x mit der Ebene S unbestimmt wird. Hat aber Punkt X irgend welche andere Lage auf dem Strahl O_1o_1', so fällt x in den gegnerischen Kernpunkt o_1, der Strahl O_2X liegt dann unbestimmt in der Ebene OO_1O_2 und somit der Punkt x'' unbestimmt auf der Hauptaxe $o''o_1''$.

Schliesslich sei noch ausdrücklich darauf hingewiesen, dass den drei *Grundschnitten* in keinerlei Weise der Charakter von singulären Elementen zukommt (ein Punkt, der im II. Artikel seine ausführlichere Erörterung finden wird).

Wir unterbrechen hier die allgemeine Theorie und wenden uns zu der Betrachtung einer Reihe von praktischen Anwendungen der Fundamentalconstruction.

§ 4.

Beispiel I. Centralperspective aus geometrischem Aufriss und Seitenriss.

Gegeben seien Aufriss-Projection und Seitenriss-Projection eines (architektonischen) Objectes, gesucht: eine bestimmte Centralprojection.

Die gegenseitige Lage der Grundschnitte und Kernpunkte bestimmt sich aus einer einfachen *Vorbereitungsfigur*, welche als Grundriss-Projection aufgefasst werden mag (Fig. 3. *a**)). In derselben stellen sich die drei verticalen Projectionsebenen (*Bild-Ebene S, Aufriss-Ebene S', Seitenriss-Ebene S''*) als gerade Linien —, die drei verticalen Grundschnitte g_1, g_2, g_{12} als Punkte dar. Das der Bild-Ebene *S* zugehörige Projectionscentrum (*Augpunkt*) sei *O*. Die zwei andern Projectionscentren O_1 und O_2 fallen ins Unendliche, und zwar in der Richtung senkrecht zu der Aufriss- und der Seitenriss-Ebene. Die in diesen Richtungen durch *O* gezogenen Strahlen schneiden die betreffenden Projectionsebenen in den Kernpunkten o' und o_1, o'' und o_2. In Fig. 3. *a* sind die Grundriss-Projectionen dieser Punkte durch die gleichlautenden Buchstaben bezeichnet**); sie liegen in einer Höhe über der Grundriss-Ebene gleich der gegebenen Höhe des Augpunktes *O*.

Man erkennt sofort, dass o_1 und o_2 identisch sind mit den zwei *Haupt-Fluchtpunkten*. Man bemerke ferner, dass o' und o'' die Aufriss- und Seitenriss-Projection des Augpunktes *O* vorstellen. — Die zwei anderen, dem Grundschnitt g_{12} zugehörigen Kernpunkte fallen ins Unendliche, und zwar in horizontaler Richtung.

Schneidet man nun nach dem Grundschnitt g_{12} auf und dreht die Aufriss-Ebene und Seitenriss-Ebene um die Linien g_1 und g_2 in den durch die Pfeile angedeuteten Richtungen, bis sie mit der Bild-Ebene zusammenfallen: so erhält man die in der *Ausführungsfigur* (Fig. 3. *b****)) ersichtliche Lage der Grundschnitte, der Kernpunkte und der Aufriss- und Seitenriss-Figuren.

---

*) Man ignorire in Fig. 3.*a* zunächst die in Klammern eingeschlossenen Buchstaben.

**) Wir gestatten uns dies auch im Folgenden jederzeit, wo es nicht zu Missverständnissen Veranlassung geben kann.

***) Man berücksichtige von Fig. 3. *b* zunächst nur die obere Partie.

Die drei ***Hauptaxen*** fallen in eine Gerade, welche identisch ist mit der ***Horizontlinie.*** Denkt man sich Aufriss und Seitenriss auf besonderen Blättern gegeben, so werden diese in der richtigen Lage auf das Zeichenbrett aufgeheftet, und es beginnt nun sofort die Construction des perspectivischen Bildes nach Vorschrift von § 3, wie es Fig. 3. *b* veranschaulicht. Dabei ist es überaus wichtig, sich der Bedeutung der verschiedenen Kernpunkte und ihrer Strahlenbüschel als der Abbildungen der verschiedenen Projectionscentren und ihrer projicirenden Strahlenbündel beständig bewusst zu bleiben. (So bedeuten z. B. die zwei Fluchtpunkte o_1 und o_2 die Abbildungen der unendlich fernen Projectionscentren der Aufriss- und Seitenriss-Projection, während die Fluchtstrahlen die Abbildungen der projicirenden Lothe vorstellen. Andererseits bedeuten o' und o'' und ihre Strahlenbüschel: die Aufriss- und Seitenriss-Projection des Augpunkts und des Sehstrahlen-Bündels.) — Im übrigen bedarf die Figur keiner weiteren Erklärung.

Man erkennt leicht, welche Modification die besprochene Construction für den Fall der ***Frontansicht*** erfährt.

Fig. 4. *a* zeigt zunächst die *Vorbereitungsfigur* (man vgl. sie mit Fig. 3. a). Die Bild-Ebene S ist parallel der Aufriss-Ebene S'; daher fällt der Grundschnitt g_1 ins Unendliche. Ferner fällt der Kernpunkt o_2 ins Unendliche (in horizontaler Richtung).

Schneidet man nun längs g_{12} auf und bringt die Aufriss- und Seitenriss-Ebene in Coincidenz mit der Bild-Ebene, und zwar die erstere durch Parallelverrückung, die letztere durch Drehung um g_2 in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung: so erhält man die in der *Ausführungsfigur* (Fig. 4. *b*) ersichtliche Lage. — Da der Kernpunkt o_2 im Unendlichen in horizontaler Richtung liegt, so wird das Strahlenbüschel o_2 zum horizontalen Parallelstrahlenbüschel. Da ferner der Grundschnitt g_1 im Unendlichen liegt, so werden je zwei zugeordnete Strahlen der zwei Büschel o_1 und o' (welche sich auf g_1 schneiden müssten) einander parallel, so dass das eine dieser Büschel als die Parallelverschiebung des andern angesehen werden kann. — Man könnte zum Behuf weiterer Vereinfachung der Construction die Parallelverrückung der Aufriss-Ebene so ausführen, dass o' mit o_1 zusammenfiele, so dass dann auch die zwei Strahlenbüschel o' und o_1 zusammenfallen würden. Dabei würde freilich die Perspectiv-Figur von

der Aufriss-Figur theilweise verdeckt werden; doch gewinnt man dadurch Fühlung mit älteren Methoden.

§ 5.

Bemerkungen zu Beispiel I.

Das im vorigen Paragraphen behandelte Beispiel wird bei architektonischen Objecten (namentlich bei Werken der Kleinkunst, wo sehr häufig nur der Aufriss und die Profilirung gegeben ist) eine werthvolle Verwendung finden können. — Indessen sind für die praktische Anwendung der Methode noch verschiedene Bemerkungen hinzuzufügen, ohne deren genaue Beachtung die Methode kaum einen Anspruch auf Brauchbarkeit in Praxi erheben dürfte.

1. Zunächst ist darauf hinzuweisen, dass die Construction für einen Punkt des Horizontes unbestimmt wird und auch in der Nähe des Horizontes nicht sehr genau ist, da sich hier die Linien unter sehr stumpfen Winkeln schneiden, wodurch namentlich die sichere Bestimmung der verticalen Linien gefährdet wird. — Man hilft diesem Uebelstand ab genau in der Weise, wie in § 3 (S. 12, unten) angegeben wurde. Die dort verwendeten, durch Punkt A gezogenen Hilfslinien sind aber nun (da A im Unendlichen in verticaler Richtung liegt) vertical; das Verfahren kommt somit darauf hinaus, dass man vertical über oder unter dem fraglichen Punkt x', x'' einen Hilfspunkt y', y'' wählt, dessen Perspective y construirt und durch y eine Verticale zieht. — Nehmen wir an, es würde dies mit einer ganzen Anzahl von Punkten x', x'' ausgeführt (s. Fig. 5) und die Hilfspunkte y', y'' würden alle in gleicher Höhe angenommen, so würden die Punkte Y, deren Projectionen y' und y'' vorstellen, alle in einer horizontalen Ebene liegen und in dieser eine Grundriss-Figur des gegebenen Objectes markiren. Die zugeordneten Bildpunkte y würden somit einen sogen. ***perspectivischen Grundriss*** erzeugen. Man kommt also auch bei unserer Theorie auf die bekannte Methode des tiefer oder höher liegenden perspectivischen Grundrisses, welche in der gewöhnlichen Theorie den nämlichen Zweck verfolgt: vor Ungenauigkeiten, die durch lange Schnitte bedingt sind, zu schützen. Bei unserer Methode kann ein solcher perspectivischer Grundriss unmittelbar hergestellt werden, ohne dass es nothwendig wäre, vorher den Grundriss in wahrer Gestalt zu zeichnen. Erst durch diese Modification (nach dem Schema Fig. 5) gewinnt Beispiel I praktischen Werth.

2. Hinsichtlich der Anordnung der *Vorbereitungs-* und *Ausführungsfigur* mag Folgendes beachtet werden:

Was zunächst die Lage der Aufriss- und Seitenriss-Ebene (s. Fig. 3.*a*) anlangt, so können dieselben parallel zu den zwei Hauptfaçaden des Objectes in beliebigem Abstande von diesem gewählt werden. Rückt man eine der zwei Ebenen, z. B. die Aufriss-Ebene S' vor oder zurück, so hat dies in der *Ausführungsfigur* (Fig. 3.*b*) zur Folge, dass die Aufriss-Figur mitsammt ihrem Strahlenbüschel o' sich entlang der Horizontlinie nach links oder rechts verschiebt. Die perspectivische Lage des Büschels o' mit dem festen Büschel o_1 bleibt hiebei stets erhalten; die Axe der Perspectivität (Grundschnitt g_1) erfährt aber eine Parallelverrückung nach links oder rechts. — Die Wahl der Aufriss- und Seitenriss-Ebene ist nun so zu treffen, dass die Kernpunkte in angemessene (möglichst weite) Entfernung von den Grundschnitten g_1 und g_2 zu liegen kommen. Am zweckmässigsten ist es, die Wahl so zu treffen, dass die Grundschnitte zwar nicht mehr in das perspectivische Bild hineinfallen, aber demselben doch möglichst nahe zu liegen kommen*). — Noch sei darauf aufmerksam gemacht, dass die Kernpunkte o_1 und o_2 ebenso gut innerhalb der Grundschnitte g_1 und g_2 fallen können als ausserhalb derselben (wie in Fig. 3). Im ersten Falle kommen o' und o'' ausserhalb, im letzteren Falle innerhalb zu liegen. Die letztere Lage verdient im allgemeinen den Vorzug**).

Man bemerke schliesslich, dass (s. Fig. 3.*b*) jederzeit $o_1M_1 > o'M_1$ und $o_2M_2 > o''M_2$ ist, und dass zwischen diesen zwei Paaren von Strecken die Beziehung besteht, dass die aus ihnen (als Hypoten. u. nicht homol. Kath.) gebildeten zwei rechtwinkligen Dreiecke ($g_1o'o_1$ und $o_2o''g_2$ in Fig. 3.*a*) ähnlich sind, oder dass die Beziehung besteht:

$$\frac{o'M_1^2}{o_1M_1^2} + \frac{o''M_2^2}{o_2M_2^2} = 1.$$

3. Bei der durch Fig. 3 illustrirten Operationsweise wurden Aufriss-

*) In Fig. 3.*a* ist eine solche Lage der Ebenen S' und S'', — desgleichen in Fig. 3.*b* die entsprechende Lage der Grundschnitte g_1 und g_2 (in Beziehung auf die Perspectivfigur) durch punktirte Linien angedeutet. Die in der (ausgeführten) Fig. 3 gewählten Entfernungen würden sich für eine genaue Construction in Praxi als ungeeignet erweisen. Bei dieser, wie überhaupt bei sämmtlichen Figuren, war nicht sowohl die Rücksicht auf die zeichnerische Praxis, als vielmehr die Rücksicht auf die schematische Klarheit der Figur für die Anordnung massgebend.

**) Als auf einen interessanten Specialfall sei noch auf die Annahme der Aufriss- und Seitenriss-Ebene durch den Augpunkt O hingewiesen.

und Seitenriss-Ebene nach aussen gedreht, so dass sie nun in umgeklappter Lage ihre Rückseiten nach oben kehren. (Hätte man die Drehungen nach innen ausgeführt, so würde man zwar die zwei Risse an sich in richtiger Lage erhalten haben, sie würden aber auf den von der Perspectiv-Figur beanspruchten Raum des Zeichenblattes gefallen sein, oder es würden, wenn man dies durch andere Wahl der Aufriss- und Seitenriss-Ebene zu vermeiden gesucht hätte, die zwei Grundschnitte in all zu weite Entfernung gerückt sein.) Es sind also die betreffenden Constructionen nicht mit den eigentlichen Aufriss- und Seitenriss-Figuren, sondern mit deren Rückseiten oder Spiegelbildern auszuführen.

Es hat dies zunächst nichts auf sich für den Fall, dass das gegebene Object, wie in Fig. 3 (und überhaupt nicht selten bei Architektur-Objecten), symmetrisch gestaltet ist, oder — auch wenn dies nicht zutrifft — für den Fall, dass Aufriss und Seitenriss speciell zum Zweck der Herstellung der Perspective erst auf das Zeichenblatt aufgezeichnet werden müssen, bezw. dass hiezu eine Pause auf Pauspapier verwendet wird. — Sollen indessen die fertig vorliegenden Risse unmittelbar verwendet werden, so kann dem in Rede stehenden Uebelstand leicht durch eines der folgenden Mittel begegnet werden:

Es ist zunächst einleuchtend, dass die ganze Construction auch auf verschiedenen Zeichenblättern ausgeführt werden kann. Es wird dies sogar recht häufig praktisch werden, sei es dass nur ein Zeichenbrett von beschränkter Grösse zur Verfügung steht, sei es dass die zwei Blätter mit den Rissen auf zwei besonderen Zeichenbrettern fest aufgespannt sind. Man wird in solchem Falle auf jedem dieser zwei Blätter das betreffende Strahlenbüschel o', bezw. o'' aufzeichnen und dessen Schnitt-Punktreihe mit dem Grundschnitt g_1, bezw. g_2 markiren, hierauf die zwei Punktreihen g_1 und g_2 auf das perspectivische Zeichenblatt übertragen und das Strahlenbüschel o_1, bezw. o_2 zeichnen. — Das Uebertragen der Punktreihen g_1 und g_2 geschieht am einfachsten dadurch, dass man auf den Blättern mit den Rissen über dem betreffenden Grundschnitt einen *Papierstreifen* aufheftet, auf diesem die Punktreihe g markirt, hierauf den Papierstreifen wegnimmt und auf das perspectivische Zeichenblatt über dem betreffenden Grundschnitt in richtiger Lage aufheftet. — Es ist einleuchtend, dass bei diesem Verfahren der oben genannte Uebelstand ganz in Wegfall kommt: Man denkt sich die zwei Risse in solcher Lage, wie sie der Umklappung

nach innen entspricht, und führt dieser Lage entsprechend auf jedem Blatt die betreffende Construction aus.

Freilich hat man beim Operiren auf drei getrennten Blättern besondere Vorsicht aufzuwenden, um sich bezüglich der zusammengehörigen Punkte der zwei Punktreihen g_1 und g_2 nicht zu verwirren. Eine zweckmässige Bezeichnung der Punkte der zwei Punktreihen (z. B. durch schematisches Einskizziren der betreffenden Riss-Details) ist hiezu unerlässlich. — Indessen weisen die praktischen Bedürfnisse des Technikers ganz von selbst auf ein solches getrenntes Construiren hin, und dürfte daher die Methode gerade in der letztbesprochenen Anordnung von besonderer praktischer Bedeutung sein.

Soll übrigens die Construction doch auf einem einzigen Zeichenblatt ausgeführt und sollen zu diesem Zwecke die zwei gegebenen Risse direct aufgeheftet werden, so kann dem in Rede stehenden Uebelstand auch durch eine einfache Modification der Fig. 3. *b* begegnet werden: Man schlägt nämlich (s. Fig. 6. *b*) die ganze Aufriss-Figur sammt dem zugehörigen Strahlenbüschel o' durch Drehung um die Horizontlinie um, so dass sie die vorherige Unterseite nach oben kehrt, und verschiebt sie hierauf entlang der Horizontlinie so, dass die neue Lage (o') des Punktes o' mit der alten Lage symmetrisch zum zugehörigen Grundschnitt g_1 liegt. Das Strahlenbüschel (o') schneidet dann den Grundschnitt g_1 nach der nämlichen Punktreihe wie das Büschel o'. — In gleicher Weise verfährt man auch mit dem Seitenriss nebst zugehörigem Strahlenbüschel o''. — Man erkennt leicht, dass die in solcher Weise *modificirte Ausführungsfigur* auch gedeutet werden kann als entstanden durch directe Umklappung der Aufriss- und Seitenriss-Ebene bei einer Anordnung, wie sie die (im halben Massstab der Fig. 6. *b* gezeichnete) *Vorbereitungsfigur* Fig. 6. *a* zeigt.

4. Als wesentliche Annehmlichkeit unserer Methode mag schliesslich hervorgehoben werden, dass ein beschränkter Raum der disponibeln Zeichenfläche keine erheblichen Schwierigkeiten oder Umständlichkeiten für die Construction mit sich bringt. In welcher Weise die Constructionen auf verschiedenen Blättern ausgeführt werden können, wurde schon oben besprochen. Es erübrigt noch, darauf hinzuweisen, dass hiebei auch das Hinausfallen eines oder beider Fluchtpunkte o_1, o_2 über das Perspectiv-Blatt keine besonderen Schwierigkeiten bereitet, insofern die Punkte, von denen Linien nach einem unzugänglichen Fluchtpunkt gezogen werden müssen,

alle auf der nämlichen Geraden liegen, so dass man sich durch Benutzung einer proportional getheilten Parallellinie leicht helfen kann. Sollte z. B. der Fluchtpunkt o_2 (Fig. 3. *b*) über das Blatt hinausfallen, so kann man (s. Fig. 7) in der Seitenriss-Figur parallel mit g_2 und in doppeltem (oder n-fachem, bezw. $\frac{1}{n}$-fachem) Abstand von o'' eine Hilfslinie l_2 ziehen, deren Schnittpunkte mit dem Strahlenbüschel o'' markiren und die entstandene Punktreihe (mittelst Papierstreifens) auf das Perspectivblatt in die Lage λ_2 übertragen, wo λ_2 von o_2 einen doppelt (oder n-fach, bezw. $\frac{1}{n}$-fach) so grossen Abstand hat wie g_2. Durch Verbinden der homologen Punkte von g_2 und λ_2 erhält man dann das Strahlenbüschel o_2.

§ 6.

Beispiel II. Centralperspective aus geometr. Grundriss und Aufriss.

Die ***Bild-Ebene*** S und ***Aufriss-Ebene*** S' mit Grundschnitt g_1, sowie der Augpunkt O seien dieselben wie bei Beispiel I. Daher mag als *Vorbereitungsfigur* die nämliche Figur (Fig. 3. *a*) benutzt werden wie dort. (In derselben sind die nur für Beispiel II bedeutsamen Buchstaben in Klammern eingeschlossen.) Statt des Seitenrisses sei aber jetzt der Grundriss gegeben, wobei die ***Grundriss-Ebene*** S^0 in grösserer Tiefe angenommen werde („*Keller-Grundriss*"); sie schneide die Bild-Ebene S nach dem Grundschnitt g_0. — Die Kernpunkte o_1 und o' sind die nämlichen wie bei Beispiel I. Um die zwei anderen, dem Grundschnitt g_0 zugehörigen Kernpunkte o_0 und o^0 zu erhalten, hat man — da das Projectionscentrum O_0 für den Grundriss im Unendlichen in der Richtung der Verticalen liegt — in dieser Richtung durch O einen Strahl zu ziehen. Derselbe schneidet die Bild-Ebene im Unendlichen; der Kernpunkt o_0 fällt also ins Unendliche in verticaler Richtung. Der Kernpunkt o^0 fällt in die Grundriss-Projection des Augpunktes O.

Klappt man nun die Aufriss- und die Grundriss-Ebene in die Bild-Ebene um, indem man sie um die Grundschnitte g_1 und g_0 dreht, und zwar die Aufriss-Ebene in der durch den Pfeil angedeuteten Richtung, die Grundriss-Ebene so, dass bei der Drehung der Punkt o^0 sich abwärts, die Grundriss-Figur sich aufwärts bewegt: so erhält man die in Fig. 3. *b**) ersichtliche Lage. Fig. 3. *b* zeigt dann ferner das von o^0 nach den Punkten x^0 des Grundrisses

*) Man fasse von derselben nur die mittlere und rechte Partie ins Auge.

gehende Strahlenbüschel, während das Strahlenbüschel o_0 zum verticalen Parallelstrahlenbüschel wird. Die Strahlenbüschel o' und o_1 sind die nämlichen wie bei Beispiel I. Durch den Schnitt der zugeordneten Strahlen des Büschels o_1 und des Parallelbüschels o_0 erhält man die Punkte x der Bild-Figur. — (Dabei wird man immerhin auch den anderen Fluchtpunkt o_2 markiren, um sich das Ziehen der nach ihm fliehenden Linien zu erleichtern.)

Man bemerke, dass die Annahme der Grundriss-Ebene in grösserer Tiefe den Zweck hatte, ein Zusammenfallen der gedrehten Grundriss-Figur mit der Bild-Figur zu vermeiden. — Man bemerke ferner an Fig. 3. *b*, wie die *Vorbereitungsfigur* (Fig. 3. *a*) leicht der *Ausführungsfigur* einverleibt werden kann.

Es versteht sich endlich von selbst, dass das, was in § 5 mit Beziehung auf Beispiel I — über die Wahl der Aufriss-Ebene, über das Umklappen derselben nach aussen oder innen, über die Ausführung der Construction auf getrennten Blättern (mit Uebertragung der Punktreihen durch Papierstreifen), über das Verfahren beim Hinausfallen eines Fluchtpunktes über das Zeichenblatt — gesagt wurde, auch auf Beispiel II seine volle und unerlässliche Anwendung findet.

§ 7.

Bemerkungen zu der combinirten Aufgabe I und II.

Es kommt in Praxi überaus häufig vor, dass zur Ausführung einer Perspective alle drei Projectionen: Grundriss, Aufriss und Seitenriss zur Verfügung stehen. Man wird in diesem Falle in der That alle drei Projectionen verwerthen, indem man die Anordnung in der durch die combinirte Fig. 3. *b* veranschaulichten Weise trifft, bezw. einzeln in den drei gegebenen Rissen die drei Strahlenbüschel o^0, o', o'' zeichnet und die drei hierdurch gewonnenen Punktreihen g_0, g_1, g_2 (mittelst Papierstreifen) auf das Zeichenblatt in die durch Fig. 3. *b* veranschaulichte Lage überträgt. Man zeichnet dann sämmtliche architektonischen Linien in der Breitenrichtung vom Seitenriss aus, diejenigen in der Tiefenrichtung vom Aufriss aus, diejenigen in der Höhenrichtung vom Grundriss aus. — Das Charakteristische der Methode liegt eben darin, dass sie sämmtliche in den drei Hauptrichtungen laufenden Linien unmittelbar liefert und dass bei derselben überhaupt keine anderen Hilfslinien zur Verwendung kommen als eben

diese, so dass man die Perspective erhält mit der denkbar geringsten Zahl bedeutungsloser Constructionslinien. Dabei sei nochmals an die Bedeutung der verschiedenen von den Constructionslinien gebildeten Strahlenbüschel als Abbildungen der projicirenden Strahlenbündel erinnert.

Dieser Bedeutung zufolge stellt z. B. das Büschel o^0 die Grundriss-Projection des Sehstrahlen-Bündels vor. Die Construction der Perspective der verticalen Linien (vom Grundriss aus) erweist sich hiernach als identisch mit der von der sogen. *Durchschnittsmethode* gelehrten. Letztere trägt den Stempel der *Géométrie descriptive* von *Monge*. Die Construction tritt aber hier als ein einfacher Specialfall unserer allgemeinen Construction auf, dadurch bedingt, dass das Strahlenbüschel o_0 zum Parallelstrahlenbüschel wird. Es dürfte hierin u. a. ein Beleg für meine Auffassung zu erblicken sein, dass durch unsere Theorie die *Géométrie descriptive* im Sinne von *Monge* eine Fortbildung erfahren möchte *).

Es versteht sich übrigens von selbst, dass man die Methode nicht mit schablonenhafter Einseitigkeit zur Anwendung bringen, sondern von den übrigen gebräuchlichen Constructionsmethoden der Perspective am gegebenen Orte Nutzen ziehen wird. — Z. B. wird man sich auch bei Anwendung der neuen Methode die Benutzung der *Theilungspunkte* zum Abtragen von Massen oder die Hilfe des *Diagonalpunktes* bei Gehrungsprofilen u. s. w. nicht versagen.

Ueberhaupt mag ausdrücklich hervorgehoben werden, dass — wenn auch der Techniker sich künftig gerne der neuen Methode bedienen wird — man sich doch nicht der Illusion hingeben darf, als könne dieselbe die alte Theorie geradezu ersetzen. Man darf vor allem nicht vergessen, dass die neue Theorie voraussetzt, es seien zwei Projectionen des Objectes gegeben, — eine Forderung, welche dem Wesen der *freien* Perspective widerspricht. Es kann daher unsere „*technische*“ Perspective den Bedürfnissen des künstlerischen perspectivischen Zeichnens nicht Genüge leisten, wiewohl sich leicht eine Brücke von ihr zur *freien* Perspective schlagen lässt. — Man wird sich auch unschwer überzeugen, dass nur derjenige

*) Dieselbe kann als ein Versuch aufgefasst werden, die Lücke auszufüllen, die Herr *De la Gournerie* constatirt mit den Worten: „Le trait de perspective ... a été un peu négligé par les disciples de *Monge*. Cet illustre géomètre ... voulut que tous les arts graphiques ne fussent que des applications de la Géom. descr. On peut certainement tracer des perspectives par les procédés généraux de la Géom. descr., mais cette méthode a des inconvénients sérieux. Quant aux constructions ordinaires de la Perspective ... il est réellement impossible d'y voir une application de la Géom. descr. *(De la Gournerie, Traité de Perspective linéaire,* Paris 1859, *Avant-Propos.)*

sich der neuen Methode mit Vortheil bedienen wird, der mit den Gesetzen der perspectivischen Formgestaltung bereits vollkommen vertraut ist.

§ 8.

Beispiel III. Geometrischer Aufriss aus zwei Perspectiven. (Photogrammetrische Architektur-Aufnahme.)

Gegeben seien zwei Central-Projectionen eines (architektonischen) Objectes, gesucht: dessen Aufriss-Projection.

Die Bestimmung der Grundschnitte und Kernpunkte geschieht wieder in einer — als Grundriss-Projection aufzufassenden — *Vorbereitungsfigur* (Tafel II, Fig. 8. *a*). In derselben stellen sich die drei verticalen Projectionsebenen *(Aufriss-Ebene S, Perspectiv-Ebene S', Perspectiv-Ebene S'')* als gerade Linien, die drei verticalen Grundschnitte g_1, g_2, g_{12} als Punkte dar. Die Projectionscentren für die zwei gegebenen Perspectiven seien O_1 und O_2. Das Projectionscentrum O für den gesuchten Aufriss fällt ins Unendliche, und zwar in der Richtung senkrecht zur Aufriss-Ebene S. Zieht man daher in dieser Richtung durch O_1 und O_2 Strahlen und zieht ferner O_1O_2, so schneiden diese drei Linien die betreffenden Projections-Ebenen in den sechs Kernpunkten o' und o_1, o'' und o_2, o_2' und o_1'', deren Grundriss-Projectionen in Fig. 8. *a* durch die gleichlautenden Buchstaben bezeichnet sind. o' und o_1 liegen in gleicher Höhe mit O_1; o'' und o_2 in gleicher Höhe mit O_2. Sind diese zwei Höhen verschieden, so ergeben sich die Höhen von o_2' und o_1'' aus einer einfachen Aufriss-Projection (Fig. 8. *aa*), in welcher die Projectionen der einzelnen Punkte durch die entsprechenden deutschen Buchstaben bezeichnet sind. — Man erkennt, dass o' und o'' in correspondirende Haupt-Fluchtpunkte der zwei gegebenen Perspectiven fallen. — Betreffs der zweckmässigen Wahl der Aufriss-Ebene im Interesse einer günstigen Lage der Kernpunkte gilt das Nämliche, was bei Beispiel I (s. § 5, No. 2) gesagt wurde. In Fig. 8 ist die Wahl so getroffen, dass die Kernpunkte o_1 und o_2 innerhalb der Grundschnitte g_1 und g_2 fallen.

Schneidet man hierauf längs des Grundschnittes g_{12} auf und klappt die zwei Perspectiv-Ebenen durch Drehung um g_1 und g_2 in die Aufriss-Ebene um, so erhält man die in der *Ausführungsfigur* (Fig. 8. *b*) ersichtliche Anordnung und kann nun sofort mit der Construction des Aufrisses beginnen, welche — durch Fig. 8. *b* veranschaulicht — keiner weiteren Erläuterung bedarf.

Für ein auf den *Hauptaxen* gelegenes Punktepaar x', x'' wird die Construction unbestimmt, in nächster Nähe derselben — ungenau. Man hilft sich

hier ganz in derselben Weise wie bei Beispiel I (s. § 5, No. 1). Man zieht nämlich (s. Fig. 8.*b*) durch x' und x'' zwei Verticalen, wählt auf diesen (oberhalb oder unterhalb) ein Paar zugeordneter Hilfspunkte y', y'', bestimmt den dritten zugeordneten Punkt y und zieht durch y eine Verticale: so liegt auf dieser der gesuchte Punkt x. Bei architektonischen Objecten bieten sich solche Hilfspunkte y', y'' sehr häufig von selbst dar. Sollte dies nicht der Fall sein, so geschieht ihre Bestimmung mittelst der Kernpunkte o_2' und o_1'', wie dies Fig. 8.*b* näher veranschaulicht.

Enthalten die zwei gegebenen Perspectiven Curven, so hat man auf denselben zuvor eine Reihe von zugeordneten Punktepaaren x', x'' zu markiren, was wieder mittelst der Kernpunkte o_2' und o_1'' auf die schon in § 3 (S. 12) näher besprochene Weise geschieht.

Es ist nicht schwer, zu erkennen, wie sich Fig. 8 modificirt, wenn eine der zwei gegebenen Perspectiven oder wenn beide — Frontansichten sind, was bei photogrammetrischen Aufnahmen von Façaden ganz besondere Vortheile gewährt. Die eintretenden Modificationen sind ganz ähnliche, wie sie bei Beispiel I im Falle der Frontansicht statt hatten. Es mag daher genügen, behufs Anleitung auf die betr. Erörterungen in § 4 zu verweisen.

§ 9.

Beispiel IV. Geometrischer Grundriss aus zwei Perspectiven. (Photogrammetrische Terrain-Aufnahme.)

Gegeben seien zwei Central-Projectionen, gesucht: die Grundriss-Projection.

In der als Grundriss-Projection aufzufassenden *Vorbereitungsfigur* (Fig. 9.*a*) seien O_1 und O_2 die zwei gegebenen Augpunkte, g_1 und g_2 die Grundschnitte zwischen der *Grundriss-Ebene* S und den zwei *Perspectiv-Ebenen* S' und S''. Der Grundschnitt g_{12} zwischen den zwei letzteren stellt sich als Punkt dar. Das Projectionscentrum O für die gesuchte Grundriss-Projection liegt im Unendlichen in der Richtung der Verticalen. Denkt man sich daher durch O_1 und O_2 Strahlen in dieser Richtung gezogen, so fallen deren Schnittpunkte mit der Grundriss-Ebene in die Grundriss-Projectionen von O_1 und O_2, während die Schnittpunkte mit den zwei Perspectiv-Ebenen ins Unendliche fallen. Es kommen also die zwei Kernpunkte o_1 und o_2 in die Grundriss-Projectionen von O_1 und O_2 zu liegen, während die Kernpunkte o' und o'' im Unendlichen in verticaler Richtung liegen. Die dem Grundschnitt g_{12} zugehörigen Kernpunkte o_2' und o_1'' be-

stimmen sich in der Grundriss-Projection unmittelbar als Schnittpunkte von O_1O_2 mit g_1 und g_2; ihre Höhen ergeben sich aus einer Aufriss-Projection in derselben Weise wie bei Beispiel III.

Fig. 9. *b* zeigt hierauf die umgeklappte Lage der Perspectiv-Ebenen mit der Construction des Grundrisses: zunächst die verticalen (d. h. zu g_1 und g_2 senkrechten) Parallelstrahlen durch je zwei zugeordnete Bildpunkte x' und x'', — die Strahlenbüschel o' und o'' repräsentirend; sodann die Strahlenbüschel o_1 und o_2, durch deren Schnitt der Grundriss entsteht.

§ 10.

Bemerkungen über photogrammetrische Praxis.

Es ist zunächst darauf aufmerksam zu machen, dass auch bei den Beispielen III und IV (wie früher bei I und II) die durch Fig. 8 und 9 illustrirten Anordnungen so getroffen sind, dass die zwei gegebenen Perspectiv-Figuren in umgeklappter Lage ihre Rückseiten nach oben kehren, so dass die besprochenen Constructionen eigentlich mit den Rückseiten oder Spiegelbildern der gegebenen Perspectiven auszuführen wären.

Nehmen wir zuerst an, es lägen wirklich die directen perspectivischen Abbildungen gegeben vor, so ist hinsichtlich der Aufgabe III genau das Nämliche zu sagen, was in § 5, No. 3 anlässlich der Aufgabe I über den analogen Umstand gesagt wurde, und es können die dort besprochenen Auskunftsmittel in ganz derselben Weise auch hier zur Anwendung gebracht werden. — Was sodann Aufgabe IV anlangt, so kann bei dieser sehr einfach dadurch geholfen werden, dass man für die Vorbereitungsfigur die Grundriss-Ebene oberhalb des räumlichen Objectes annimmt (*„Luft-Grundriss“*), so dass also die zwei Perspectiv-Ebenen von den Grundschnitten g_1 und g_2 vertical herabhängend zu denken sind und dann um g_1 und g_2 nach aussen aufwärts gedreht werden.

Indessen ist daran zu erinnern, dass man bei photogrammetrischen Constructionen im Interesse der Genauigkeit wo möglich nicht mit den Positiv-Abdrücken, sondern unmittelbar mit den Original-Negativplatten operiren wird. Diese geben aber nicht die directen perspectivischen Abbildungen, sondern deren Spiegelbilder. Es werden daher die durch die Figuren 8 und 9 illustrirten Anordnungen bei photogrammetrischen Constructionen in der That die vorzugsweise zur Anwendung gelangenden sein.

Es bedarf weiter der folgende Punkt einer eingehenderen Erörterung:

Es wurde bei beiden Beispielen stillschweigend vorausgesetzt, die zur Construction der Vorbereitungsfiguren (Fig. 8. *a* und 9. *a*) erforderlichen Daten (Winkel der Perspectiv-Ebenen und Lage der zugehörigen Augpunkte) seien unmittelbar gegeben. — Wenn es nun auch bei photogrammetrischen Aufnahmen im Interesse erhöhter Sicherheit nicht selten geschehen mag, dass diese Daten durch directe Messung erhalten werden, so ist dies doch nicht unumgänglich nothwendig und auch nicht immer praktisch ausführbar. Es handelt sich daher darum: 1) zu ermitteln, wieviel von directer Messung im äussersten Falle erforderlich ist, 2) wie die Constructionen sich gestalten bei Beschränkung auf dieses geringste Quantum von directer Messung.

Es ist in dieser Beziehung zunächst daran zu erinnern, dass bei den photographischen Bildern, welche mittelst eines für photogrammetrische Zwecke eingerichteten Apparates*) aufgenommen werden, der ***Hauptpunkt*** H und die ***Augdistanz*** δ direct gegeben sind. Es kommt nämlich die ***Horizontlinie*** und die ***Hauptverticale*** auf dem Bilde unmittelbar zur Erscheinung, sei es durch feine Fäden, die — dicht vor der empfindlichen Fläche ausgespannt — sich auf dieser mit abbilden, sei es durch blosse Marken am Rande, die sich mit abbilden, und deren Verbindungslinien dann den Horizont, die Hauptverticale und (als deren Schnittpunkt) den Hauptpunkt H bestimmen. — Die Augdistanz ferner wird repräsentirt durch die Entfernung des optischen Mittelpunktes der Linse von der empfindlichen Fläche. Denn ist (Fig. 11) O der optische Mittelpunkt, Σ die empfindliche Fläche, AB das Object, so ist das von der Linse auf der Innenseite von Σ entworfene Bild $\alpha\beta$ symmetrisch gestaltet mit einem perspectivischen Bilde ab, für welches O der Augpunkt ist und dessen Bildfläche S mit Σ parallel ist und gleichen Abstand von O hat. Diese letztere Bildfläche S ist es, welche man sich jedesmal vorzustellen hat, wenn in den Beispielen III und IV, sowie im Folgenden von „Perspectiv-Ebene“ gesprochen ist. — Die zu photogrammetrischen Zwecken verwendeten ***Weitwinkel-Linsen (Pantoskop*** oder ***Periskop)*** haben nun eine sehr geringe Brennweite und geben demzufolge ein scharfes Bild innerhalb eines so grossen Spielraums für den Object-Abstand, dass die Entfernung der Linse von der empfindlichen Fläche constant ge-

*) Wir setzen vorerst stets die Benutzung eines solchen voraus. Das Verfahren mit Benutzung einer gewöhnlichen photogr. Camera wird im II. Artikel berührt werden.

macht werden kann. Die Augdistanz δ ist demgemäss eine durch das Instrument ein für allemal gegebene constante Grösse.

Des Weiteren beachte man, dass von den zwei Kernpunkten o_2' und o_1'' jeder die Abbildung des gegnerischen Projectionscentrums vorstellt, und dass es bei dem grossen zulässigen Bildwinkel des Apparates leicht erreicht werden kann, bei jeder der beiden Aufnahmen den (durch Signal markirten) gegnerischen Standort noch auf das Bild zu bekommen; so dass also die zwei Kernpunkte o_2' und o_1'' ebenfalls als gegebene Punkte gelten können.

Dies vorausgesetzt — ist es nun leicht, zu erkennen, was ausserdem zur Construction der Vorbereitungsfiguren erforderlich ist. Es möge in dieser Richtung Beispiel IV (Fig. 9. *a*) als der einfachere Fall zuerst besprochen werden.

Fällt man in Fig. 9. *a*: $O_1H' \perp S'$ und $O_2H'' \perp S''$, so stellen H' und H'' die Grundriss-Projectionen der ***Hauptpunkte*** der gegebenen zwei Perspectiven vor, und es ist: $O_1H' = O_2H'' =$ der als Constanten des Apparates gegebenen Augdistanz δ. Da ferner auf den zwei gegebenen Perspectiven die Punkte H' und o_2', H'' und o_1'' direct gegeben vorliegen, so können die horizontalen Abstände*) dieser Punkte unmittelbar von dort entnommen werden. In Fig. 9. *a* stellen aber die Strecken $H'o_2'$ und $H''o_1''$ eben diese horizontalen Abstände vor. Es sind somit in den zwei rechtw. Dreiecken $O_1H'o_2'$ und $O_2H''o_1''$ die Katheten gegeben, also die Dreiecke ihrer Gestalt nach bestimmt. Ihre Hypotenusen fallen in die nämliche gerade Linie. Es könnte daher die Figur construirt werden, sobald die Länge der „***Standlinie***“ O_1O_2 (d. i. des horizontalen Abstandes der Augpunkte**) bekannt wäre.

Nun ist aber daran zu erinnern, dass die Figur nicht in wahrer natürlicher Grösse, sondern in irgend welchem verjüngten Massstabe gezeichnet werden muss, und dass man dann den verlangten Grundriss in dem nämlichen Verjüngungsverhältniss erhält, in welchem die Standlinie O_1O_2 aufgetragen wird. Wählt man daher die Länge von O_1O_2 in Fig. 9. *a* ganz beliebig, so erhält man den Grundriss in richtiger Gestalt, nur die absoluten Dimensionen bleiben unbestimmt. — Es ist übrigens dabei zu beachten, dass

*) Man erinnere sich, dass die beiden Augpunkte O_1 und O_2 in verschiedenen Höhen liegend vorausgesetzt sind, was zur Folge hat, dass auch H' und o_2', H'' und o_1'' verschieden hoch liegen.

**) Man beachte wohl, dass hier und in der ganzen folgenden Erörterung O_1 und O_2 stets nicht die Augpunkte selbst, sondern mit Bezug auf Fig. 9. *a* und 8. *a* deren Grundriss-Projectionen bedeuten.

bei einer Verjüngung der Standlinie sich nicht die gesammte Vorbereitungsfigur in übereinstimmendem Verhältniss verjüngt, sondern dass die Dimensionen der zwei gegebenen Perspectiven, — also auch die zwei Dreiecke $O_1H'o_2'$ und $O_2H''o_1''$ constant bleiben. Es wird dies noch näher durch Fig. 10. *a* illustrirt, welche eine Wiederholung der Fig. 9. *a*, jedoch mit zwei verschiedenen Annahmen der Standlinie: O_1O_2 und Ω_1O_2 vorstellt. Die der kürzeren Standlinie Ω_1O_2 entsprechenden Punkte sind mit griechischen Buchstaben bezeichnet. — (Dazu sei noch bemerkt, dass — wie Fig. 10. *b* zeigt, — in der *Ausführungsfigur* die zwei perspectivischen Strahlenbüschel o_2' und o_1'' von je zwei Linien γ_{12}, welche mit g_{12} parallel sind und die Abstände der zwei Punkte o_2' und o_1'' von g_{12} in dem nämlichen Verhältnisse theilen, nach congruenten Punktreihen geschnitten werden. Man erkennt nun aus Fig. 10. *a* leicht, dass bei der Wahl einer anderen Standlinie Ω_1O_2 stets zwei solche congruenten Punktreihen in dem entsprechenden Grundschnitt γ_{12} in Coincidenz sind).

Fassen wir das Resultat der ganzen Betrachtung kurz zusammen, so ergiebt sich für die Construction der *Vorbereitungsfigur* Folgendes: Man wählt die Länge der Linie O_1O_2 beliebig, legt an diese die zwei (aus den gegebenen Katheten construirten) rechtwinkligen Dreiecke $O_1H'o_2'$ und $O_2H''o_1''$ an und verlängert $H'o_2'$ und $H''o_1''$, bis sie sich schneiden in g_{12}. — Man erhält dann bei der nachfolgenden Grundriss-Construction den Grundriss in seiner richtigen Gestalt; nur die absoluten Masse bleiben unbestimmt. Sobald aber eine einzige Strecke des Grundrisses in wahrer natürlicher Grösse bekannt oder gemessen ist, ist damit das Verjüngungsverhältniss der Zeichnung bestimmt und sind damit sämmtliche absoluten Masse ermittelt. Es ist somit zur vollständigen Erledigung der Aufgabe eine einzige Abmessung am Object erforderlich.

Gehen wir weiter zur Construction der Vorbereitungsfigur bei Aufgabe III (Fig. 8. *a*), so erstreckt sich die vorstehende Betrachtung in allen Einzelheiten auch auf diese. Man wählt die Länge von O_1O_2 beliebig, construirt die durch ihre Katheten gegebenen zwei rechtwinkligen Dreiecke $O_1H'o_2'$ und $O_2H''o_1''$ und verlängert $H'o_2'$ und $H''o_1''$ bis zu ihrem Schnitt g_{12}. Weiter beachte man dann, dass die zwei Kernpunkte o' und o'' zwei entsprechende Haupt-Fluchtpunkte repräsentiren, welche in den zwei gegebenen Perspectiven durch Verlängerung der betreffenden Bildlinien direct ermittelt werden können. Es sind also die Abstände $H'o'$ und $H''o''$ in Fig. 8. *a*

bekannt. Bestimmt man hiernach die zwei Punkte o' und o'', zieht O_1o' und O_2o'', welche parallel sein müssen, und zieht eine Senkrechte S zu diesen Linien in geeignetem Abstande von o' und o'': so ist die Figur fertig. (Die Parallelität von O_1o' und O_2o'' dient als Genauigkeitscontrole oder kann dazu verwendet werden, die Benutzung eines der zwei Punkte o_2' und o_1'' für die Construction zu umgehen, falls es bei einer der zwei Aufnahmen Schwierigkeiten bereiten sollte, die Abbildung des gegnerischen Standorts noch auf das Bild zu bringen.) — Die Uebertragung der verschiedenen Punkte in die *Ausführungsfigur* (Fig. 8. *b*) macht keine Schwierigkeit: die horizontalen Abstände werden direct aus der *Vorbereitungsfigur* entnommen; die Punkte o', o_2', H', bezw. o'', o_1'', H'' liegen in den zwei Perspectiven gegeben vor; o_1 liegt mit o' und H', — o_2 liegt mit o'' und H'' in gleicher Höhe. Man beachte ausserdem, dass sich die drei Verbindungslinien der Kernpunkte auf den drei Grundschnitten schneiden müssen.

§ 11.

Weitere Bemerkungen zu den Beispielen III und IV.

Auch bei den photogrammetrischen Beispielen ist es von grösster Wichtigkeit, zum Behuf der richtigen Deutung der Constructionslinien sich stets den Satz gegenwärtig zu halten, dass die verschiedenen Kernpunkte und die in ihnen liegenden Strahlenbüschel die Abbildungen der verschiedenen Projectionscentren und ihrer projicirenden Strahlenbündel vorstellen. Betrachtet man unter diesem Gesichtspunkt die Fig. 9. *b*, so geben sich die zwei Punkte o_1 und o_2 als die Grundriss-Projectionen der zwei Augpunkte — und die zwei Strahlenbüschel o_1 und o_2 als die Grundriss-Projectionen der von diesen Augpunkten ausgehenden Sehstrahlen-Bündel zu erkennen. Jeder Punkt x bestimmt sich also als Durchschnittspunkt der zwei nach ihm gehenden *„Visirlinien“*, ganz in derselben Weise, wie dies bei der Methode des *Vorwärts-Einschneidens* der Fall ist. Die von *Beautemps-Beaupré* (1835) angegebene Grundriss-Construction geht in der That von dem Princip des *Vorwärts-Einschneidens* aus und kommt im Wesentlichen auf die in Fig. 9. *b* enthaltene Construction hinaus.

Genau ebenso stellen aber auch bei Beispiel III in Fig. 8. *b* die zwei Kernpunkte o_1 und o_2 und die in ihnen liegenden Strahlenbüschel die Aufriss-Projectionen der zwei Augpunkte und der von ihnen ausgehenden

Sehstrahlen-Bündel vor, so dass man auch hier von einem „Vorwärts-Einschneiden in Beziehung auf die Aufriss-Ebene“ sprechen könnte.

Würde man bei der photogrammetrischen Aufnahme einer Façade die Camera beidemal so stellen, dass ihre optische Axe parallel zur Façade, also die empfindliche Fläche senkrecht zur Façade wäre, (was bei dem grossen zulässigen Bildwinkel des Apparates wohl ausführbar ist): so würde sich die Fig. 8. *b* so modificiren, dass sie identisch würde mit 9. *b* (mit paralleler Lage von g_1 und g_2). — Es kann andererseits sehr leicht vorkommen, dass man topographische Aufnahmen von sehr hohen Standpunkten aus (Thürmen, Bergen etc.) mit geneigter Camera zu machen wünscht. Wählt man alsdann die zwei Stellungen der Camera so, dass ihre optischen Axen einer und derselben verticalen Ebene parallel sind, dass also die Schnittlinie ihrer empfindlichen Flächen horizontal sein würde: so erhält man zur Construction des Grundrisses eine Vorbereitungs- und Ausführungsfigur, welche identisch ist mit Fig. 8. *a* und *b*. — Fig. 12 zeigt die bezügliche Vorbereitungsfigur, welche als Aufriss-Projection (Aufriss-Ebene parallel den zwei optischen Axen) aufzufassen ist; ihre Uebereinstimmung mit Fig. 8. *a* liegt klar.

Es ist endlich noch darauf aufmerksam zu machen, dass man bei einem architektonischen Objecte sehr häufig mit einer einzigen Aufnahme ausreicht. Es rührt dies daher, dass in dem perspectivischen Bilde eines räumlichen Objectes häufig das Bild einer Grundriss- oder Aufriss-Projection desselben mit enthalten ist. Denkt man sich z. B. bei der Façade eines Gebäudes von den einzelnen Punkten der architektonischen Details Senkrechte auf die Haupt-Wandfläche gefällt, so kommen deren Fusspunkte bei der Mehrzahl der Punkte entweder am Gebäude direct zur Erscheinung, oder sie können doch leicht ermittelt werden. Denkt man sich nun die Wandfläche als Aufriss-Ebene, so stellt die Gesammtheit jener Fusspunkte die Aufriss-Projection vor. In gleicher Weise liegen auf der Boden-Ebene oder in einer besonders bedeutsamen horizontalen Ebene des Gebäudes die Grundriss-Projectionen der Mehrzahl der Punkte entweder direct gegeben vor, oder sie können doch leicht gefunden werden. — Bezeichnet man nun die „Projection einer Projection“ (z. B. Perspective eines Grundrisses) ebenfalls schlechtweg als „*Projection*“, so kann man sagen, es seien in der perspectivischen Projection eines architektonischen Objectes gleichzeitig noch weitere Projectionen enthalten. In diesem Sinne ist

die Thatsache, dass man bei einem solchen Objecte häufig mit einer einzigen perspectivischen Aufnahme ausreicht, kein Widerspruch gegen den allgemeinen Satz, dass zur vollständigen Bestimmung des Objectes mindestens zwei Projectionen erforderlich sind. — Indessen folgt aus dem Gesagten, dass die Bestimmung aus einer Aufnahme nur dann eine vollständige sein kann, wenn von sämmtlichen Punkten die Abbildungen ihrer Grundriss- oder Aufriss-Projection bekannt sind oder ermittelt werden können.

Was die Ausführung der Construction anlangt für den Fall, dass nur eine Aufnahme zur Verfügung steht, so erkennt man zunächst aus Fig. 9. *b* leicht, inwiefern das eine Strahlenbüschel o_1 zur Ermittelung der Grundriss-Figur ausreicht: Fällt man nämlich von den zwei Haupt-Fluchtpunkten des persp. Bildes Senkrechte auf g_1 und zieht nach deren Fusspunkten Strahlen von o_1, so bestimmen diese (als *Parallelstrahlen*) die zwei Haupt-Richtungen (*Breiten-* und *Tiefenrichtung*). Nimmt man nun die vordere Ecke x des Grundrisses auf dem betreffenden Strahl willkürlich an, so können die übrigen Punkte ermittelt werden als Schnittpunkte von Strahlen aus o_1 mit Linien, die den Haupt-Richtungen parallel sind. Die willkürliche Wahl der vorderen Ecke influirt lediglich auf das Verjüngungsverhältniss der Figur. Man erkennt, dass die Sache auf die bekannten *Rückwärtsconstructionen* der Perspective hinausläuft*).

Genau das Nämliche gilt aber auch für Fig. 8. *b*. Auch hier ge-

*) Eben diese Grundriss-Construction wurde von Herrn *Meydenbauer* bei seinen photogrammetrischen Architektur-Aufnahmen benutzt, und wurde dann der Aufriss vom Grundriss aus durch Auftragen der Höhen hergestellt, wobei jede Höhe berechnet wurde als 4. Proportionale zur Länge der entsprechenden Visirlinie, zur scheinbaren Höhe (im persp. Bild) und zum zugehörigen Parallelstrahl (d. i. Stück der Visirlinie von o_1 bis zum Schnitt mit g_1). — Diese *perspectivischen Rückwärtsconstructionen* sind übrigens bekanntlich sehr alt. Der treffliche *Lambert* z. B. behandelt dieselben in seiner *Freien Perspective* (Zürich 1759) mit besonderer Ausführlichkeit, und ich kann mir nicht versagen, als Zeugniss dafür, dass schon dieser ausgezeichnete, (lange nicht genug beachtete) Gelehrte das Princip der Photogrammetrie vollkommen klar erfasst hat, die folgenden Worte aus dem betreffenden (8.) Abschnitt zu citiren: „Man sieht leichte, dass die hier vorkommende Aufgabe (aus der Perspective den Grundriss wieder herzustellen) mit derjenigen aus der Geometrie eine vollkommene Aehnlichkeit hat, wo man von der Höhe eines Hauses, Thurmes oder Berges herunter, gleichsam als aus einer Station die umliegende Horizontalfläche in Grund legen will, und zu dem Ende die Höhe des Ortes gebraucht, mit dem Quadranten die Vertiefungswinkel der Gegenstände unter dem Horizonte ausmisst, und die Abweichung derselben von der Mittagslinie auf einem Messtischgen oder durch die Winkel bestimmt.... So wird man die Lage jeder Punkten auf dem Grundrisse ebenso bestimmen können, als wenn derselbe nach den Regeln der Messkunst auf dem Felde wäre gemacht worden".

nügt ein einziges Strahlenbüschel, z. B. o_1, zur Ermittelung der Aufriss-Figur. Man kann wieder einen Eckpunkt willkürlich wählen und die übrigen Punkte als Schnittpunkte von Strahlen aus o_1 mit horizontalen und verticalen Linien bestimmen. Wenigstens geht dies bei allen denjenigen Punkten, für welche in der gegebenen Perspective die Bilder der auf die Wandfläche bezogenen Aufriss-Projectionen vorhanden sind oder (wie z. B. bei den Endpunkten der Firstlinie in Fig. 8. *b*) leicht gefunden werden können.

Indessen ist es keine Frage, dass in beiden Fällen (sowohl bei der Grundriss- als bei der Aufriss-Construction) die Benutzung beider Strahlenbüschel o_1 und o_2 eine unvergleichlich genauere Bestimmung der Punkte sichert, so dass man, sobald zwei photographische Aufnahmen zur Verfügung stehen, unter allen Umständen beide benutzen und nach Anleitung der Gesammtfiguren 8. *b* und 9. *b* construiren wird.

§ 12.

Beispiel V. Photogrammetrische Terrain-Aufnahme mit geneigter Camera.

Beschränkt man sich bei photogrammetrischen Aufnahmen auf eine verticale Stellung der Bildfläche, was bislang allgemein der Fall war, so versagt die Methode bei einer ganzen Classe von Aufgaben aus praktischen Gründen den Dienst. Und doch dürfte die Photogrammetrie gerade in diesen Fällen — es sei z. B. an Städte-Aufnahmen, ferner topographische Aufnahmen vom Luftballon aus, etc. erinnert — eine ihrer wichtigsten Anwendungen finden. — Auch wo die Aufgabe durch Aufnahmen mit verticaler Bildfläche wohl erledigt werden könnte, wird man doch sehr häufig einem erhöhten Standpunkt und einer geneigten Stellung der Bildfläche den Vorzug geben, da hiedurch eine breitere Entwickelung der Bodenfläche im Bilde und demzufolge eine grössere Genauigkeit der Construction ermöglicht wird.

Unsere Theorie erstreckt sich auf eine schiefe Stellung der Bildfläche in gleicher Weise wie auf eine verticale. Die Construction ist im ersteren Falle gleich einfach wie im letzteren. Nur die *Vorbereitungsfigur* wird ein weniges complicirter. Im Interesse der Vereinfachung kann man, wie bereits im vorigen Paragraphen erwähnt, die Anordnung so treffen, dass die optische Axe des Apparates bei beiden Aufnahmen einer und derselben verticalen Ebene parallel ist. Ist dies jedoch nicht ausführbar, so kommt das im Folgenden erörterte Verfahren zur Anwendung.

Sind O_1 und O_2 die beiden Augpunkte, o_1 und o_2 ihre Projectionen auf irgend eine horizontale Ebene *(Grundriss-Ebene)*, so bezeichnen wir wieder die Linie o_1o_2 als *Standlinie*, die Höhen o_1O_1 und o_2O_2 als *Standhöhen*. Ferner möge der Winkel, den bei einer Aufnahme die optische Axe des Apparates mit der Verticalen macht, der *Zenithwinkel* genannt und durch z bezeichnet werden; der Winkel, den die Horizontalprojection der optischen Axe mit der Standlinie macht, heisse der *Azimuthalwinkel* und werde durch α bezeichnet. Endlich werde der Winkel, den die Linie O_1O_2 mit der Verticalen macht, durch v bezeichnet.

Soll nun der Apparat zu Aufnahmen mit schiefgestellter Camera eingerichtet sein, so muss die Camera ausser um eine verticale Axe — auch um eine horizontale, zur empfindlichen Fläche parallele Axe drehbar sein und ist es zweckmässig, (in ähnlicher Weise wie beim *Theodolit*) durch Anbringung eines Horizontalkreises und eines Höhenkreises die Ablesung der beiderseitigen Drehungswinkel zu ermöglichen *). Angenommen, dies sei der Fall, so sind bei jeder Aufnahme die drei Winkel v, z und α zu messen: Man richtet zuerst die optische Axe nach dem — durch Signal markirten — gegnerischen Augpunkt, (d. h. man stellt die Camera so, dass das Bild des gegnerischen Augpunktes genau in den auf der matten Glastafel markirten *Hauptpunkt* fällt), und liest am Höhenkreis den Winkel v ab; hierauf bringt man die Camera in die für die Aufnahme geeignete Stellung und liest am Höhenkreis den Winkel z, am Horizontalkreis den Winkel α ab. Es versteht sich übrigens von selbst, dass die Bestimmung dieser Winkel auch mit Zuziehung eines Theodolits erhalten und dann zu den photographischen Aufnahmen ein gewöhnlicher Apparat benutzt werden kann. — Für die Herstellung der *Vorbereitungsfigur* sind also die den zwei Augpunkten O_1 und O_2 entsprechenden Winkel z_1 und α_1, z_2 und α_2, nebst Winkel v gegeben.

Die *Vorbereitungsfigur* (Fig. 13) wird in Grundriss- und Aufriss-Projection construirt, und zwar wird die Aufriss-Ebene am zweckmässigsten durch die zwei Augpunkte O_1 und O_2 selbst gelegt, so dass also die Schnittlinie von Grundriss- und Aufriss-Ebene mit der Standlinie o_1o_2 zusammenfällt. — Es seien nun AM_1M_{12} und AM_2M_{12} die Spuren der zwei Perspectiv-Ebenen S' und S''; die Ebene S wird durch die Grundriss-Ebene repräsentirt. Es stellt also AM_1 den Grundschnitt g_1, — AM_2 den Grundschnitt

*) Die von Herrn *Meydenbauer* angewendete *Bussole* dürfte sich weniger empfehlen.

g_2 vor; der dritte Grundschnitt g_{12} wird von der räumlichen Verbindungslinie der Punkte A und M_{12} gebildet.

Das Projectionscentrum O für den zu construirenden Grundriss liegt im Unendlichen in verticaler Richtung. Zieht man in dieser Richtung Strahlen durch O_1 und O_2 und zieht O_1O_2, so fällt die Ebene dieser drei Strahlen mit der Aufriss-Ebene zusammen und schneidet also das von den drei Ebenen S, S', S'' gebildete Dreikant nach dem *Hauptaxen-Dreieck* $M_1M_2M_{12}$, dessen Seiten von den drei Strahlen in den sechs Kernpunkten o' und o_1, o'' und o_2, o_2' und o_1'' geschnitten werden. Winkel $o'O_1O_2$ stellt den Winkel v vor.

Da ferner die durch O_1 gehende *optische Axe* senkrecht zur Ebene S' steht, so muss ihre Horizontalprojection senkrecht zur Horizontalspur von S' sein. Zieht man also $o_1U_1 \perp M_1A$, so stellt o_1U_1 die Projection der optischen Axe vor, und man hat in dem Winkel, den o_1U_1 mit o_1M_1 macht, den *Azimuthalwinkel* α_1. — Man denke sich nun die projicirende Ebene der optischen Axe durch Drehung um o_1U_1 in die Grundriss-Ebene umgeklappt; die umgeklappten Linien mögen als solche durch lange Striche charakterisirt und durch die entsprechenden deutschen Buchstaben bezeichnet werden. $o_1\mathfrak{D}_1$ sei die Umklappung der *Standhöhe*, $\mathfrak{o}'$ die Umklappung des Punktes o' auf ihr, $U_1\mathfrak{o}'$ die Umklappung der Schnittlinie der projicirenden Ebene mit Ebene S'. Die optische Axe steht auf dieser Schnittlinie senkrecht; fällt man also $\mathfrak{D}_1\mathfrak{H}' \perp U_1\mathfrak{o}'$, so stellt $\mathfrak{D}_1\mathfrak{H}'$ die Umklappung der optischen Axe — und $\mathfrak{H}'$ die Umklappung des *Hauptpunktes* vor; ferner hat man in der Länge von $\mathfrak{D}_1\mathfrak{H}'$ die *Augdistanz* δ und in Winkel $\mathfrak{o}'\mathfrak{D}_1\mathfrak{H}'$ den *Zenithwinkel* z_1. — Genau dasselbe ist auch für den anderen Augpunkt O_2 ausgeführt (o_2U_2 = Horizontalprojection der optischen Axe, $o_2\mathfrak{D}_2$ = Umklappung der Standhöhe, $\mathfrak{D}_2\mathfrak{H}''$ = Umklappung der Augdistanz δ, Winkel $U_2o_2M_2 = \alpha_2$, Winkel $\mathfrak{o}''\mathfrak{D}_2\mathfrak{H}'' = z_2$).

Es handelt sich nun darum, diese *Vorbereitungsfigur* zu construiren unter der Voraussetzung, dass die fünf Winkel v, z_1 und α_1, z_2 und α_2, sowie die Augdistanz δ gegeben seien. Dies geschieht in folgender Weise:

Die Länge von o_1o_2 influirt wieder lediglich auf den Verjüngungsmassstab, in welchem nachher der gesuchte Grundriss erhalten wird. Da es ferner gleichgiltig ist, in welcher Tiefe die Grundriss-Ebene angenommen wird, so kann die eine Standhöhe beliebig gewählt werden. Man mache also o_1o_2 und o_1O_1 beliebig, lege an o_1O_1 in O_1 den Winkel v an, wodurch

sich auf der in o_2 errichteten Verticalen Punkt O_2 bestimmt. Hierauf lege man an $o_1 o_2$ in o_1 und o_2 die Winkel α_1 und α_2 an, errichte auf dem freien Schenkel von α_1 die Senkrechte $o_1 \mathfrak{O}_1 = o_1 O_1$, lege an $o_1 \mathfrak{O}_1$ in $\mathfrak{O}_1$ den Winkel ε_1 an, schneide auf dessen freiem Schenkel $\mathfrak{O}_1 \mathfrak{H}' = \delta$ ab und errichte auf $\mathfrak{O}_1 \mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}'$ eine Senkrechte, welche $o_1 \mathfrak{O}_1$ in $\mathfrak{o}'$ — und den freien Schenkel von α_1 in U_1 schneide. Ganz ebenso verfahre man links bei Punkt o_2. — Man ziehe dann durch U_1 und U_2 Senkrechte zu $o_1 U_1$ und $o_2 U_2$, welche sich in A — und die Linie $o_1 o_2$ in M_1 und M_2 schneiden. Trägt man endlich auf $o_1 O_1$ und $o_2 O_2$ die Stücke $o_1 o' = o_1 \mathfrak{o}'$ und $o_2 o'' = o_2 \mathfrak{o}''$ ab und zieht $M_1 o'$ und $M_2 o''$, welche sich in M_{12} — und die Linie $O_1 O_2$ in o_2' und o_1'' schneiden: so ist die Vorbereitungsfigur vollendet.

Die *Ausführungsfigur* wird am zweckmässigsten mit der *Vorbereitungsfigur* direct verbunden. Man hat einfach die zwei Ebenen S' und S'' mit den in ihnen liegenden Hauptaxen, Kernpunkten und Hauptpunkten durch Drehung um AM_1 und AM_2 in die Grundriss-Ebene umzuklappen, wie dies aus Fig. 13 mit hinreichender Deutlichkeit ersichtlich ist. Man beachte dabei: Punktreihe $U_1 o' H' \leqq U_1 \mathfrak{o}' \mathfrak{H}'$, ferner: Punktreihe $M_1 o' o_2' M_{12}'$ (in der Ausführungsfigur) $\leqq M_1 o' o_2' M_{12}$ (in der Vorbereitungsfigur) etc.

Bringt man dann die zwei gegebenen Perspectiven in eine solche Lage, dass die auf ihnen markirten *Hauptpunkte* in die Punkte H' und H'' — und die *Horizontlinien* parallel zu AM_1 und AM_2 zu liegen kommen: so kann die Construction des Grundrisses sofort beginnen. Dieselbe erfolgt genau nach dem in § 3 erörterten allgemeinen Verfahren.

Berlin, Januar 1883.

(Fortsetzung folgt.)

Ueber einige Determinanten-Identitäten, welche in der Lehre von den perspectivischen Dreiecken vorkommen.

(Von Herrn *F. Caspary*.)

In einer früheren Arbeit*) habe ich mich mit der Umformung derjenigen Determinanten beschäftigt, welche in der Lehre von den Kegelschnitten vorkommen. Ich fasste dabei die Determinanten als äussere Producte im *Grassmann*schen Sinne auf, wodurch die Umformungen ausserordentlich vereinfacht wurden. Derselben Auffassung will ich mich hier bedienen, um einige mit den gewöhnlichen Hilfsmitteln nur schwer zu behandelnde Determinanten-Identitäten in leichter und übersichtlicher Weise zu entwickeln. Ihre geometrische Interpretation finden diese Determinanten-Identitäten, von denen eine Herr *Hunyady***) bereits gegeben hat, in bekannten Sätzen über perspectivische Dreiecke. Betreffs der Bezeichnungen und der bei den Umformungen gebrauchten Gesetze verweise ich auf die beiden ersten Paragraphen meiner oben erwähnten Arbeit, in denen alles zum Verständniss des Folgenden Nöthige enthalten ist.

§ 1.

Es werde gesetzt:

$$(1.)\quad \begin{cases} a = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3, & a' = a'_1e_1 + a'_2e_2 + a'_3a_3, \\ b = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3, & b' = b'_1e_1 + b'_2e_2 + b'_3e_3, \\ c = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3, & c' = c'_1e_1 + c'_2e_2 + c'_3e_3, \end{cases}$$

und es mögen die Grössen a_α, b_α, c_α; a'_α, b'_α, c'_α ($\alpha = 1, 2, 3$) die homogenen Coordinaten der Punkte a, b, c; a', b', c', und die Grössen e_1, e_2, e_3 die

*) Dieses Journal Bd. 92. S. 123 flgd.

**) Dieses Journal Bd. 89. S. 79 flgd.

*Grassmann*schen Einheiten bedeuten. Dann stellen die äusseren Producte

$$[aa'], \quad [bb'], \quad [cc']$$

die drei Geraden dar, welche resp. durch die Punkte

$$a \text{ und } a', \quad b \text{ und } b', \quad c \text{ und } c'$$

hindurchgehen. Sollen diese drei Geraden sich in einem Punkte schneiden, so ist die hierfür nothwendige und ausreichende Bedingung durch

$$[aa'\ bb'\ cc'] = 0$$

gegeben*). Bezeichnet man dieses äussere Product, oder was dasselbe ist, die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_2a_3' - a_3a_2' & a_3a_1' - a_1a_3' & a_1a_2' - a_2a_1' \\ b_2b_3' - b_3b_2' & b_3b_1' - b_1b_3' & b_1b_2' - b_2b_1' \\ c_2c_3' - c_3c_2' & c_3c_1' - c_1c_3' & c_1c_2' - c_2c_1' \end{vmatrix}$$

durch δ, setzt also

$$(2.) \quad \delta = [aa'\ bb'\ cc']$$

und berücksichtigt, dass**)

$$[aa'\ bb'] = [abb']a' - [a'bb']a,$$

also

$$[aa'\ bb'\ cc'] = [abb'][a'cc'] - [a'bb'][acc']$$

ist, so folgt, weil***)

$$[a'cc'] = [c'a'c], \quad [a'bb'] = -[a'b'b], \quad [acc'] = -[cac']$$

ist,

$$(3.) \quad \delta = [abb'][c'a'c] - [a'b'b][cac'].$$

Hieraus erhält man durch Buchstabenvertauschung

$$(4.) \quad \begin{cases} \delta = [bcc'][a'b'a] - [b'c'c][aba'], \\ \delta = [caa'][b'c'b] - [c'a'a][bcb'], \end{cases}$$

wobei zu bemerken ist, dass nach der Bedeutung der äusseren Producte die Grössen $[abb']$, $[c'a'c]$ u. s. w. identisch mit den Determinanten $\Sigma \pm a_1b_2b_3'$, $\Sigma \pm c_1'a_2'c_3$ u. s. w. sind.

Um aus der Formel (3.) weitere Folgerungen zu ziehen, werde

$$(5.) \quad \begin{cases} l = [bc'\ b'c], \\ m = [ca'\ c'a], \\ n = [ab'\ a'b] \end{cases}$$

---

*) Vgl. dieses Journ. Bd. 92. S. 130.

**) Nach Formel (22.) a. a. O.

***) Nach Formel (17.) a. a. O.

und

$$(6.) \quad \eta = [al\ bm\ cn]$$

gesetzt. Dann erkennt man, dass δ in η übergeht, wenn a', b', c' resp. durch l, m, n ersetzt werden. Dadurch verwandelt sich aber (3.) in:

$$(7.) \quad \eta = [abm][nlc]-[lmb][can].$$

Um die Werthe der einzelnen äusseren Producte (Determinanten) zu bestimmen, beachte man, dass aus (5.):

$$(8.) \quad \begin{cases} l = -[bcb']c'+[b'c'c]b = [b'c'b]c-[bcc']b', \\ m = -[cac']a'+[c'a'a]c = [c'a'c]a-[caa']c', \\ n = -[aba']b'+[a'b'b]a = [a'b'a]b-[abb']a', \end{cases}$$

und hieraus:

$$[abm] = -[abc'][caa'], \quad [lmb] = -[abc'][bcb'][c'a'c].$$
$$[can] = -[aba'][cab'], \quad [nlc] = -[bcc'][cab'][a'b'b],$$

hervorgeht. Substituirt man diese Ausdrücke in (7.), so findet man:

$$(9.) \quad \eta = [abc'][cab']\{[caa'][bcc'][a'b'b]-[aba'][bcb'][c'a'c]\}.$$

Andererseits aber gelten die beiden Identitäten*)

$$[caa'][bcc'] = [bca'][cac']+[abc][c'a'c],$$
$$[aba'][bcb'] = [bca'][abb']+[abc][a'b'b].$$

Multiplicirt man die erste derselben mit $[a'b'b]$, die zweite mit $[c'a'c]$ und subtrahirt, so findet man:

$$[caa'][bcc'][a'b'b]-[aba'][bcb'][c'a'c] = [bca']\{[a'b'b][cac']-[abb'][c'a'c]\},$$

und da der Factor von $[bca']$ auf der rechten Seite wegen (3.) den Werth $-\delta$ hat, so ergiebt sich aus (9.):

$$(10.) \quad \eta = -[abc'][bca'][cab']\delta.$$

Vertauscht man hierin und in (6.) a, b, c resp. mit a', b', c', wodurch die Grössen l, m, n in ihre negativen Werthe übergehen, und setzt:

$$(11.) \quad \zeta = [a'l\ b'm\ c'n],$$

so erhält man:

$$(12.) \quad \zeta = -[a'b'c][b'c'a][c'a'b]\delta.$$

Nennt man, wie üblich, zwei Dreiecke *perspectivisch*, wenn die drei Verbindungslinien entsprechender Ecken sich in einem Punkte schneiden, so

*) Nach Formel (24.) a. a. O.

zeigt die Gleichung (2.), *dass* $\delta = 0$ *die Bedingung für die perspectivische Lage der beiden Dreiecke abc und* $a'b'c'$ *ist.* Da aber mit δ wegen (10.) und (12.) auch η und ζ verschwinden, so erhält man aus den bisher abgeleiteten Identitäten für $\delta = 0$ den bekannten Satz:

I. *Sind abc und* $a'b'c'$ *zwei perspectivische Dreiecke, so bilden die Schnittpunkte l, m, n der drei Geradenpaare* $[bc']$, $[b'c]$; $[ca']$, $[c'a]$; $[ab']$, $[a'b]$ *ein neues Dreieck, welches zu jedem der beiden Dreiecke abc und* $a'b'c'$ *perspectivisch ist.*

Setzt man ferner:

$$(13.)\quad \begin{cases} [bc] = A, & [b'c'] = A', \\ [ca] = B, & [c'a'] = B', \\ [ab] = C, & [a'b'] = C', \end{cases}$$

und:

$$(14.)\quad \Delta = [AA'\ BB'\ CC'],$$

so folgt aus (3.):

$$\Delta = [ABB'][C'A'C] - [A'B'B][CAC'],$$

und da:*)

$$[AB] = [abc]c, \quad [A'B'] = [a'b'c']c',$$
$$[CA] = [abc]b, \quad [C'A'] = [a'b'c']b'$$

ist, auch:

$$\Delta = [abc][a'b'c']\{[cB'][b'C] - [c'B][bC']\},$$

woraus nach Substitution der Werthe aus (13.) unter Berücksichtigung von (3.) hervorgeht:

$$(15.)\quad \Delta = [abc][a'b'c']\delta.$$

Für $\delta = 0$ ergiebt sich hieraus der *Desargues*sche Satz über perspectivische Dreiecke**).

Setzt man endlich, analog (5.), (6.) und (11.):

$$(16.)\quad \begin{cases} L = [BC'\ B'C], \\ M = [CA'\ C'A], \\ N = [AB'\ A'B], \end{cases}$$

und:

$$(17.)\quad \begin{cases} \mathrm{H} = [AL\ BM\ CN], \\ \mathrm{Z} = [A'L\ B'M\ C'N], \end{cases}$$

*) Nach Formel (25.) a. a. O.

**) Vgl. *Hunyady,* dieses Journal Bd. 89. S. 80.

vertauscht in (10.) und (12.) die kleinen Buchstaben mit den grossen und formt in der nämlichen Weise um wie bisher, so erhält man leicht die beiden Identitäten:

$$(18.)\quad \begin{cases} \mathrm{H} = [abc]^4[a'b'c']\zeta, \\ \mathrm{Z} = [abc][a'b'c']^4\eta, \end{cases}$$

deren geometrische Interpretation den zu I. reciprok-polaren Satz liefert.

§ 2.

Substituirt man in (15.) für δ und Δ die Werthe aus (2.), (13.) und (14.), so folgt:

$$(19.)\quad [bc\ b'c'\ \ ca\ c'a'\ \ ab\ a'b'] = [abc][a'b'c'][aa'\ \ bb'\ \ cc'].$$

Vertauscht man hierin a mit a' und setzt:

$$(20.)\quad \begin{cases} u = [bc\ \ b'c'], \\ v = [ca\ \ c'a'], \\ w = [ab\ \ a'b'], \end{cases}$$

so erhält man unter Berücksichtigung von (5.):

$$(21.)\quad \varphi = [u\ \ m\ \ n] = [a'bc][ab'c']\delta,$$

woraus durch Buchstabenvertauschung noch:

$$(22.)\quad \begin{cases} \psi = [v\ \ n\ \ \ l] = [b'ca][bc'a']\delta, \\ \chi = [w\ \ \ l\ \ m] = [c'ab][ca'b']\delta \end{cases}$$

hervorgeht. Vertauscht man andererseits in (19.) c und b' mit einander und ersetzt a und a' durch m und n, so geht (19.) in:

$$\pi = [bm\ cn\ \ b'm\ c'n\ \ bb'\ cc'] = -[bb'm][cc'n][mnu]$$

oder wegen (21.) in:

$$(23.)\quad \pi = [bm\ cn\ \ b'm\ c'n\ \ bb'\ cc'] = -[bb'm][cc'n][a'bc][ab'c']\delta$$

über. Durch Buchstabenvertauschung ergeben sich hieraus noch die beiden Identitäten:

$$(24.)\quad \begin{cases} \varrho = [cn\ al\ \ \ c'n\ a'l\ \ \ cc'\ aa'] = -[cc'n][aa'l\ ][b'ca][bc'a']\delta, \\ \sigma = [al\ \ bm\ \ a'l\ \ b'm\ \ aa'\ \ bb'] = -[aa'l][bb'm][c'ab][ca'b']\delta, \end{cases}$$

in denen wegen (8.):

$$[aa'l] = -[bcb'][a'c'a] - [b'c'c][aba'] = -[b'c'b][aca'] - [bcc'][a'b'a]$$

u. s. w. ist.

Aus den Identitäten (23.) und (24.) folgen für $\delta = 0$ die auch sonst bekannten Sätze:

II. *Sind abc und $a'b'c'$ zwei perspectivische Dreiecke und bezeichnen*

$$l,\ m,\ n;\quad u,\ v,\ w$$

die Schnittpunkte der Geraden

$$[bc'] \text{ und } [b'c],\quad [ca'] \text{ und } [c'a],\quad [ab'] \text{ und } [a'b],$$
$$[bc] \text{ und } [b'c'],\quad [ca] \text{ und } [c'a'],\quad [ab] \text{ und } [a'b'],$$

so liegt jedes der drei Punkttripel

$$m,\ n,\ u;\quad n,\ l,\ v;\quad l,\ m,\ w$$

in einer Geraden. Ferner liegen die Schnittpunkte von

$$[bm] \text{ und } [cn],\quad [b'm] \text{ und } [c'n],\quad [bb'] \text{ und } [cc']$$

in einer Geraden; ebenso auch die Schnittpunkte von

$$[cn] \text{ und } [al],\quad [c'n] \text{ und } [a'l],\quad [cc'] \text{ und } [aa'],$$
$$[al] \text{ und } [bm],\quad [a'l] \text{ und } [b'm],\quad [aa'] \text{ und } [bb']$$

in zwei anderen.

Setzt man:

$$(25.)\qquad \begin{cases} G = [bc'], & G' = [b'c], \\ H = [ca'], & H' = [c'a], \\ K = [ab'], & K' = [a'b], \end{cases}$$

woraus wegen (5.):

$$\begin{aligned} l &= [GG'], \\ m &= [HH'], \\ n &= [KK'] \end{aligned}$$

sich ergiebt, so folgt:

$$\omega = [l\ m\ n] = [GG'\ HH'\ KK'],$$

und daraus analog (3.):

$$\omega = [GHH'][K'G'K] - [G'H'H][KGK'].$$

Da aber wegen (25.):

$$[GHH'] = [abc'][c'a'c],\qquad [KGK'] = [abb'][c'a'b],$$
$$[G'H'H] = [a'b'c][cac'],\qquad [K'G'K] = [a'b'b][cab']$$

ist, so erhält man:

$$(26.)\qquad \omega = [l\ m\ n] = [abc'][cab'][a'b'b][c'a'c] - [a'b'c][c'a'b][abb'][cac'].$$

Ersetzt man hierin sowie in den Identitäten (21.) bis (24.) $a, b, c; a', b', c'$ bez. durch $A, B, C; A', B', C'$, so mögen die Determinanten $\varphi, \psi, \chi; \pi, \varrho, \sigma; \omega$ bez. die Werthe $\Phi, \Psi, X; \Pi, P, \Sigma; \Omega$ annehmen; da aber dadurch auch l, m, n in L, M, N und u, v, w in $\vartheta.U, \vartheta.V, \vartheta.W$ übergehen, wenn

$$(27.)\quad \left\{\begin{array}{ll} & \vartheta = [abc][a'b'c'] \\ \text{und} & \\ & U = [aa'], \\ & V = [bb'], \\ & W = [cc'] \end{array}\right.$$

gesetzt wird, so erhält man:

$$(28.)\quad \left\{\begin{array}{lll} \Phi = \vartheta.\varphi, & \Psi = \vartheta.\psi, & X = \vartheta.\chi; \\ \Pi = \vartheta^2.\pi, & P = \vartheta^2.\varrho, & \Sigma = \vartheta^2.\sigma; \\ & \Omega = -\vartheta^2.\omega. & \end{array}\right.$$

Für $\delta = 0$ verschwinden wegen (21.) bis (24.) $\varphi, \psi, \chi; \pi, \varrho, \sigma$ und daher wegen (28.) auch $\Phi, \Psi, X; \Pi, P, \Sigma$. Die daraus hervorgehenden Sätze sind die reciprok-polaren Umkehrungen von II.

Substituirt man in die letzte Formel (28.) für $l, m, n; L, M, N$ die Werthe aus (5.) und (16.), so erhält man

$$[LMN] = -[abc]^2[a'b'c']^2[l\ m\ n].$$

Vertauscht man hierin a mit a', so bleiben l, A, A' ungeändert, während

$$m,\quad n;\quad B, C;\quad B', C'$$

in

$$v, -w;\quad H, K';\quad H', K$$

und wegen (16.)

$$L,\quad M,\quad N$$

in

$$[HK\ H'K'],\quad -[KA\ K'A'],\quad [AH'\ A'H]$$

übergehen; daher verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$[HK\ H'K'\quad KA\ K'A'\quad AH'\ A'H]$$
$$= -[bca']^2[b'c'a]^2[bc'\ b'c\quad ca\ c'a'\quad ab\ a'b'].$$

Ersetzt man nun

$$a,\quad b,\quad c;\quad a',\quad b',\quad c'$$

durch

$$A,\quad Q,\quad C;\quad A',\quad Q',\quad C',$$

wo

$$Q = [ca'] \quad \text{und} \quad Q' = [c'a]$$

sein möge, so gehen

$$H, \quad K, \quad A; \quad H', \quad K', \quad A'$$

in

$$[CA'], \quad [AQ'], \quad [QC]; \quad [C'A], \quad [A'Q], \quad [Q'C']$$

über, und wenn man diese Punkte durch

$$h, \quad k, \quad g; \quad h' \quad k', \quad g'$$

bezeichnet, so verwandelt sich die letzte Gleichung in

$$(29.) \quad \begin{cases} \quad [hk \;\; h'k' \quad kg \;\; k'g' \quad gh' \;\; g'h] \\ = -[QCA']^2[Q'C'A]^2[QC' \;\; Q'C \quad CA \;\; C'A' \quad AQ \;\; A'Q']. \end{cases}$$

Da aber

$$[QC'] = [a'b'c]a', \quad [Q'C] = [abc']a,$$
$$[CA] = [abc]b, \quad [C'A'] = [a'b'c']b',$$
$$[AQ] = [bca']c, \quad [A'Q'] = [b'c'a]c'$$

ist, so erhält man aus (29.), wenn man noch

$$[QCA']^2[Q'C'A]^2[abc][a'b'c'][abc'][a'b'c][bca'][b'c'a] = \varepsilon$$

setzt,

$$(30.) \quad [hk \;\; h'k' \quad kg \;\; k'g' \quad gh' \;\; g'h] = \varepsilon.\delta.$$

Für $\delta = 0$ verschwindet die linke Seite, und dies ergiebt die Bedingung, dass die Punkte h, k, g, h', k', g' auf einem Kegelschnitte liegen. Daher erhält man aus (30.) den sonst in anderer Form ausgesprochenen Satz:

III. *Verbindet man die sechs Ecken a, b, c; a', b', c' zweier perspectivischen Dreiecke abc und a'b'c' in der angegebenen Reihenfolge und nennt diese Geraden bez. C, A, Q, C', A', Q', so liegen die zweimal drei Ecken der beiden Dreiecke CQA' und C'Q'A auf einem Kegelschnitte.*

Berlin, den 15. März 1881.

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

(Fortsetzung; siehe Bd. 91 dieses Journals.)

(Von Herrn *L. W. Thomé* in Greifswald.)

In dieser Abhandlung ist ***die Integration der homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten, in welchen der Differentialausdruck durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist,*** im Anschlusse an die früheren Untersuchungen des Verfassers über diesen Gegenstand ***vollständig durchgeführt.*** Die Integration dieser Differentialgleichungen geht von der Darstellung der Integrale ***bei den singulären Punkten*** aus, und diese Darstellung gründet sich darauf, eine durch successive Integrationen aus vorgelegten Functionen zu bildende Function durch bestimmte Integrale auszudrücken, welche dieselben Functionen enthalten. ***Die hierauf bezüglichen Ausdrücke sind hier bei beliebigen Exponenten in den zu integrirenden Functionen aufgestellt*** (No. 1). Es ergiebt sich, dass eine solche Darstellung durch bestimmte Integrale auf allgemeinere Functionen, als diejenigen bei den hier betrachteten Differentialgleichungen sind, sich anwenden lässt, nämlich solche, wie sie bei einem beliebigen singulären Punkte einer homogenen linearen Differentialgleichung vorkommen, in dessen Nähe die Coefficienten abgesehen von diesem Punkte einwerthige und stetige analytische Functionen sind. Aus dieser Darstellung folgt die Entwickelung der Integrale der betrachteten Differentialgleichungen (No. 2). Es ist im Anschluss an die früheren Abhandlungen des Verfassers in No. 3 die Werthberechnung der Integrale mit beliebig vorgeschriebener Annäherung und in No. 4 die Bestimmung der Constanten bei der Fortsetzung der Integrale gegeben. In No. 5 ist alsdann die Integration der untersuchten Differentialgleichungen im Zusammenhange dargestellt. Die algebraischen Aufgaben, die bei der gegebenen Behandlung der hier integrirten Differentialgleichungen auftreten, sind in No. 7 untersucht.

1.

Bei einem singulären Punkte im Endlichen $x = a$ einer Differentialgleichung der betrachteten Art sind, siehe No. 5, Integrale von folgender Form zu entwickeln:

$$(1.) \qquad \mu_1 \int dx\, \mu_1^{-1} \mu_2 \int \cdots \int dx\, \mu_{k-1}^{-1} \mu_k \int \mu_k^{-1} U dx,$$

wo die Grössen μ die Form

$$(2.) \qquad e^{w}(x-a)^{\varkappa}\chi(x-a)$$

haben, U die Darstellung

$$(3.) \qquad e^{u}(x-a)^{\varrho}\{\chi_1(x-a)+\chi_2(x-a)\log(x-a)+\cdots+\chi_s(x-a)(\log(x-a))^{s-1}\}$$

besitzt und die Grössen w, u gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$, die Grössen χ, χ_1 bis χ_s von der Form $\sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha$ sind. Bezeichnet w_k die Grösse w in μ_k, so soll $u-w_k$ von Null verschieden sein. Es wird ein Kreis um $x = a$ als Mittelpunkt genommen, in welchem die Grössen χ in μ einwerthig, stetig und von Null verschieden, die χ_α in U einwerthig und stetig sind. Bei den Integrationen in (1.) soll jedesmal das constante Glied annullirt werden. Alsdann erhält die Entwickelung des Ausdruckes (1.) in dem angenommenen Kreise die Form

$$(4.) \qquad (x-a)^{\varrho+c}\{\varphi_1(x-a)+\varphi_2(x-\alpha)\log(x-a)+\cdots+\varphi_t(x-a)(\log(x-a))^{t-1}\},$$

wo c eine ganze Zahl ist, und wo die Grössen φ in diesem Kreise abgesehen von $x = a$ einwerthige und stetige analytische Functionen sind und solche Functionen bleiben — wenigstens in dem Bezirke von $x = a$ bei der Differentialgleichung (Abh. Bd. 87 No. 1).

Diese Entwickelung ist aufzustellen, welches auch die Exponenten $\varkappa$ in den Grössen μ sein mögen. Bei den in Abh. Bd. 91 betrachteten Integralen war vorausgesetzt, dass die Exponenten $\varkappa$ sich von dem Exponenten ϱ in U nicht um ganze Zahlen unterscheiden.

I. Zu dem Zwecke ist die Integralfunction

$$(5.) \qquad \int (x-a)^r \psi(x-a)(\log(x-a))^n dx$$

darzustellen, wo $\psi(x-a)$ in einem Kreise um $x = a$ als Mittelpunkt abgesehen von diesem Punkte eine einwerthige und stetige analytische Function ist, daher die Entwickelung

$$(6.) \qquad \sum_0^\infty c_\alpha(x-a)^\alpha + \sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha(x-a)^\alpha$$

hat, n ganzzahlig und positiv ($\geqq 0$) ist, das constante Glied in der Entwickelung (Integrationsconstante) annullirt wird.

a) In (5.) sei r ***nicht ganzzahlig***.

Es ist

$$(7.)\quad \left\{\begin{array}{c} \int \xi(x-a)(\log(x-a))^n dx \\ = \eta(x-a)(\log(x-a))^n - n\int \zeta(x-a)(\log(x-a))^{n-1} dx, \\ \xi(x-a) = (x-a)^r \psi(x-a), \quad \eta(x-a) = \int \xi(x-a)dx, \\ \zeta(x-a) = \frac{1}{x-a}\eta(x-a). \end{array}\right.$$

Demnach ist die Integralfunction

$$(8.)\quad \int (x-a)^r \psi(x-a) dx$$

darzustellen, in welcher die Integrationsconstante annullirt wird. Dieses geschieht durch ein bestimmtes Integral. Ein Integral erstreckt über die Peripherie des Kreises um den Nullpunkt der Constructionsebene als Mittelpunkt mit dem Radius 1, von 1 an in positiver Richtung (von $+1$ nach $+i$ hin) bis zu 1 zurück, werde durch $\int_1'$ bezeichnet. Dann ist, wenn der Anfangswerth von $\log\alpha$ für $\alpha = 1$ gleich Null genommen wird, und $\mathfrak{a}$ ganzzahlig ist,

$$(9.)\quad \frac{1}{e^{2\pi i r}-1}\int_1' \alpha^{r+\mathfrak{a}} d\alpha = \frac{1}{e^{2\pi i r}-1}\int_1' e^{(r+\mathfrak{a})\log\alpha} d\alpha = \frac{1}{r+\mathfrak{a}+1}.$$

Daher wird

$$(10.)\quad \sum_0^{\infty} \frac{c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{r+\mathfrak{a}+1}}{r+\mathfrak{a}+1} + \sum_{-1}^{-\infty} \frac{c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{r+\mathfrak{a}+1}}{r+\mathfrak{a}+1} = \frac{(x-a)^{r+1}}{e^{2\pi i r}-1}\int_1' \psi((x-a)\alpha)\alpha^r d\alpha.$$

Die Integration in den einzelnen Gliedern der Potenzreihen ist gestattet, weil die Reihen für Werthe x innerhalb des betrachteten Kreises (abgesehen von $x = a$) und die vorkommenden Werthe α in gleichem Grade convergiren. (Ueber die Convergenz in gleichem Grade vgl. die Abh. Bd. 87, No. 4 Anfang.) Wird nun

$$(11.)\quad \int_1' \frac{d\alpha_1}{e^{2\pi i r}-1} \alpha_1^r \psi((x-a)\alpha_1) = U_1(x-a)$$

gesetzt, so geht die Formel (7.) über in:

$$(12.)\quad \left\{\begin{array}{l} \int (x-a)^r \psi(x-a)(\log(x-a))^n dx = (x-a)^{r+1} U_1(x-a)(\log(x-a))^n \\ \qquad\qquad - n\int (x-a)^r U_1(x-a)(\log(x-a))^{n-1} dx. \end{array}\right.$$

Ist dann weiter

$$(13.)\quad \begin{cases} \int_1^{1'} \frac{d\alpha_2}{e^{2\pi i r}-1}\,\alpha_2^r U_1((x-a)\alpha_2) = U_2(x-a), \\ \int_1^{1'} \frac{d\alpha_3}{e^{2\pi i r}-1}\,\alpha_3^r U_2((x-a)\alpha_3) = U_3(x-a), \quad \text{etc.}, \end{cases}$$

so ergiebt sich aus (12.) die Darstellung:

$$(14.)\quad \begin{cases} \int (x-a)^r \psi(x-a)(\log(x-a))^n dx = (x-a)^{r+1}\{U_1(x-a)(\log(x-a))^n \\ \quad -nU_2(x-a)(\log(x-a))^{n-1}+n(n-1)U_3(x-a)(\log(x-a))^{n-2}-\cdots \\ \qquad \cdots+(-1)^n n(n-1)\ldots 1\,U_{n+1}(x-a)\}. \end{cases}$$

(Vgl. Abh. Bd. 91, No. 1 *b*) und *d*)). In den bestimmten Integralen kann nun die Function $\psi(x-a)$ eine andere Darstellung als durch Reihenentwickelung erhalten.

b) In (5.) sei r *ganzzahlig*.

$(x-a)^r\psi(x-a)$ sei gleich $\Psi(x-a)$ gesetzt und

$$(15.)\quad \Psi(x-a) = \sum_0^{\infty} k_\alpha (x-a)^\alpha + \sum_{-1}^{-\infty} k_\alpha (x-a)^\alpha = \frac{k_{-1}}{x-a} + \xi(x-a).$$

Dann ist

$$(16.)\quad \begin{cases} \int \Psi(x-a)(\log(x-a))^n dx \\ = \frac{k_{-1}}{n+1}(\log(x-a))^{n+1}+\eta(x-a)(\log(x-a))^n - n\int \zeta(x-a)(\log(x-a))^{n-1}dx, \\ \eta(x-a) = \int \xi(x-a)dx, \quad \zeta(x-a) = \frac{1}{x-a}\eta(x-a). \end{cases}$$

k_{-1} wird ausgedrückt durch

$$(17.)\quad k_{-1} = \frac{R}{2\pi i}\int_1^{1'} \Psi(R\lambda)\,d\lambda,$$

wo der Radius R einem Kreise um $x=a$ als Mittelpunkt angehört innerhalb des bei der Entwickelung von $\Psi(x-a)$ angenommenen Kreises.

Es ist nun die Integralfunction

$$(18.)\quad \int \xi(x-a)\,dx$$

darzustellen, in welcher die Integrationsconstante annullirt wird; in $\zeta(x-a)$ kommt demnach das Glied $\frac{1}{x-a}$ nicht vor. Der Anfangswerth von $\log\beta$ für $\beta=1$ werde gleich Null genommen, $\beta = e^{i\vartheta}$. Dann ist für positive ganzzahlige Werthe α, Null einbegriffen:

$$(19.)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_1^{\prime}\Big(\frac{\log\beta}{2\pi i}\Big)^{\alpha}\frac{d\beta}{\beta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(\frac{\theta}{2\pi}\Big)^{\alpha}d\theta=\frac{1}{\alpha+1}.$$

Es werde nun

$$(20.)\qquad \begin{cases}\sum_0^{\infty} k_\alpha(x-a)^\alpha = \varphi(x-a),\\ \sum_{-2}^{-\infty} k_\alpha(x-a)^\alpha = (x-a)^{-2}\chi((x-a)^{-1})\end{cases}$$

gesetzt. Dann wird

$$(21.)\qquad \sum_0^{\infty}\frac{k_\alpha(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}=\frac{x-a}{2\pi i}\int_1^{\prime}\varphi\Big((x-a)\frac{\log\beta}{2\pi i}\Big)\frac{d\beta}{\beta},$$

$$(22.)\qquad \sum_{-2}^{-\infty}\frac{k_\alpha(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}=-\frac{(x-a)^{-1}}{2\pi i}\int_1^{\prime}\chi\Big((x-a)^{-1}\frac{\log\beta}{2\pi i}\Big)\frac{d\beta}{\beta}.$$

Die Integration in den einzelnen Gliedern der Potenzreihen $\varphi\big((x-a)\frac{\log\beta}{2\pi i}\big)$ und $\chi\big((x-a)^{-1}\frac{\log\beta}{2\pi i}\big)$ ist gestattet. Denn da $\frac{\log\beta}{2\pi i}$ von 0 bis 1 sich ändert, so convergirt die Reihe $\varphi\big((x-a)\frac{\log\beta}{2\pi i}\big)$ für Werthe von $x-a$ innerhalb des Convergenzkreises von $\varphi(x-a)$, die Reihe $\chi\big(u\frac{\log\beta}{2\pi i}\big)$, $u=(x-a)^{-1}$ für Werthe von $(x-a)^{-1}$ innerhalb des Convergenzkreises von $\chi(u)$ und zugleich für die in Betracht kommenden Werthe von $\frac{\log\beta}{2\pi i}$ in gleichem Grade.

Die Functionen $\varphi(x-a)$ und $\chi((x-a)^{-1})$ sind nun durch die Function $\Psi(x-a)$ auszudrücken. Dieses geschieht vermittelst der *Cauchy-Laurent*schen Integralformel. Nach derselben ist, wenn R' und R'' Radien eines Kreisringes um $x=a$ als Mittelpunkt innerhalb des Kreises sind, in welchem $\Psi(x-a)$ abgesehen von $x=a$ einwerthig und stetig ist, für das Gebiet $R'<\mathrm{Mod.}(x-a)<R''$

$$(23.)\qquad \Psi(x-a)=\frac{R''}{2\pi i}\int_1^{\prime}\frac{\Psi(R''\lambda)}{R''\lambda-(x-a)}d\lambda+\frac{R'}{2\pi i}\int_1^{\prime}\frac{\Psi(R'\lambda)}{x-a-R'\lambda}d\lambda.$$

Gemäss (23.) ist

$$(24.)\qquad \varphi(x-a)=\frac{R''}{2\pi i}\int_1^{\prime}\frac{\Psi(R''\lambda)}{R''\lambda-(x-a)}d\lambda,\qquad \mathrm{Mod.}(x-a)<R''.$$

Setzt man ferner in (23.) $(x-a)\Psi(x-a)$ an Stelle von $\Psi(x-a)$, so folgt hieraus:

$$(25.)\qquad (x-a)^{-1}\chi((x-a)^{-1})=\frac{R'}{2\pi i}\int_1^{\prime}\frac{\Psi(R'\lambda)R'\lambda}{x-a-R'\lambda}d\lambda,\qquad \mathrm{Mod.}(x-a)>R'.$$

Man erhält also aus (24.) und (25.) als Darstellung von $\varphi(x-a)$ und $\chi((x-a)^{-1})$

$$(26.)\qquad \varphi(x-a) = \int_1^{\prime} \frac{d\lambda R''}{2\pi i} \frac{(R''\lambda)^{-1}}{1-(x-a)(R''\lambda)^{-1}} \Psi(R''\lambda),\ \text{Mod.}(x-a)R''^{-1} < 1,$$

$$(27.)\ \chi((x-a)^{-1}) = \int_1^{\prime} \frac{d\lambda R'}{2\pi i} \frac{R'\lambda}{1-(x-a)^{-1}R'\lambda} \Psi(R'\lambda),\quad \text{Mod.}((x-a)^{-1})R' < 1.$$

Wird nun

$$(28.)\qquad \int_1^{\prime} \frac{d\beta_1}{2\pi i\beta_1} \varphi\Big((x-a)\frac{\log\beta_1}{2\pi i}\Big) = V_1(x-a),$$

$$(29.)\qquad \int_1^{\prime} \frac{d\beta_1}{2\pi i\beta_1} \chi\Big((x-a)^{-1}\frac{\log\beta_1}{2\pi i}\Big) = -W_1((x-a)^{-1})$$

gesetzt, so geht die Formel (16.) gemäss (21.) und (22.) über in

$$(30.)\quad \begin{cases} \int [\varphi(x-a)+k_{-1}(x-a)^{-1}+(x-a)^{-2}\chi((x-a)^{-1})](\log(x-a))^n dx \\ \qquad = \frac{k_{-1}}{n+1}(\log(x-a))^{n+1}+[(x-a)V_1(x-a) \\ \qquad +(x-a)^{-1}W_1((x-a)^{-1})](\log(x-a))^n \\ -n\int [V_1(x-a)+(x-a)^{-2}W_1((x-a)^{-1})](\log(x-a))^{n-1}dx. \end{cases}$$

Ist nun weiter

$$(31.)\quad \begin{cases} \int_1^{\prime} \frac{d\beta_2}{2\pi i\beta_2} V_1\Big((x-a)\frac{\log\beta_2}{2\pi i}\Big) = V_2(x-a), \\ \int_1^{\prime} \frac{d\beta_3}{2\pi i\beta_3} V_2\Big((x-a)\frac{\log\beta_3}{2\pi i}\Big) = V_3(x-a), \quad \text{etc.}, \end{cases}$$

$$(32.)\quad \begin{cases} \int_1^{\prime} \frac{d\beta_2}{2\pi i\beta_2} W_1\Big((x-a)^{-1}\frac{\log\beta_2}{2\pi i}\Big) = -W_2((x-a)^{-1}), \\ \int_1^{\prime} \frac{d\beta_3}{2\pi i\beta_3} W_2\Big((x-a)^{-1}\frac{\log\beta_3}{2\pi i}\Big) = -W_3((x-a)^{-1}), \quad \text{etc.}, \end{cases}$$

so ergiebt sich aus (30.) die Darstellung

$$(33.)\quad \begin{cases} \int \Psi(x-a)(\log(x-a))^n dx = \frac{1}{n+1}\int_1^{\prime} \frac{d\lambda R}{2\pi i} \Psi(R\lambda)(\log(x-a))^{n+1} \\ \qquad +[(x-a)V_1(x-a)+(x-a)^{-1}W_1((x-a)^{-1})](\log(x-a))^n \\ \qquad -n[(x-a)V_2(x-a)+(x-a)^{-1}W_2((x-a)^{-1})](\log(x-a))^{n-1} \\ +n(n-1)[(x-a)V_3(x-a)+(x-a)^{-1}W_3((x-a)^{-1})](\log(x-a))^{n-2} \\ \cdots+(-1)^n n(n-1)\ldots 1[(x-a)V_{n+1}(x-a)+(x-a)^{-1}W_{n+1}((x-a)^{-1})]. \end{cases}$$

Die Integrale V gelten für Werthe von x, bei denen $\text{Mod.}(x-a) < R''$ ist,

die Integrale W für Werthe von x, bei denen Mod.$(x-a) > R'$ ist, und die Darstellung (33.) gilt für Werthe von x, bei denen $R' <$ Mod.$(x-a) < R''$ ist.

In den bestimmten Integralen kann die Function Ψ eine andere Darstellung als durch Reihenentwickelung erhalten.

II. ***Die Formeln*** (14.) ***und*** (33.) ***werden nun successive angewandt, um das Integral*** (1.) ***darzustellen.*** Es sei ein Kreis mit dem Radius R_0 bestimmt (s. No. 5), in welchem die Functionen $\chi(x-a)$ in den μ einwerthig, stetig und von Null verschieden, die $\chi_a(x-a)$ in U einwerthig und stetig sind. Sobald der Exponent r in der zu integrirenden Function (5.) ganzzahlig wird, kommt die Formel (33.) in Anwendung, in welcher nun statt R' und R'' gesetzt werde R_1' und R_1'', wo $R_1'' < R_0$ ist. Die Darstellung gilt hierauf innerhalb des Kreisringes um $x = a$ mit den Radien R_1' und R_1''. Kommt in der Folge wieder ein ganzzahliger Exponent r in der zu integrirenden Function (5.) vor, so ist zur Anwendung von (33.) ein Kreisring mit den Radien R_2' and R_2'' zu nehmen, so dass $R_1' < R_2' < R_2'' < R_1''$ ist. Die Darstellung gilt alsdann innerhalb des Kreisringes um $x = a$ mit den Radien R_2' und R_2''. Und dieses Verfahren ist fortzusetzen, bis das Integral (1.) vollständig dargestellt ist.

III. Dieselbe Darstellung des Integrales (1.) vermittelst der Formeln aus I. ist anwendbar, wenn von den Grössen μ und U in (1.) nur vorausgesetzt wird, dass sie in einem Kreisringe um $x = a$ als Mittelpunkt in dem Bezirke von $x = a$ von der Form $(x-a)^k\psi$ sind und ψ in diesem Gebiete einwerthig, stetig und von Null verschieden ist. Durch Integrale (1.) mit dieser Beschaffenheit werden aber nach Abh. Bd. 75, No. 8 die Integrale bei einem singulären Punkte $x = a$ von jeder homogenen linearen Differentialgleichung ausgedrückt, deren Coefficienten in der Umgebung dieses Punktes einwerthige und abgesehen von diesem Punkte stetige analytische Functionen sind. Die Entwickelung No. 1 (4.) gilt dann in dem Bezirke von $x = a$.

2.

Die Functionen $\varphi(x-a)$ in No. 1 (4.) haben für die Werthe von x in dem Bezirke von $x = a$ die Entwickelung durch die Summe von zwei Potenzreihen, von denen die eine nach Potenzen von $x-a$ mit positiven, die andere mit negativen ganzzahligen Exponenten fortschreitet. ***In dieser Entwickelung sollen die Coefficienten bestimmt werden.***

Die Functionen $(x-a)^{\varrho+c}\varphi(x-a)$ genügen einer homogenen linearen Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1, die man nach Abh. Bd. 87, No. 7, I aus der ursprünglichen Differentialgleichung ohne vorherige Kenntniss der Integrale herleitet. Die Constanten in den rationalen Coefficienten dieser Differentialgleichung werden rationale Ausdrücke der Constanten in den Coefficienten der ursprünglichen Differentialgleichung und der Constanten a, die dem singulären Punkte angehört, mit rationalen Zahlcoefficienten. Aus dieser Differentialgleichung ergiebt sich eine Recursionsformel für die Coefficienten in der Entwickelung von φ mit constanter Anzahl der Glieder. Diese Glieder können nicht alle identisch verschwinden, weil, wenn die Ordnung der Differentialgleichung gleich M ist, und die Exponenten in der Reihe für φ durch α bezeichnet werden, die Potenz α^M nicht aus der Recursionsformel ausfallen kann. Es bleibt daher übrig, eine *endliche* Anzahl von Coefficienten in der Entwickelung von φ zu bestimmen. Eine solche Function $\varphi(x-a)$ ist nach No. 1 in einem Kreisringe um $x=a$ als Mittelpunkt durch eine Summe von bestimmten Integralen in endlicher Anzahl dargestellt worden. Ist r in No. 1 (5.) nicht ganzzahlig, so tritt in Formel No. 1 (14.) der Factor $(x-a)^{r+1}$ heraus. Dieser Factor kann, wenn r in No. 1 (5.) nicht ganzzahlig oder ganzzahlig ist, aus der Darstellung von No. 1 (5.) durch No. 1 (14.) bezüglich (33.) herausgenommen werden, wobei der Ausdruck durch Formel (33.) noch mit $(x-a)^{-(r+1)}$ multiplicirt wird. Dann ergiebt sich $(x-a)^{\varrho+c}\varphi(x-a)=(x-a)^{\varrho+k}\varphi(x-a)$. Ein bestimmtes Integral, in der Summe, welche eine Function $\varphi(x-a)$ darstellt, sei durch $f(x-a)$ bezeichnet. In der Entwickelung von $f(x-a)$ nach Potenzen von $x-a$ in dem Kreisringe wird der Coefficient c_a von $(x-a)^a$ durch das Integral

$$(1.) \qquad c_a = \int_1'' \frac{d\zeta R}{2\pi i}(R\zeta)^{-a-1}f(R\zeta)$$

ausgedrückt, wo R der Radius eines Kreises um $x=a$ als Mittelpunkt innerhalb dieses Kreisringes ist. Es ergiebt sich also zur Darstellung von c_a ein mehrfaches Integral gebildet durch Integrationen, die durch $\int_1'$ bezeichnet sind. Die Integrationsvariabeln kommen vor in der Art, wie die α No. 1 (14.), wie die β in $\frac{\log\beta}{2\pi i}$ No. 1 (21.), (22.), (33.), wie die λ No. 1 (17.), (26.), (27.), endlich als ζ in (1.). Die unter den Integralzeichen vor-

kommenden Functionen seien als Product unter die Gesammtheit der Integralzeichen gestellt. Jede Integrationsvariable α führt einen Factor $\frac{\alpha^r}{e^{2\pi i r}-1}$ ein, wo r nicht ganzzahlig ist, jedes β einen Factor $\frac{1}{2\pi i \beta}$, jedes λ einen Factor $\frac{R'}{2\pi i}(R'\lambda)$ oder $\frac{R''}{2\pi i}(R''\lambda)^{-1}$, ζ den Factor $\frac{R}{2\pi i}(R\zeta)^{-\mathfrak{a}-1}$. Das Product dieser Grössen sei durch A bezeichnet, das Product der übrigen Functionen durch B.

I. *a*) Das durch B bezeichnete Product enthält dreierlei Arten von Factoren. Die Factoren der ersten Art in B gehen aus den Grössen $e^{\pm w}$ in den μ, μ^{-1}, e^u in U No. 1 (1.) hervor, in denen w, u von der Form $\sum_1^n c_{-\mathfrak{a}}(x-a)^{-\mathfrak{a}}$ ist, haben also Entwickelungen der Form $1+\sum_1^\infty k_{-\mathfrak{a}}(x-a)^{-\mathfrak{a}}$. Die Factoren der zweiten Art werden von den Functionen $\chi(x-a)$ und $(\chi(x-a))^{-1}$ in den μ und μ^{-1}, $\chi_{\mathfrak{a}}(x-a)$ in U gebildet. Diese Factoren haben Entwickelungen der Form $\sum_0^\infty c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}$, die innerhalb des Kreises mit dem Radius R_0 (No. 1, II.) convergiren. Hierhin gehören noch die Factoren $c(x-a)^{\mathfrak{a}}$, c eine rationale Zahl, $\mathfrak{a}$ ganzzahlig, die in No. 1 (14.) bei $\mathfrak{a}=0$ und (33.), nachdem letztere Formel mit $(x-a)^{-r-1}$ multiplicirt ist, vor den Integralen stehen, und zwar wenn $\mathfrak{a}<0$ ist, als Factoren der ersten Art, wenn $\mathfrak{a}\geqq 0$ ist, als Factoren der zweiten Art. Die Factoren der dritten Art werden durch die Grössen

$$(2.)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{1-(x-a)(R''_{\mathfrak{b}}\lambda)^{-1}} = \sum_0^\infty (x-a)^{\mathfrak{a}}(R''_{\mathfrak{b}}\lambda)^{-\mathfrak{a}}, \\ \dfrac{1}{1-(x-a)^{-1}R'_{\mathfrak{b}}\lambda} = \sum_0^\infty ((x-a)^{-1})^{\mathfrak{a}}(R'_{\mathfrak{b}}\lambda)^{\mathfrak{a}} \end{cases}$$

aus Integralen der Art No. 1 (26.), (27.) geliefert. In den Factoren der beiden ersten Arten steht an Stelle von $x-a$ ein Product einerseits von Integrationsvariabeln α oder von 1 und andererseits entweder von einer Integrationsvariabeln wie $R'_{\mathfrak{b}}\lambda$, $R''_{\mathfrak{b}}\lambda$ oder von der Integrationsvariabeln $R\zeta$. In den Factoren der dritten Art steht mit $x-a$ bezüglich $(x-a)^{-1}$ multiplicirt ein Product von Variabeln $\frac{\log\beta}{2\pi i}$, sodann an Stelle von $x-a$ ebenfalls ein Product einerseits von Integrationsvariabeln α oder von 1 und andererseits entweder von einer Grösse $R'_{\mathfrak{b}+1}\lambda$, $R''_{\mathfrak{b}+1}\lambda$, wo $R'_{\mathfrak{b}}<R'_{\mathfrak{b}+1}<R''_{\mathfrak{b}+1}<R''_{\mathfrak{b}}$ ist, oder von $R\zeta$.

b) Das Product B der in *a*) bezeichneten Reihen S, die in endlicher Anzahl vorkommen, werde in folgender Weise in eine Reihe entwickelt.

Die in *a*) enthaltenen Reihen, insofern sie ursprünglich $x-a$ als Variable enthalten, convergiren unbedingt (d. h. die Reihen der Moduln convergiren). Nun ist $\text{Mod.}\,\alpha = 1$, $\frac{\log\beta}{2\pi i} \leqq 1$, $\text{Mod.}\,\lambda = 1$, $\text{Mod.}\,\zeta = 1$ und es liegen die an Stelle von $x-a$ zu setzenden Grössen $R'_c\lambda$, $R''_c\lambda$ oder $R\zeta$ innerhalb des Convergenzkreises der betreffenden Reihe. Daher convergirt jede Reihe S noch, wenn die Coefficienten durch ihre Moduln ersetzt werden, und 1 statt jeder der in derselben vorkommenden Variabeln α, $\frac{\log\beta}{2\pi i}$, λ oder ζ eingesetzt wird. Die hierdurch entstehende Reihe sei durch S_1 bezeichnet. Die Reihen S werden nun mit einander multiplicirt, indem die Stellenzeiger in diesen Reihen alle positiv genommen werden. In der Reihe für das Product ist also das Glied mit dem Stellenzeiger n gleich der Summe der aus Gliedern, von denen aus jeder Reihe eines herrührt, gebildeten Producte, in denen die Summe der Stellenzeiger gleich n ist. Diese Reihe sei durch T bezeichnet. In derselben Weise seien die Reihen S_1 mit einander multiplicirt, und hierdurch gehe die Reihe T_1 hervor. Die Reihe T ist eine einfach unendliche Reihe, deren Glieder ganze rationale Functionen der Variabeln α, α^{-1}, $\frac{\log\beta}{2\pi i}$, λ, λ^{-1}, ζ, ζ^{-1} sind, welche Functionen man aufstellen kann. Aus der Reihe T_1 ergiebt sich, dass die Reihe T für die in Betracht kommenden Werthe der genannten Variabeln in gleichem Grade convergirt (vgl. No. 1 bei (10.)).

c) Es steht also unter der Gesammtheit der Integralzeichen die Entwickelung AT. Die Reihe T werde in zwei Theile getheilt T' und T'', so dass T' die Glieder der Reihe bis zu einem Stellenzeiger n enthält, T'' die Reihe der übrigen Glieder ist, also $AT-AT' = AT''$. Nun ist die Reihe T in gleichem Grade convergent für die Werthe der Integrationsvariabeln. Es besteht also, während die in Betracht kommenden Werthe dieser Variabeln beliebig bleiben, ein Stellenzeiger ν der Art, dass, sobald der Stellenzeiger $n > \nu$ ist, $\text{Mod.}\,T'' < \delta$ bleibt, wo δ eine beliebig klein gewählte Grösse ist. Eine Grösse gleich oder grösser als die Werthe von $\text{Mod.}\,A$ werde durch A' bezeichnet. Es ergiebt sich alsdann für das Integral von $(AT-AT')$, dass dessen Modul gleich oder kleiner als $A'\delta(2\pi)^\sigma$ bleibt, wenn σ-mal integrirt wird nach θ durch Substitution von $e^{i\theta}$, $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$. Also ist die Reihe AT integrirbar durch Integration in den einzelnen Gliedern. Bei Ausführung der Integration wird jedes Integral

$$(3.)\quad \int_1^{'} \frac{(R'\lambda)^{\alpha} R' d\lambda}{2\pi i},\quad \int_1^{''} \frac{(R''\lambda)^{\alpha} R'' d\lambda}{2\pi i} \cdots \int_1^{''} \frac{(R\zeta)^{\alpha} R d\zeta}{2\pi i}$$

gleich Null, wenn α von -1 verschieden ist, sonst gleich 1, jedes Integral

$$(4.)\quad \int_1^{''} \frac{\alpha^{r+\alpha} d\alpha}{e^{2\pi i r}-1} = \frac{1}{r+\alpha+1},$$

r nicht ganzzahlig, jedes Integral

$$(5.)\quad \int_1^{'} \left(\frac{\log\beta}{2\pi i}\right)^{\alpha} \frac{d\beta}{2\pi i\beta} = \frac{1}{\alpha+1},$$

α ganzzahlig und positiv ($\geqq 0$). ***Die einzelnen Glieder in der integrirten Reihe werden unabhängig davon, welche Grössen R_λ' und R_λ'' zur Darstellung des Integrales No. 1*** (1.) ***durch die Formeln von No. 1 gewählt sind, und stellen sich als ganze rationale Functionen der Constanten in den Grössen w, u, χ, χ^{-1}, χ_α in den μ, μ^{-1} und U und der Constanten $(\varrho-\varkappa_\lambda+\alpha)^{-1}$, wo α ganzzahlig, $\varkappa_\lambda$ der Exponent in solchen μ_λ ist, für welche $\varrho-\varkappa_\lambda$ nicht ganzzahlig wird, mit rationalen Zahlcoefficienten dar.***

In No. 3 wird gezeigt, wie man den Werth des Coefficienten c_α (1.) mit beliebig vorgeschriebener Annäherung berechnet und den Stellenzeiger ν mit der vorhin angegebenen Beschaffenheit in der Reihe T ermittelt. Bei der Entwickelung für c_α in dem Falle, der in Abh. Bd. 91, No. 2 betrachtet ist, war die Reihe T zuerst nach Potenzen von $x-a$ geordnet worden. Die dort für c_α erhaltene Reihe ist aber dieselbe wie die, welche man nach dem hier auseinandergesetzten Verfahren erhält.

II. Der Coefficient von $(x-a)^\alpha$ in der Entwickelung einer Function $\varphi(x-a)$ aus No. 1 (4.) wird durch eine Summe von Integralen (1.) in endlicher Anzahl ausgedrückt. Gemäss der Entwickelung, die in I. für dieses Integral gegeben ist, wird also dieser Coefficient in der Entwickelung von $\varphi(x-a)$ ***dargestellt durch eine einfach unendliche Reihe ganzer rationaler Functionen der in I. bezeichneten Constanten mit rationalen Zahlcoefficienten.***

III. Wenn von den Grössen μ und U in No. 1 (1.) nur vorausgesetzt wird, dass sie in einem Kreisringe um $x=a$ als Mittelpunkt in dem Bezirke von $x=a$ von der Form $(x-a)^k\psi$ sind, und ψ in diesem Gebiete einwerthig, stetig und von Null verschieden ist (s. No. 1 III.), so bleiben, wenn die Entwickelung der ψ gegeben ist, die Betrachtungen, um die Coefficienten in der Entwickelung von φ zu bestimmen, dieselben. An die Stelle der Reihenentwickelungen in I. *a*), die von den Grössen $e^{\varkappa}$, e^{u}, χ, χ_α her-

rühren, treten die von ψ durch die Summe $\sum_{0}^{\infty} c_\alpha (x-a)^\alpha + \sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha (x-a)^{-\alpha}$. Durch Multiplication erhält man eine Summe von Reihen, wie T in I. *b*), die selbst wieder eine Reihe von der Beschaffenheit von T (I. *b*) und *c*)) liefert.

3.

Die Berechnung der Functionen $\varphi(x-a)$ No. 1 (1.) und der Coefficienten in der Entwickelung derselben No. 2 mit beliebig vorgeschriebener Annäherung erhält man nach den Methoden von Abh. Bd. 91, No. 3 auf folgende Weise.

I. *a*) Es werde der Integralausdruck $f(x-a)$ aus No. 2 betrachtet. Die Functionen, auf welche sich die Integrationen beziehen, nebst dem aus μ_1 No. 1 (1.) hervorgehenden Factor seien als Product unter die Gesammtheit der Integralzeichen gestellt. Dieses Product enthält als Factoren das Product A der No. 2, in welchem der Factor $\frac{R}{2\pi i}(R\zeta)^{-\alpha-1}$ wegfällt, dasselbe sei durch $[A]$ bezeichnet, und das Product B der No. 2, in welchem $x-a$ an Stelle von $R\zeta$ steht. Die Factoren von B sind die in N. 2 I *a*) angegebenen Reihen, $x-a$ an Stelle von $R\zeta$. Jede dieser Reihen S sei in zwei Theile getheilt S' und S'', wo S' die Glieder der Reihe bis zu einem gewissen Stellenzeiger enthält, S'' die Reihe der übrigen ist. Für die in Betracht kommenden Werthe der Integrationsvariabeln und, falls die Reihe $x-a$ enthält, für die Werthe von x in einem Kreisringe um $x=a$ als Mittelpunkt innerhalb des Kreisringes, in dem $f(x-a)$ dargestellt ist, sei $\text{Mod.}S \leqq M$, $\text{Mod.}S'' \leqq \varepsilon$, so ist $\text{Mod.}S' \leqq M+\varepsilon$. Man setze in B für $S_{(\alpha)}$ ein $S'_{(\alpha)}+S''_{(\alpha)}$, alsdann $B = B'+B''$, wo $B' = S'_{(1)}S'_{(2)}\dots S'_{(g)}$ ist, wenn g Reihen S vorhanden und durch $S_{(\alpha)}$ bezeichnet sind. Dann ist B'' eine Summe von Producten in endlicher Anzahl, von denen jedes wenigstens eine Grösse $S''_{(\alpha)}$ als Factor enthält. Setzt man in den Ausdruck von B'' an Stelle von $S'_{(\alpha)}$ die bezügliche Grösse $M_{(\alpha)}+\varepsilon_{(\alpha)}$ ein, $\varepsilon_{(\alpha)}$ an Stelle von $S''_{(\alpha)}$, so erhält man einen Ausdruck η gleich oder grösser als $\text{Mod.}B''$, der wenn die ε hinreichend klein genommen sind, kleiner als eine vorgeschriebene beliebig klein gewählte Grösse wird.

Die in $f(x-a)$ vorkommenden Integrationen sind an dem Producte $[A]\,B$ auszuführen. Diese Integrationen an dem Ausdrucke $[A]\,B'$ vollzogen liefern eine Function, die durch $f'(x-a)$ bezeichnet werde. Dieselben Integrationen in Bezug auf den Ausdruck $[A]B-[A]B'=[A]B''$ genommen ergeben

eine Grösse, die $f''(x-a)$ sei, wo $f-f'=f''$ ist. α sei eine Grösse gleich oder grösser als die Werthe von Mod.$[A]$. Wenn das Product der g Grössen $M_\alpha \geqq \text{Mod.}S_\alpha$ durch τ bezeichnet wird, so ist $\text{Mod.}f \leqq \alpha\tau(2\pi)^{\sigma-1}$, wenn $(\sigma-1)$-mal in f integrirt wird nach θ durch Substitution von $e^{i\theta}$. Diese Grösse $\alpha\tau(2\pi)^{\sigma-1}$ sei durch $\{f\}$ bezeichnet. Ebenso ist $\text{Mod.}f'' \leqq \alpha\eta(2\pi)^{\sigma-1}$, diese Grösse sei durch $\{f''\}$ bezeichnet. Dann ist $\text{Mod.}f' \leqq \{f\}+\{f''\}$. Das Integral an dem Ausdrucke $[A]B'$ ausgeführt, wobei Integrationen vorkommen, die in No. 2 (3.), (4.), (5.) angegeben sind, liefert als f' ***eine ganze rationale Function von*** $x-a$ ***und*** $(x-a)^{-1}$ ***mit Coefficienten, die ganze rationale Functionen der in No. 2 nach*** (5.) ***bezeichneten Constanten mit rationalen Zahlcoefficienten sind.***

b) Es ist daher zu zeigen, wie man bei einer Reihe S die in *a*) bezeichnete Grösse M findet, und wie man einen Stellenzeiger in dieser Reihe angeben kann, so dass $\text{Mod.}S'' \leqq \varepsilon$, wenn ε beliebig klein genommen ist. Dieses ergiebt sich nach Abh. Bd. 91, No. 3, II und III. Wenn von der Summe zweier Potenzreihen

$$(1.) \qquad \sum_{0}^{\infty} c_\alpha \xi^\alpha + \sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha \xi^\alpha$$

eine positive Grösse M bekannt ist gleich oder grösser als der Modul der Reihe für Werthe ξ, bei denen $R' \leqq \text{Mod.}\xi \leqq R''$ ist, wo die Punkte R' und R'' innerhalb des Convergenzringes der Reihe liegen, $R' < R''$ ist, so ist für irgend einen Werth R, bei dem $R' \leqq R \leqq R''$, $\text{Mod.}c_\alpha \leqq \frac{M}{R_\alpha}$. Hieraus ergiebt sich

$$(2.) \qquad \text{Mod.}\sum_{n}^{\infty} c_\alpha \xi^\alpha \leqq \left(\frac{R_1''}{R''}\right)^n \frac{M}{1-\frac{R_1''}{R''}}$$

für $\text{Mod.}\xi \leqq R_1'' < R''$,

$$(3.) \qquad \text{Mod.}\sum_{-n}^{-\infty} c_\alpha \xi^\alpha \leqq \left(\frac{R'}{R_1'}\right)^n \frac{M}{1-\frac{R'}{R_1'}}$$

für $\text{Mod.}\xi \geqq R_1' > R'$. Die Grössen rechts können dadurch, dass n hinreichend gross genommen wird, beliebig klein gemacht werden, es bleibt also M zu bestimmen.

Die Reihen S in No. 2, I *a*) sind aber Reihen der Form $\sum_{0}^{\infty} c_\alpha \xi^\alpha$ oder $c_0 + \sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha \xi^\alpha$, und zwar steht in den dort angegebenen Reihen der ersten und

zweiten Art an Stelle von ξ $x-a$ oder der positive Werth einer der dort genannten Grössen R' und R'', welcher im Convergenzgebiete liegt, multiplicirt mit 1 oder einem Producte von Integrationsvariabeln, dessen Modul 1 ist. Bei den Reihen der dritten Art No. 2 (2.) steht in $\sum_0^\infty c_\alpha \xi^\alpha$ an Stelle von ξ $x-a$ oder $(x-a)^{-1}$ multiplicirt mit λ^{-1}, dessen Modul 1 ist, und einem Producte von Grössen $\frac{\log\beta}{2\pi i}$, dessen Modul gleich oder kleiner als 1 ist, dann an Stelle von $x-a$ eine Grösse, wie die, welche in den Reihen der beiden ersten Arten an Stelle von ξ steht.

Nun ist bei den Reihen der beiden ersten Arten ein Werth M zu bestimmen, gleich oder grösser als der Modul der Reihe. Man erhält einen solchen bei den Ausdrücken e^w, e^u, $c(x-a)^\alpha$ unmittelbar. Bei den Reihen für $\chi(x-a)$ und $(\chi(x-a))^{-1}$ aus μ und μ^{-1} und $\chi_\alpha(x-a)$ aus U erhält man denselben nach Abh. Bd. 91, N. 3 III p. 110—114 für die Werthe x in einem Kreise um $x=a$, der hier als Kreis mit dem Radius R_0 in No. 1 II angenommen wird. Man zieht zu dem Zwecke die Ausdrücke der Grössen $(x-a)^\varkappa\chi(x-a)$ in den μ durch die Integrale von Differentialgleichungen in Betracht, in denen bei $x=a$ reguläre Differentialausdrücke gleich Null gesetzt sind (s. No. 5). Die Factoren der Potenzen von $\log(x-a)$ in den Ausdrücken dieser Integrale genügen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten und dem charakteristischen Index gleich Null bei $x=a$, die aus den vorigen Differentialgleichungen hergeleitet werden (Abh. Bd. 87, No. 7 I) und mit Hülfe deren diese Untersuchung durchgeführt wird. Bei den Reihen der dritten Art erhält man aus den Summenausdrücken einen Werth von M, der gleich oder grösser ist als der Modul der Reihe bei der ersten Reihe für $\text{Mod.}(x-a) \leqq R'' < R_0''$, wenn man R'' statt $(x-a)\lambda^{-1}$ einsetzt, und bei der zweiten Reihe für $\text{Mod.}(x-a) \geqq R' > R_0'$, wenn man R'^{-1} statt $(x-a)^{-1}\lambda$ einsetzt.

Eine Grösse gleich oder grösser als $\text{Mod.}[A]$ kann man ohne Weiteres aufstellen (vgl. Abh. Bd. 91, No. 3 IV *d*) p. 127).

II. *a*) In einem Kreisringe um $x=a$ als Mittelpunkt erhält man also nach I $f=f'+f''$ so, dass durch passende Wahl der Stellenzeiger bei den Reihen S'' $\text{Mod.}f''$ kleiner als eine vorgeschriebene beliebig kleine Grösse gemacht werden kann. Durch Addition von Functionen f ergiebt sich die Function $\varphi=\Sigma f$. Die Summe der in diesen f vorkommenden f' sei durch $\varphi'=\Sigma f'$, die Summe der f'' durch $\varphi''=\Sigma f''$ bezeichnet, also

$\varphi = \varphi' + \varphi''$. *$\varphi'$ ist eine ganze rationale Function von $x-a$ und $(x-a)^{-1}$ mit Coefficienten, die ganze rationale Functionen der in No. 2 nach* (5.) *bezeichneten Constanten mit rationalen Zahlcoefficienten sind.* Es ist nach den Bezeichnungen von I *a*)

$$(4.) \quad \text{Mod.}\varphi \leqq \Sigma|f|, \quad \text{Mod.}\varphi'' \leqq \Sigma|f''|, \quad \text{Mod.}\varphi' \leqq \Sigma|f|+\Sigma|f''|.$$

Was ferner die Differentialquotienten von φ, φ', φ'' angeht, so erhält man Grössen gleich oder grösser als bezüglich die Moduln von $\frac{d^l\varphi}{dx^l}$, $\frac{d^l\varphi'}{dx^l}$, $\frac{d^l\varphi''}{dx^l}$ in folgender Weise (vgl. Abh. Bd. 91, No. 3 IV p. 124). Bei den Potenzreihen (1.) ist

$$(5.) \quad \text{Mod.}\frac{d^l}{d\xi^l}\sum_0^{\infty} c_\alpha \xi^\alpha \leqq 1.2\ldots l\frac{MR''}{(R''-R_1'')^{l+1}}$$

für $\text{Mod.}\xi \leqq R_1'' < R''$,

$$(6.) \quad \text{Mod.}\frac{d^l}{d\xi^l}\sum_{-1}^{-\infty} c_\alpha \xi^\alpha \leqq 1.2\ldots l\frac{MR'}{(R_1'-R')^{l+1}}$$

für $\text{Mod.}\xi \geqq R_1' > R'$.

In die Summe dieser Formeln ist also für M einzusetzen $\Sigma|f|$, $\Sigma|f''|$, $\Sigma|f|+\Sigma|f''|$, um Ausdrücke zu erhalten gleich oder grösser als bezüglich die Moduln von $\frac{d^l\varphi}{dx^l}$, $\frac{d^l\varphi''}{dx}$, $\frac{d^l\varphi'}{dx^l}$ für die Werthe x in einem Kreisringe um $x=a$ innerhalb desjenigen, in dem φ, φ', φ'' angenommen waren.

Wenn man nun eine ganze rationale Function der Integrale No. 1 (4.) und ihrer Differentialquotienten mit vorgeschriebener Annäherung zu berechnen hat (vgl. No. 4 III *a*) Schluss), so setze man $\varphi = \varphi' + \varphi''$ und berechne den Theil des vorgelegten Ausdruckes, in welchem φ' an Stelle von φ steht, in irgend einem Punkte eines Kreisringes um $x=a$ als Mittelpunkt, in welchem Kreisringe man gemäss dem Vorhergehenden den übrigen Theil des Ausdruckes durch passende Wahl der Stellenzeiger in den Reihen S'' in I *a*) dem Modul nach kleiner als eine vorgeschriebene beliebig kleine Grösse machen kann (vgl. Abh. Bd. 93, No. IV *d*)).

b) Um den Werth des Coefficienten c_α No. 2 (1.) mit vorgeschriebener Annäherung zu erhalten, hat man in der Function $f'(x-a)$ den gleichstelligen Coefficienten zu nehmen. Dieser liefert den Werth von c_α bis auf eine Grösse, deren Modul gleich oder kleiner als $A'\eta(2\pi)^\sigma$, wo A' die in No. 2 I *c*) genannte Grösse ist.

Um einen Stellenzeiger ν in der Reihe T No. 2 I *c*), der die dort angegebene Beschaffenheit hat, zu erhalten, sei der grösste Stellenzeiger in

den Reihen S' gleich ν_1 angenommen. Nimmt man dann $\nu \geqq g\nu_1$, so bleibt, wenn ν überschritten wird, der Rest der Reihe T dem Modul nach kleiner als eine Grösse δ, welche man nach I aus B'' erhält, wenn man M' statt S' einsetzt, ε statt S'', für ε die bezüglichen Werthe aus (2.), (3.) nimmt, für M' die Werthe $\frac{MR''}{R''-R_1''}$ bezüglich $\frac{MR_1'}{R_1'-R'}$.

III. Wird von den Grössen μ und U in No. 1 (1.) nur vorausgesetzt, dass sie in einem Kreisringe um $x=a$ in dem Bezirke von $x=a$ von der Form $(x-a)^\varkappa\psi$ sind, und dass ψ in diesem Gebiete einwerthig, stetig und von Null verschieden ist, so sind dieselben Betrachtungen zur Berechnung der Functionen φ und der Coefficienten in deren Entwickelung anwendbar, wofern sich ein Werth gleich oder grösser als der Modul von ψ und ψ^{-1} in diesem Kreisringe ermitteln lässt.

4.

Die Fortsetzung der Integrale der zu untersuchenden Differentialgleichung von einem Punkte zu irgend einem anderen sei auszudrücken.

I. Dazu ist zunächst in den Integralen der Umgang um einen singulären Punkt zu vollziehen.

Es werde das Integral No. 1 (1.)

$$(1.) \qquad \mu_1 \int dx\, \mu_1^{-1} \mu_2 \int \cdots \int \mu_k^{-1} U dx$$

betrachtet, wo der Ausdruck U entstanden sei aus $e^u \bar{U}$, und wo $\bar{U}$ aus

$$(2.) \qquad \bar{U}_\mathfrak{b} = \nu_1 \int dx\, \nu_1^{-1} \nu_2 \int \cdots \int \nu_{\mathfrak{b}-1}^{-1} \nu_\mathfrak{b} dx$$

für $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ hervorgeht, $\nu_\mathfrak{b}$ $(\mathfrak{b} = 1, \ldots \mathfrak{c})$ von der Form $(x-a)^{r_\mathfrak{b}-\mathfrak{b}+1} \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, c_0 von Null verschieden ist. Bei den Integrationen wird das constante Glied annullirt. Von dem Exponenten $r_\mathfrak{c}$ mögen sich $q-1$ unter den vorhergehenden Exponenten $r_\mathfrak{b}$ nur um ganze Zahlen unterscheiden, dieselben seien $r_{\mathfrak{b}_1}$ bis $r_{\mathfrak{b}_{q-1}}$, wo $\mathfrak{b}_1 > \mathfrak{b}_2 > \cdots > \mathfrak{b}_{q-1}$. Unter den μ mögen p sein, deren Exponenten $\varkappa$ in den Ausdrücken No. 1 (2.) sich von $r_\mathfrak{c}$ nur um ganze Zahlen unterscheiden. Die aus (2.) hervorgehenden Grössen, wenn an Stelle von $\mathfrak{b}$ der Reihe nach eintritt $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ bis $\mathfrak{b}_{q-1}$, seien durch $\bar{U}_q$, $\bar{U}_{q-1}$ bis $\bar{U}_1$ bezeichnet. Werden diese Grössen mit e^u multiplicirt statt U in (1.) eingesetzt, so mögen die entsprechenden Werthe von (1.) durch

y_{p+q}, y_{p+q-1} bis y_{p+1} bezeichnet sein. Wird in (1.) μ_{k+1} statt U gesetzt, und treten successive in abnehmender Reihenfolge an Stelle von $k+1$ die Stellenzeiger derjenigen μ, in denen die Exponenten x sich von r_c um ganze Zahlen unterscheiden, so mögen die erhaltenen Werthe (1.) durch y_p bis y_1 bezeichnet werden.

a) Wenn nun Y ein Ausdruck der Form No. 1 (4.) ist, so werde das Resultat des Umganges um $x=a$ durch $[Y]$ bezeichnet und bei dem Integrale $\int Y dx$, in welchem das constante Glied in der Entwickelung (Integrationsconstante) annullirt wird, das Resultat des Umganges durch $\left[\int Y dx\right]$. Dann ist

$$(3.) \qquad \left[\int Y dx\right] = \int [Y] dx + c,$$

wo die Integrationsconstante in $\int [Y] dx$ annullirt wird, c das constante Glied in der Entwickelung von $\left[\int Y dx\right]$ ist. Wenn der Exponent ϱ in der Entwickelung von Y No. 1 (4.) nicht ganzzahlig ist, so wird c gleich Null. Diese Formel wird successive zunächst auf das Integral (2.), dann auf (1.) angewandt. Die Constante c wird dadurch bestimmt, dass in der Entwickelung des jedesmaligen Ausdruckes $\int Y dx$ der Umgang vorgenommen und das constante Glied ermittelt wird. Es werde der Umgang in positiver Richtung betrachtet, derjenige in entgegengesetzter Richtung ist auf dieselbe Weise zu behandeln.

Man hat

$$(4.) \qquad [\nu_{c-1}^{-1}\nu_c] = e^{2\pi i(r_c - r_{c-1} - 1)}\nu_{c-1}^{-1}\nu_c.$$

Daher

$$(5.) \qquad \left[\int \nu_{c-1}^{-1}\nu_c dx\right] = e^{2\pi i(r_c - r_{c-1} - 1)}\int \nu_{c-1}^{-1}\nu_c dx + k_1.$$

Ferner ist

$$(6.) \qquad \begin{cases} [\nu_{c-2}^{-1}\nu_{c-1}] = e^{2\pi i(r_{c-1} - r_{c-2} - 1)}\nu_{c-2}^{-1}\nu_{c-1}, \\ \left[\nu_{c-2}^{-1}\nu_{c-1}\int \nu_{c-1}^{-1}\nu_c dx\right] = e^{2\pi i(r_c - r_{c-2} - 2)}\nu_{c-2}^{-1}\nu_{c-1}\int \nu_{c-1}^{-1}\nu_c dx \\ \qquad\qquad + k_1 e^{2\pi i(r_{c-1} - r_{c-2} - 1)}\nu_{c-2}^{-1}\nu_{c-1}. \end{cases}$$

Daher

$$(7.) \qquad \begin{cases} \left[\int dx \nu_{c-2}^{-1}\nu_{c-1}\int \nu_{c-1}^{-1}\nu_c dx\right] = e^{2\pi i(r_c - r_{c-2} - 2)}\int dx \nu_{c-2}^{-1}\nu_{c-1}\int \nu_{c-1}^{-1}\nu_c dx \\ \qquad\qquad + k_1 e^{2\pi i(r_{c-1} - r_{c-2} - 1)}\int \nu_{c-2}^{-1}\nu_{c-1} dx + k_2. \end{cases}$$

Indem man so fortfährt, erhält man

$$(8.) \quad [\bar{U}_q] = e^{2\pi i r_c}\{\bar{U}_q + k_{c-b_1}\bar{U}_{q-1} + k_{c-b_2}\bar{U}_{q-2} + \cdots + k_{c-b_{q-1}}\bar{U}_1\}.$$

Die Constanten k_{c-b_1} bis $k_{c-b_{q-1}}$ ergeben sich (vgl. Abh. Bd. 83 p. 156) als ganze rationale Functionen von $2\pi i$ (nullter oder höherer Ordnung), deren Coefficienten ganze rationale Functionen von Constanten in den Grössen $\nu_b(x-a)^{-r_b+b-1}$ und $\nu_b^{-1}(x-a)^{r_b-b+1}$ und von Constanten $(r_c-r_b+\mathfrak{a})^{-1}$, wo r_c-r_b nicht ganzzahlig, $\mathfrak{a}$ ganzzahlig ist, mit rationalen Zahlcoefficienten sind. Dasselbe Verfahren wird nun weiter auf (1.) angewandt, wo $U = e^u\bar{U}_q$ ist, indem der Ausdruck (8.) gebraucht wird. Man erhält

$$(9.) \quad [y_{p+q}] = e^{2\pi i r_c}\{y_{p+q} + k_{c-b_1}y_{p+q-1} + \cdots + k_{c-b_{q-1}}y_{p+1} + l_1 y_p + \cdots + l_p y_1\},$$

wo nun noch die Constanten l_1 bis l_p zu bestimmen sind. Das zur Bestimmung von $l_\mathfrak{a}$ gemäss (3.) in Betracht kommende Integral $\int Y dx$ ist eine Summe von Ausdrücken von der Art des Ausdruckes No. 1 (33.) für die positiven ganzen Zahlen $n = 0$ bis $n = s+\mathfrak{a}-1$, wo s der höchste Exponent von $\log(x-a)$ in der Entwickelung von U_q ist. In einem Ausdrucke No. 1 (33.) in dieser Summe, der dem Werthe n entspricht, werde der Coefficient von $(\log(x-a))^{n+1}$ gleich $\frac{1}{n+1}\int_1' \frac{d\lambda R}{2\pi i}\Psi_n(R\lambda)$ gesetzt. Bei einem Umgange um $x = a$ in diesem Ausdrucke ergiebt sich das constante Glied gleich diesem Coefficienten multiplicirt mit $(2\pi i)^{n+1}$. Also wird

$$(10.) \quad l_\mathfrak{a} = \sum_{n=0}^{n=s+\mathfrak{a}-1} \frac{(2\pi i)^{n+1}}{n+1}\int_1' \frac{d\lambda R}{2\pi i}\Psi_n(R\lambda).$$

Es wird also jeder der Coefficienten l_1 bis l_p durch eine ganze rationale Function von $2\pi i$, in welcher die Coefficienten bestimmte Integrale sind, ausgedrückt. Dieselben werden nach No. 2 entwickelt durch eine Reihe ganzer rationaler Functionen gegebener Constanten, und der Werth dieser Integrale wird nach No. 3 II *b*) mit beliebig vorgeschriebener Annäherung berechnet.

b) Nimmt man von y_{p+q} bis y_1 die Entwickelungen der Form No. 1 (4.), setzt man diese in (9.) ein, und bildet man die Entwickelung von $[y_{p+q}]$ und setzt auf beiden Seiten die Factoren gleich hoher Potenzen von $\log(x-a)$ einander gleich, so erhält man die Factoren der Potenzen von $\log(x-a)$ in y_{p+q}, deren Exponenten gleich oder grösser als Eins sind, homogen und linear durch die Factoren der Potenzen von $\log(x-a)$ aus y_{p+q-1} bis y_1 ausgedrückt mit constanten Coefficienten, die bekannt sind.

II. Es wird ferner um den Uebergang der Integrale von einem Punkte zu einem anderen zu vermitteln (s. III) in die Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $F_m(y, x) = 0$ eine rationale Substitution ersten Grades $x = R(\xi)$ eingesetzt (vgl. Abh. Bd. 87, No. 1), bei welcher dem Punkt $x = a$ im Endlichen der Punkt $\xi = a'$ im Endlichen entsprechen soll.

$$(11.) \quad x-a = \frac{h(\xi-a')}{1-k(\xi-a')}, \quad \xi-a' = \frac{\frac{1}{h}(x-a)}{1+\frac{k}{h}(x-a)}.$$

Es ist

$$(12.) \quad F_m(y, x) = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-m} G_m(y, \xi).$$

Diese Substitution (11.) wird in den Ausdruck No. 1 (4.) des Integrales No. 1 (1.) eingeführt. Dadurch geht der Ausdruck No. 1 (4.) über in

(13.) $(\xi-a')^{\varrho+c}\{\Phi_1(\xi-a')+\Phi_2(\xi-a')\log(\xi-a')+\cdots+\Phi_t(\xi-a')(\log(\xi-a'))^{t-1}\}$.

Aus No. 1 (4.) wird zunächst hergeleitet, dass die Functionen Φ in der Nähe von $\xi = a'$, abgesehen von diesem Punkte einwerthig und stetig sind. Dieselben bleiben aber abgesehen von $\xi = a'$ einwerthig und stetig jedenfalls in dem Bezirke von $\xi = a'$ bei der Differentialgleichung $G_m(y, \xi) = 0$ und haben dort Entwickelungen, die durch die Summe zweier Potenzreihen, von denen die eine nach Potenzen von $\xi-a'$ mit positiven, die andere mit negativen ganzzahligen Exponenten fortschreitet, gegeben werden. (Abh. Bd. 87, No. 1; siehe auch hier *b*)). Diese Entwickelungen sind aufzustellen.

a) Aus der Differentialgleichung $G_m(y, \xi) = 0$ leitet man eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 her, welcher die Functionen Φ genügen. Dieselbe liefert für die Coefficienten von Φ eine Recursionsformel mit constanter Anzahl der Glieder, die nicht identisch verschwinden, (vgl. N. 2). Es ist also eine endliche Anzahl dieser Coefficienten aufzustellen.

Ein Kreis K um $x = a$ als Mittelpunkt in dem Bezirke von $x = a$ bei $F_m(y, x) = 0$ sei so gewählt, dass in demselben $\text{Mod.}\left(\frac{k}{h}(x-a)\right) < 1$ bleibt. Es ist

$$(14.) \quad 1-k(\xi-a') = \left(1+\frac{k}{h}(x-a)\right)^{-1},$$

daher ist das entsprechende Gebiet von ξ ein endliches, welches von einem

Kreise, in dem $\xi = a'$ liegt, begrenzt wird (Abh. Bd. 87, No. 1). Es sind nun die Functionen $(1-k(\xi-a'))^{-(\varrho+c)}$ und $[\log(1-k(\xi-a'))]^n$, wo n ganzzahlig und positiv, in diesem Gebiete von ξ einwerthig und stetig; und wenn in einer Function $\varphi(x-a)$ in No. 1 (4.) für $x-a$ sein Ausdruck durch ξ gesetzt wird, so erhält man eine Function von ξ, die in demselben Gebiete, abgesehen von $\xi = a'$ einwerthig und stetig ist. Demnach ist das Product der drei letztgenannten Functionen ebenso beschaffen. Eine Summe solcher Producte, dieselben noch multiplicirt mit Constanten C, die gleich $e^{(\varrho+c)\log h}$ multiplicirt mit einer ganzen rationalen Function von $\log h$ mit rationalen Zahlcoefficienten sind, bildet eine Function $\Phi(\xi-a')$. Multiplicirt man $\Phi(\xi-a')$ mit $\frac{(\xi-a')^{-\alpha-1}}{2\pi i}$ und integrirt über irgend einen Kreis um $\xi = a'$ in dem betrachteten Gebiete in positiver Richtung, so erhält man den Coefficienten von $(\xi-a')^\alpha$ in der Reihenentwickelung von $\Phi(\xi-a')$. Man kann über einen solchen Kreis nach ξ integriren, der einem Kreise in der x-Ebene um $x = a$ als Mittelpunkt entspricht. Führt man in dieses Integral statt ξ wieder x ein, indem man noch mit $\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{h}\left(1+\frac{k}{h}(x-a)\right)^{-2}$ multiplicirt, so hat man nach x über einen Kreis um $x = a$ als Mittelpunkt in positiver Richtung zu integriren. Es werde

$$(15.)\quad (-1)^n h^\alpha \left(1+\frac{k}{h}(x-a)\right)^{\varrho+c+\alpha+1-2}\left(\log\left(1+\frac{k}{h}(x-a)\right)\right)^n = g(x-a)$$

gesetzt. $g(x-a)$ ist in dem Kreise K durch eine Reihe der Form

$$(-1)^n h^\alpha\left(1+\sum_1^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha\right)$$

entwickelbar. Nun hat man das Integral in Bezug auf eine Function $\varphi(x-a)g(x-a)\frac{(x-a)^{-\alpha-1}}{2\pi i}$ zu nehmen. Die Function $\varphi(x-a)$ ist nach No. 1 dargestellt als eine Summe von bestimmten Integralen $f(x-a)$; dieselben werden in einem Kreisringe in dem Kreise K genommen. Die Grösse unter den Integralzeichen in einem solchen Integrale wird, indem $x-a = R\zeta$ gesetzt ist, entwickelt durch die in No. 2 angegebene Reihe T multiplicirt mit der dort genannten Grösse A, worin $\frac{(R\zeta)^{-\alpha-1}}{2\pi i}$ weggelassen ist. Wird diese Reihe nun in den einzelnen Gliedern mit $g(R\zeta)\frac{(R\zeta)^{-\alpha-1}}{2\pi i}$ multiplicirt, so bleibt dieselbe in gleichem Grade convergent und kann, wie in No. 2 angegeben ist, in den einzelnen Gliedern integrirt werden. Bei

der Integration des einzelnen Gliedes fallen dann alle Integrale bis auf diejenigen, die ζ^{-1} enthalten, aus. Man erhält also eine einfach unendliche Reihe ganzer rationaler Functionen der in No. 2 nach (5.) genannten Constanten und der Constanten ϱ, h, h^{-1}, k mit rationalen Zahlcoefficienten. Eine Summe solcher Reihen in endlicher Anzahl stellt das oben genannte Integral dar. Diese letztere Reihe ist noch mit einer Constanten C zu multipliciren, dann stellt eine Summe dieser Grössen in endlicher Anzahl den gesuchten Coefficienten von $(\xi-a')^{\alpha}$ in $\Phi(\xi-a')$ dar.

Um den Werth des vorhin genannten Integrales mit vorgeschriebener Annäherung zu berechnen, hat man die in No. 3 II *b*) bezeichnete ganze rationale Function von $x-a$ und $(x-a)^{-1}\ f'(x-a)$ noch mit $g(x-a)$ zu multipliciren und den Coefficienten von $(x-a)^{\alpha}$ zu nehmen, wodurch man den Werth erhält bis auf eine Grösse, die dem Modul nach gleich oder kleiner als die dort genannte Grösse $A'\eta(2\pi)^{\sigma}$ multiplicirt mit γ ist, wenn γ ein Werth ist gleich oder grösser als $\mathrm{Mod.}g(R\zeta)$. In derselben Weise, wie dort angegeben ist, bestimmt man dann auch einen Stellenzeiger ν von der dort angegebenen Beschaffenheit in der Reihe T.

b) Man kann auch $x = R(\xi)$ in das Integral No. 1 (1.) einführen, wodurch man

$$(16.)\qquad \mu_1 \int d\xi\, \mu_1^{-1}\mu_2 \frac{dx}{d\xi} \int \cdots \int d\xi\, \mu_{k-1}^{-1}\mu_k \frac{dx}{d\xi} \int \mu_k U \frac{dx}{d\xi}\, d\xi$$

erhält. Wenn die einzelnen Integrale

$$(17.)\qquad \mu_1,\quad \mu_1 \int \mu_1^{-1}\mu_2\, dx,\quad \text{etc.}$$

der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ genügen, so müssen die aus diesen hervorgehenden Integrale, in denen $x = R(\xi)$ gesetzt ist,

$$(18.)\qquad \mu_1,\quad \mu_1 \int \mu_1^{-1}\mu_2 \frac{dx}{d\xi}\, dx,\quad \text{etc.}$$

die Differentialgleichung $G_m(y, \xi) = 0$ erfüllen. Diese Integrale seien in einem Kreise um $\xi = a'$ als Mittelpunkt genommen, in welchem die mit $(\xi-a)^{\varkappa}$ multiplicirten Grössen in den μ, so wie $\frac{dx}{d\xi}$ einwerthig, stetig und von Null verschieden sind, die mit $(\xi-a')^{\varrho}$ und einer Potenz von $\log(\xi-a')$ multiplicirten Grössen in U einwerthig und stetig sind. Werden die Integrale (18.) in dem Kreise entwickelt, so sind bei den Integrationen Constanten zuzufügen. Da aber aus den erhaltenen Ausdrücken auch bei beliebigen Integrationsconstanten sich wieder Integrale der Differentialgleichung zu-

sammensetzen, so genügen die Entwickelungen (18.), auch wenn die Integrationsconstanten jedesmal annullirt werden, der Differentialgleichung $G_m(y, \xi) = 0$. Nimmt man in letzteren Entwickelungen den Umgang um $\xi = a'$ vor, so erhält nach den Betrachtungen von No. 4 I *a*) das Resultat die Form (9.). Aus derselben folgen, wenn die Integrale in dem Kreise auf die Form (13.) gebracht sind, die in No. 4 I *b*) angegebenen Relationen, und aus letzteren ergiebt sich successive in derselben Weise wie bei einem beliebigen singulären Punkte (Abh. Bd. 75, No. 8), dass in den Ausdrücken dieser Integrale von der Form (13.) die Grössen Φ in dem Bezirke von $\xi = a'$ abgesehen von diesem Punkte einwerthig und stetig sind. Durch die Summe solcher Integrale (18.) multiplicirt mit constanten Factoren wird das Integral (16.) dargestellt.

Die letzteren constanten Factoren kann man dadurch bestimmen, dass man successive die Integrale

$$(19.) \qquad \int \mu_k^{-1} U dx, \quad \int dx \mu_{k-1}^{-1} \mu_k \int \mu_k^{-1} U dx, \quad \text{etc.}$$

entwickelt, in die Entwickelung $x = R(\xi)$ einführt und das constante Glied nach *a*) bestimmt. Dieses sind die gesuchten constanten Factoren; dieselben können nur dann von Null verschieden sein, wenn die Exponenten in der Entwickelung eines Integrales (19.) ganzzahlig sind (vgl. Abh. Bd. 87, No. 2 II).

c) Sind die Integrale von $F_m(y, x) = 0$ bei $x = a$ regulär, so kann man in die Entwickelungen derselben $x = R(\xi)$ einsetzen und dieselben auch durch andere Integrale von $G_m(y, \xi) = 0$ ausdrücken, indem man die Gleichung $(m-1)$-mal differentiirt, nach den Constanten auflöst und den Grenzübergang zu $\xi = a'$ bildet, s. Abh. Bd. 87, No. 2 I.

III. *a*) Die rationale Substitution ersten Grades $x = R(\xi)$ wird angewandt, um den Uebergang der Integrale der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ von einem singulären Punkte zu einem anderen singulären Punkte im Endlichen zu vermitteln, wenn diese beiden Punkte a und b in einem Kreise liegen, ausserhalb welches die übrigen singulären Punkte sich finden, jedoch dürfen ausserwesentlich singuläre Punkte der Differentialgleichung auf oder in diesem Kreise liegen. Dieser Kreis wird durch $x = R(\xi)$ conform auf den Kreis in der ξ-Ebene um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 abgebildet, so dass dem Punkte $x = a$ der Punkt $\xi = 0$, dem Punkte $x = b$ der Punkt $\xi = 1$ entspricht. Soll der Uebergang von $x = \infty$ zu einem Punkte x_0 im Endlichen vollzogen werden, der ausserhalb eines Kreises

liegt, in dem die übrigen singulären Punkte (abgesehen von ausserwesentlich singulären Punkten) liegen, so seien die Integrale bei $x = \infty$ als Functionen von $t = \frac{1}{x}$ aufgestellt. Es ist (Abh. Bd. 87, No. 1, Schluss) $x = u + x_1$ zu setzen, wo x_1 ein Punkt innerhalb dieses Kreises ist und $u = \frac{1}{t'}$. Den Punkten $x = \infty$ und $x = x_0$ entsprechen $t' = 0$ und $t' = \frac{1}{x_0 - x_1}$, die sich rücksichtlich der übrigen singulären Punkte in der Lage der Punkte a und b befinden. Wendet man nun die Substitution $t' = R(\xi)$ der oben angegebenen Beschaffenheit an, so ist t und x durch rationale Substitutionen erster Ordnung in ξ ausgedrückt, bei welchen den Punkten $t = 0$ und $x = x_0$ Punkte im Endlichen entsprechen, so dass man auf das Vorige zurückkommt.

In der von ξ abhängenden Differentialgleichung $G_m(y, \xi) = 0$ enthält der Kreis um $\xi = 0$ als Mittelpunkt mit dem Radius 1 abgesehen von $\xi = 0$ und $\xi = 1$ keine oder höchstens ausserwesentlich singuläre Punkte, da einem nichtsingulären Punkte der ursprünglichen Differentialgleichung ein nichtsingulärer der durch eine rationale Substitution ersten Grades transformirten entspricht, daher einem ausserwesentlich singulären Punkte der einen ein solcher der anderen. Aus den linearen Relationen zwischen den Functionen, die mit Potenzen des Logarithmus in der Entwickelung des Integrals bei $\xi = 0$ multiplicirt sind (Abh. Bd. 87, No. 1) und aus der Beschaffenheit der Integrale bei einem ausserwesentlich singulären Punkte der Differentialgleichung folgt, dass die Entwickelung eines Integrales bei $\xi = 0$ unter der Form (13.) in dem Kreise mit dem Radius 1 gilt. Dieses Integral wird durch die Integrale bei $\xi = 1$ linear mit constanten Coefficienten ausgedrückt. Wird diese Gleichung $(m-1)$-mal differentiirt, alsdann das Gleichungssystem nach den Constanten aufgelöst, so erhält man durch die gegebenen Entwickelungen der Integrale die Ausdrücke der Constanten in einem nichtsingulären Punkte (Abh. Bd. 87, No. 3 (3.)). Die Differentialdeterminante Δ der von ξ abhängenden Integrale ergiebt sich aus der Differentialdeterminante D der von x abhängenden Integrale in dem entsprechenden Punkte (Abh. Bd. 87, No. 5 (10.)):

$$(20.) \qquad \Delta = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{\frac{m(m-1)}{2}} D.$$

In Betreff des Ausdruckes von D s. No. 5 II *b*. Sind bei $x = a$ und $x = b$ und daher auch bei $\xi = 0$ und $\xi = 1$ die Integrale regulär, so kann man

nach Abh. Bd. 87 die Ausdrücke für die Constanten dadurch vereinfachen, dass man den Grenzübergang auf $\xi = 1$ vollzieht und Reihen herstellt, die in diesem Punkte selbst convergiren.

Der Uebergang von einem nichtsingulären Punkt zu einem singulären geschieht in derselben Weise.

Die beliebig angenäherte Berechnung der Constanten geschieht (s. Abh. Bd. 91, No. 4), indem die Werthe der von x abhängenden Integrale und ihrer $m-1$ ersten Ableitungen in einem nichtsingulären Punkte in dem Bezirke von $x = a$ und in einem nichtsingulären Punkte in dem Bezirke von $x = b$ gemäss No. 3 berechnet werden. Alsdann sind noch bei dem Uebergange eines bei einem nichtsingulären Punkte entwickelten Integralsystems zu einem anderen nichtsingulären Punkte die Constanten in den linearen Verbindungen der bei letzterem Punkte entwickelten Integrale zu berechnen, was wieder unter Anwendung einer rationalen Substitution ersten Grades geschieht. Bei einer Differentialgleichung, deren Integrale die ursprüngliche Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ erfüllen (s. No. 5 V), braucht man, um letztere Berechnung durchzuführen, die neu hinzutretenden singulären Punkte, die für jene Differentialgleichung ausserwesentliche sind, nicht zu kennen, indem man zu dem angegebenen Zwecke die ursprüngliche Differentialgleichung zu Hülfe zieht nach Abh. Bd. 91, No. 4 III *b*).

b) Die Darstellung des Resultates der Fortsetzung der Integrale von einem Punkte zu irgend einem anderen reducirt sich auf eine Zusammensetzung der Substitutionen von Constantensystemen, die sich nach I und III *a*) ergeben, wie dies in den Abh. Bd. 87, No. 6, Bd. 91, No. 4 und p. 345 weiter ausgeführt ist.

IV. Wenn von den Grössen μ und U in No. 1 (1.) vorausgesetzt wird, dass man in einem Kreise um $x = a$ in dem Bezirke dieses Punktes einen Kreisring um $x = a$ als Mittelpunkt annehmen kann, in welchem diese Grössen von der Form $(x-a)^t\psi$, die ψ einwerthig, stetig und von Null verschieden sind und die Entwickelung derselben gegeben ist, so bleiben die Betrachtungen aus I, II *a*) und die Folgerungen aus III ungeändert.

5.

Es sei nun die Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ vorgelegt, worin der Differentialausdruck

$$(1.) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = F_m(y, x)$$

rationale Functionen als Coefficienten besitzt.

I. Der Differentialausdruck $F_m(y, x)$ wird nach Abh. Bd. 91, No. 8 in *canonischer Form* dargestellt. Es wird also für $F_m(y, x)$ die Darstellung durch das System homogener linearer Differentialausdrücke mit rationalen Coefficienten gegeben

$$(2.) \qquad F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{(2)}(y_1, x) = y_2, \quad \ldots \quad F_{(\nu)}(y_{\nu-1}, x) = s, \quad F_{m-N}(s, x),$$

welches folgende Eigenschaften besitzt.

Werden Differentialgleichungen genommen, in denen normale Differentialausdrücke mit übereinstimmenden determinirenden Factoren gleich Null gesetzt sind, deren Integrale $F_m = 0$ erfüllen, so kann es von allen solchen Differentialgleichungen nur eine geben, welche die höchste Ordnung hat. Alle derartigen Differentialgleichungen von letzterer Eigenschaft mit unter einander verschiedenen determinirenden Factoren seien aufgestellt. Die Integrale derselben sind unter einander linear-unabhängig. Diese Integrale werden in der homogenen linearen Differentialgleichung $F_{(1)}(y, x) = 0$ vereinigt, wo $F_{(1)}$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist. Alsdann wird $F_m(y, x)$ auf die Form

$$(3.) \qquad F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{m'}(y_1, x)$$

gebracht. $F_{(1)}$ ist nun der erste canonische Bestandtheil von F_m. Dann wird in derselben Weise der erste canonische Bestandtheil von $F_{m'}(y_1, x)$ aufgestellt. Derselbe wird der zweite canonische Bestandtheil von F_m, $F_{(2)}(y_1, x)$. Dieses Verfahren ist fortzusetzen, bis man zu einem Differentialausdruck $F_{m-N}(s, x)$ von der Ordnung $m-N$ $(N \geqq 0)$ gelangt, bei welchem entweder $m-N=0$ ist, so dass er sich auf s reducirt, oder der die Eigenschaft hat, dass in $F_{m-N}(s, x) = 0$ nicht mehr die Integrale einer Differentialgleichung in der ein normaler Differentialausdruck gleich Null gesetzt ist, enthalten sind, und der dann der letzte canonische Bestandtheil von F_m ist. $F_{(1)}$ bis $F_{(\nu)}$ sind (Abh. Bd. 91, No. 8) die normalen canonischen Bestandtheile, F_{m-N}, $m-N > 0$, ist der nichtnormale canonische Bestandtheil von F_m genannt worden.

Die canonische Form (2.) von $F_m(y, x)$ besteht, wie sich aus dem Vorigen ergiebt, nur auf *eine* Weise.

Zugleich ist die Darstellung von $F_m(y, x)$ unter der Form

$$(4.) \qquad \Phi_N(y, x) = s, \quad F_{m-N}(s, x),$$

in welcher der Differentialausdruck Φ_N durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar ist, und die Ordnung von F_{m-N} entweder gleich Null ist, oder $F_{m-N} = 0$ nicht mehr die Integrale einer Differentialgleichung mit normalem Differentialausdrucke enthält, nur so möglich, dass es nur *einen* Differentialausdruck Φ_N dieser Art giebt ($N \geqq 0$), und daher auch nur *einen* Differentialausdruck $F_{m-N}(s, x)$.

Das System

$$(5.) \qquad F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{(2)}(y_1, x) = y_2, \quad \ldots \quad F_{(\nu)}(y_{\nu-1}, x)$$

ist also eine Darstellung des Differentialausdruckes $\Phi_N(y, x)$.

Wenn ein System linear-unabhängiger Integrale einer Differentialgleichung durch die Integrale mehrerer Differentialgleichungen gebildet wird, in denen normale Differentialausdrücke mit von einander verschiedenen determinirenden Factoren gleich Null gesetzt sind, so giebt es zu der ursprünglichen Differentialgleichung nur *ein* System solcher Differentialgleichungen. Dieselben sind in Abh. Bd. 91, No. 9 die ***Hauptunterdifferentialgleichungen*** der ursprünglichen Differentialgleichung genannt worden. Indem also die canonische Form (2.) von $F_m(y, x)$ hergestellt wird, werden die Hauptunterdifferentialgleichungen von $F_{(1)} = 0$ bis $F_{(\nu)} = 0$ aufgestellt.

Hier soll nun vorausgesetzt werden, dass der Ausdruck $F_{m-N}(s, x)$ sich auf s reducirt. Es ist dann also $F_m(y, x)$ durch ein System normaler Differentialausdrücke darstellbar.

Nun sind die Integrale der Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ zu untersuchen. Besteht F_m nur aus einem normalen canonischen Bestandtheile $F_{(1)}$, so kommt diese Untersuchung auf die Betrachtung der Integrale der Hauptunterdifferentialgleichungen von $F_{(1)} = 0$ hinaus. Hierüber s. Abh. Bd. 91, No. 9 I.

Es wird also vorausgesetzt, dass F_m mehr als einen normalen canonischen Bestandtheil enthalte.

II. ***Die Integrale von $F_m = 0$ werden bei einem singulären Punkte dieser Differentialgleichung $x = a$ im Endlichen aufgestellt.***

a) Bei jedem canonischen Bestandtheile werden die Integrale derjenigen Hauptunterdifferentialgleichungen in einer homogenen linearen Differentialgleichung vereinigt, die denselben zu dem Punkte $x = a$ gehörenden determinirenden Factor enthalten (Abh. Bd. 91, No. 5 I), bei denen also in den determinirenden Factoren e^W der normalen Ausdrücke, die Glieder in den rationalen Functionen W, die für $x = a$ unendlich werden, überein-

stimmen. Die hierdurch erhaltenen Differentialgleichungen (vgl. Abh. Bd. 83, No. 7 IV *a*), Bd. 91, No. 6 *a*)) seien bei dem r^{ten} canonischen Bestandtheile

$$(6.) \qquad F_{r1} = 0, \quad F_{r2} = 0, \quad \ldots \quad F_{rk_r} = 0.$$

Die k_r Ausdrücke F_{r1} bis F_{rk_r} sind bei $x = a$ normale Differentialausdrücke mit von einander verschiedenen zu $x = a$ gehörenden determinirenden Factoren. Die Integrale der Differentialgleichung $F_{r\alpha} = 0$, deren Ordnung durch $\alpha_{r\alpha}$ bezeichnet ist, werden unter der Form aufgestellt

$$(7.) \qquad \mu_1^{(r\alpha)} \int dx (\mu_1^{(r\alpha)})^{-1} \mu_2^{(r\alpha)} \int \cdots \int (\mu_{\mathfrak{b}-1}^{(r\alpha)})^{-1} \mu_{\mathfrak{b}}^{(r\alpha)} dx, \qquad (\mathfrak{b} = 1, \ldots \alpha_{r\alpha})$$

$\mu_{\mathfrak{b}}^{(r\alpha)} = e^{w_{r\alpha}} \nu_{\mathfrak{b}}^{(r\alpha)}$, wo $w_{r\alpha}$ gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\mathfrak{a}}(x-a)^{-\mathfrak{a}}$ ist, $\nu_{\mathfrak{b}}^{(r\alpha)}$ von der Form $(x-a)^{\varepsilon_{\mathfrak{b}}-\mathfrak{b}+1} \sum_0^\infty c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}$, Mod. $c_0 \gtrless 0$. Die Exponenten $\varepsilon_{\mathfrak{b}}$ ($\mathfrak{b} = 1, \ldots \alpha_{r\alpha}$) sind hierbei so angeordnet, dass diejenigen, welche sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, auf einander folgen, und unter letzteren die vorhergehende einen reellen Theil hat, der nicht kleiner als der der folgenden ist. In den Reihen $\sum_0^\infty c_{\mathfrak{a}}(x-a)^{\mathfrak{a}}$ in den ν, ist alsdann $c_{\mathfrak{a}} = c_0 k_{\mathfrak{a}}$ und $k_{\mathfrak{a}}$ eindeutig bestimmt, c_0 kann gleich 1 gesetzt werden. Diese Reihen convergiren in einem gewissen Kreise um $x = a$ (vgl. Abh. Bd. 83, No. 9 (14.)). In (7.) wird die jedesmalige Integrationsconstante annullirt. Nun seien die Integrale der Differentialgleichungen $F_{r1} = 0$, $F_{r2} = 0$ bis $F_{r(\alpha-1)} = 0$ in einer Differentialgleichung $G_{r(\alpha-1)} = 0$ vereinigt, in welcher der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 ist. Werden die Integrale von $F_{r\alpha} = 0$ und $G_{r(\alpha-1)} = 0$ in einer Differentialgleichung vereinigt, so sei dieselbe

$$(8.) \qquad G_{r(\alpha-1)}(y, x) = y_1, \quad \varphi_{r\alpha}(y_1, x) = 0,$$

in $\varphi_{r\alpha}$ ist der Coefficient der höchsten Ableitung gleich 1 gesetzt. Es sollen nun die $\alpha_{r\alpha}$ Integrale (7.) in $G_{r(\alpha-1)}(y, x)$ eingesetzt werden. $G_{r(\alpha-1)}(e^{w_{r\alpha}} y, x)$ sei gleich $e^{w_{r\alpha}} f(y, x)$ gesetzt. Dann hat man in $f(y, x)$ die $\alpha_{r\alpha}$ Integrale

$$(9.) \qquad \nu_1^{(r\alpha)} \int dx (\nu_1^{(r\alpha)})^{-1} \nu_2^{(r\alpha)} \int \cdots \int (\nu_{\mathfrak{b}-1}^{(r\alpha)})^{-1} \nu_{\mathfrak{b}}^{(r\alpha)} dx, \qquad (\mathfrak{b} = 1, \ldots \alpha_{r\alpha})$$

einzusetzen. Man erhält dadurch $\alpha_{r\alpha}$ linear-unabhängige Functionen, so dass man dem Resultate die Form geben kann

$$(10.) \qquad f(y, x) = \sigma_1 \int dx \sigma_1^{-1} \sigma_2 \int \cdots \int \sigma_{\mathfrak{b}-1}^{-1} \sigma_{\mathfrak{b}} dx, \qquad (\mathfrak{b} = 1, \ldots \alpha_{r\alpha})$$

wo nun die Ausdrücke der σ zu bestimmen sind. Es ergiebt sich

$$(11.) \qquad f(\nu_1^{(r\alpha)}, x) = \sigma_1.$$

Wird $\sigma_1 \frac{d}{dx} \sigma_1^{-1} f(u, x)$ oder

$$(12.) \qquad f(u, x) = \sigma', \quad \frac{d\sigma'}{dx} - \frac{d \log \sigma_1}{dx} \sigma' = g(u, x)$$

gesetzt, so folgt, weil $g(\nu_1^{(r\alpha)}, x) = 0$ ist,

$$(13.) \qquad \frac{du}{dx} - \frac{d \log \nu_1^{(r\alpha)}}{dx} u = u_1, \quad f_1(u_1, x) = g(u, x).$$

Setzt man daher in $g(u, x)$ die Integrale (9.) für $\mathfrak{b} = 2, \ldots \alpha_{r\alpha}$ ein, so ergiebt sich, dass wenn man in $f_1(u_1, x)$

$$(14.) \qquad \nu_2^{(r\alpha)} \int dx (\nu_2^{(r\alpha)})^{-1} \nu_3^{(r\alpha)} \int \cdots \int (\nu_{\mathfrak{b}-1}^{(r\alpha)})^{-1} \nu_{\mathfrak{b}}^{(r\alpha)} dx, \qquad (\mathfrak{b} = 2, \ldots \alpha_{r\alpha})$$

einsetzt, man erhält

$$(15.) \qquad f_1(u_1, x) = \sigma_2 \int dx \, \sigma_2^{-1} \sigma_3 \int \cdots \int \sigma_{\mathfrak{b}-1}^{-1} \sigma_{\mathfrak{b}} dx.$$

Es ergiebt sich nun

$$(16.) \qquad f_1(\nu_2^{(r\alpha)}, x) = \sigma_2,$$

und man hat weiter mit $f_1(u, x)$ zu verfahren wie mit $f(u, x)$ u. s. w. Vgl. bei diesen Untersuchungen Abh. Bd. 83, No. 7 V p. 136, No. 2 II p. 94.

Der charakteristische Index in $f(y, x) = 0$ bei $x = a$ ist gleich der Ordnung dieser Differentialgleichung, weil die determinirenden Factoren bei $x = a$ in F_{r1} bis F_{rk_r} von einander verschieden sind, und F_{rc} durch ein System normaler Ausdrücke darstellbar ist, welches einem System, durch das φ_{rc} dargestellt wird, ähnlich ist. (Abh. Bd. 83, No. 7 IV *a*)). Daraus folgt weiter, dass der charakteristische Index in $f = 0$, $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ etc. ein und derselbe ist gleich der Ordnung dieser Differentialgleichungen und zwar ist das Anfangsglied in der Entwickelung des Coefficienten des letzten Gliedes dieser Differentialgleichungen übereinstimmend, dasselbe sei $K(x-a)^{-s}$. Es ergiebt sich daraus, dass die Exponenten $\eta_{\mathfrak{b}}$ in den Entwickelungen der $\sigma_{\mathfrak{b}}$ der Form $(x-a)^{\eta_{\mathfrak{b}} - \mathfrak{b}+1} \sum_0^\infty c_\alpha (x-a)^\alpha$, Mod. $c_0 \gtrless 0$, der Reihenfolge nach $\varepsilon_1 - s$, $\varepsilon_2 - s$ bis $\varepsilon_{\alpha_{r\alpha}} - s$ sind. Zugleich ergiebt sich, dass wenn man die k ersten Glieder in jeder Grösse ν aufgestellt hat, ferner bei den rationalen Coefficienten in $f(y, x)$ die k ersten Glieder in der Entwickelung des Coefficienten von y, die k ersten Glieder in der Entwickelung des Coefficienten von $\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}$ von $(x-a)^{-s+\alpha}$ an gerechnet, so findet man aus denselben die k ersten Glieder in jeder Grösse σ. Es genügt $k = 1$ zu setzen, so dass aus f, f_1, etc. nur das Anfangsglied in der Entwickelung des Coefficienten des letzten Gliedes

in Betracht kommt. Denn dadurch wird das Anfangsglied in jeder Grösse σ bestimmt, und nun liefert die Differentialgleichung, welcher die σ genügen, $e^{-\omega_{r\alpha}}\varphi_{r\alpha}(e^{\omega_{r\alpha}}\sigma, x) = 0$ die Entwickelungen der Grössen σ eindeutig. Um nun diese Grössen vollständig darzustellen, werden (vgl. Abh. Bd. 91, No. 1 *c*)) die Differentialdeterminanten der Integrale

$$(17.) \qquad \sigma_1 \int dx\, \sigma_1^{-1}\sigma_2 \int \ldots \int \sigma_{\mathfrak{b}-1}^{-1}\sigma_{\mathfrak{b}}\, dx, \qquad (\mathfrak{b}=1, \ldots \alpha_{r\alpha})$$

angewandt, wobei in den Entwickelungen der Integrale (17.) die Integrationsconstanten annullirt werden, indem alsdann die Integrale (17.) auch die Differentialgleichung $e^{-\omega_{r\alpha}}\varphi_{r\alpha}(e^{\omega_{r\alpha}}\sigma, x) = 0$ erfüllen. da sie aus den Integralen auf der rechten Seite von Gleichung (10.) multiplicirt mit Constanten hervorgehen. Wird die Differentialdeterminante der $\mathfrak{b}$ ersten Integrale (17.) durch $D_{\mathfrak{b}}$ bezeichnet, so ist $\sigma_{\mathfrak{b}} = \frac{D_{\mathfrak{b}}}{D_{\mathfrak{b}-1}}$. Um nun in den Differentialdeterminanten die Entwickelungen der Integrale (17.) darzustellen, wird aus der Differentialgleichung $e^{-\omega_{r\alpha}}\varphi_{r\alpha}(e^{\omega_{r\alpha}}\sigma, x) = 0$ die Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 hergeleitet (Abh. Bd. 87, No. 7 I), welcher die Factoren der Potenzen von $\log(x-a)$ in einer solchen Entwickelung genügen. Dieselbe liefert für die Coefficienten in der Entwickelung eines solchen Factors eine Recursionsformel mit constanter Anzahl der Glieder, die nicht identisch verschwinden (vgl. No. 2). Die ersten Coefficienten bestimmt man durch directe Entwickelung von (17.) (vgl. Abh. Bd. 83, No. 9 (23.)). Es ist nun $D_{\mathfrak{b}}$ von der Form $(x-a)^{\lambda}\sum_0^{\infty} c_{\alpha}(x-a)^{\alpha}$, $\lambda = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_{\mathfrak{b}}-\frac{(\mathfrak{b}-1)\mathfrak{b}}{2}-\mathfrak{b}s$, c_0 von Null verschieden, und man erhält $\sum_0^{\infty} c_{\alpha}(x-a)^{\alpha}$ durch eine Summe von Potenzreihen mit positiven Exponenten dargestellt, von denen das Bildungsgesetz der Coefficienten gegeben ist. Alsdann wird

$$(18.) \qquad (D_{\mathfrak{b}})^{-1} = (x-a)^{-\lambda}\frac{1}{c_0}\sum_0^{\infty}\Big(-\sum_1^{\infty}\frac{c_{\alpha}}{c_0}(x-a)^{\alpha}\Big)^{\gamma}.$$

Diese Reihe kann für hinreichend kleine Werthe von Mod.$(x-a)$ nach Potenzen von $x-a$ geordnet werden und convergirt in einem Kreise, in dem $D_{\mathfrak{b}}(x-a)^{-\lambda}$ einwerthig, stetig und von Null verschieden ist. Ein solcher Kreis wird nach Abh. Bd. 91, No. 3 III bestimmt (vgl. No. 3 I *b*)). Es ist also nun die Entwickelung von $\sigma_{\mathfrak{b}}$ und $\sigma_{\mathfrak{b}}^{-1}$ gegeben.

Die Grösse $\sigma_\mathfrak{b}$ aus (17.) sei mit $e^{w_{r\mathfrak{a}}}$ multiplicirt und

$$(19.) \qquad e^{w_{r\mathfrak{a}}}\sigma_\mathfrak{b} = \tau_\mathfrak{b}^{(r\mathfrak{a})}$$

gesetzt. Dadurch erhält man als Integrale von $\varphi_{r\mathfrak{a}} = 0$

$$(20.) \qquad \tau_1^{(r\mathfrak{a})}\int dx(\tau_1^{(r\mathfrak{a})})^{-1}\tau_2^{(r\mathfrak{a})}\int\ldots\int(\tau_{\mathfrak{b}-1}^{(r\mathfrak{a})})^{-1}\tau_\mathfrak{b}^{(r\mathfrak{a})})\,dx. \qquad (\mathfrak{b}=1,\ \ldots\ \alpha_{r\mathfrak{a}})$$

Bei $\mathfrak{a}=1$ ist $\varphi_{r1} = F_{r1}$ und $\tau_\mathfrak{b}^{(r1)} = \mu_\mathfrak{b}^{(r1)}$.

Es sei die Ordnung des r^{ten} canonischen Bestandtheiles $F_{(r)}$ durch β_r bezeichnet. Dann wird der Integralausdruck aufgestellt

$$(21.) \qquad \tau_{r1}\int dx\,\tau_{r1}^{-1}\tau_{r2}\int\ldots\int\tau_{r(l-1)}^{-1}\tau_{rl}\,dx, \qquad (l=1,\ \ldots\ \beta_r)$$

in welchem

$$(22.) \qquad \tau_{rl} = \tau_\mathfrak{b}^{(r\mathfrak{a})}, \quad l = \sum_{\mathfrak{c}=0}^{\mathfrak{c}=\mathfrak{a}-1}\alpha_{r\mathfrak{a}}+\mathfrak{b}. \qquad \begin{cases}(\mathfrak{a}=1,\ \ldots\ k_r) & (\alpha_{r0}=0)\\ (\mathfrak{b}=1,\ \ldots\ \alpha_{r\mathfrak{a}})\end{cases}$$

Nun wird ferner der Integralausdruck gebildet

$$(23.) \qquad \mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\int\ldots\int\mu_{n-1}^{-1}\mu_n\,dx, \qquad (n=1,\ \ldots\ \beta_1+\cdots+\beta_\nu)$$

in welchem

$$(24.) \qquad \mu_n = \tau_{rl}, \quad n = \sum_{\mathfrak{c}=0}^{\mathfrak{c}=r-1}\beta_\mathfrak{c}+l. \qquad \begin{cases}(r=1,\ \ldots\ \nu) & (\beta_0=0)\\ (l=1,\ \ldots\ \beta_r)\end{cases}$$

Der Integralausdruck (7.) sei durch $S_\mathfrak{b}^{(r\mathfrak{a})}$ bezeichnet, dann wird die Integralformel aufgestellt

$$(25.) \qquad \begin{cases}\mu_1\int dx\,\mu_1^{-1}\mu_2\int\ldots\int dx\,\mu_{s-1}^{-1}\mu_s\int dx\,\mu_s^{-1}S_\mathfrak{b}^{(r\mathfrak{a})}, & \begin{cases}(\mathfrak{a}=1,\ \ldots\ k_r)\\ (\mathfrak{b}=1,\ \ldots\ \alpha_{r\mathfrak{a}})\end{cases}\\ s = \sum_{\mathfrak{c}=0}^{\mathfrak{c}=r-1}\beta_\mathfrak{c}, \quad r=1,\ \ldots\ \nu, \quad (\beta_0=0),\end{cases}$$

in welcher die Integrationsconstanten annullirt werden. Die Integrale (25.) sind die Integrale von $F_m = 0$ bei $x = a$. Dieselben sind linear-unabhängig, wie sowohl aus der canonischen Form hervorgeht (vgl. Abh. Bd. 91, No. 5 II Schluss), als aus dem Ausdruck dieser Integrale durch die Formel (23.), in welcher alsdann bei den Integrationen in der Formel (21.), die $S_\mathfrak{b}^{(r\mathfrak{a})}$ ergiebt, noch Constanten zuzufügen sind.

b) Die Differentialdeterminante D der Integrale (25.) ist (vgl. Abh. Bd. 91, No. 1 (14.) und p. 341)

$$(26.) \qquad D = \mu_1\mu_2\ldots\mu_m, \quad m = \beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_\nu,$$

wie sich aus dem Ausdrucke der Integrale durch Formel (23.) ergiebt; die Gleichung (26.) besteht unabhängig davon, welche Constanten bei den Integrationen in (23.) zugefügt werden. Andererseits ist

$$(27.) \qquad D = e^{-\int p_1 dx}.$$

Hieraus ergiebt sich für D

$$(28.) \qquad D = c(x-a)^R e^w \Big(1-\frac{x-a}{a_1-a}\Big)^{\varrho_1} \dots \Big(1-\frac{x-a}{a_{\lambda-1}-a}\Big)^{\varrho_{\lambda-1}} e^{U(x)-U(0)},$$

wo w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ ist, die Factoren $\Big(1-\frac{x-a}{a_b-a}\Big)^{\varrho_b}$ $(b = 1, \dots \lambda-1)$, in denen $a_b (1 \dots \lambda-1)$ die übrigen singulären Punkte von $F_m = 0$ im Endlichen sind, für $x = a$ den Werth 1 erhalten, $U(x)$ eine rationale Function ist, die für $x = a$ nicht unendlich wird, c ein constanter Factor. Dieser constante Factor ergiebt sich aus (26.) durch das Product der Anfangscoefficienten k_0 in den Ausdrücken der Grössen μ der Form $e^w(x-a)^\varkappa \sum_0^\infty k_\alpha (x-a)^\alpha$, $w = 0$ oder von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$, k_0 von Null verschieden. Es ist also c eine ganze rationale Function dieser gegebenen Constanten.

Auf dieselbe Weise ergiebt sich für die Differentialgleichungen

$$(29.) \qquad \begin{cases} F_{(1)}(y, x) = 0, \\ F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{(2)}(y_1, x) = 0, \quad \text{etc.}, \end{cases}$$

deren Integrale in den Formeln (25.) enthalten sind, als Ausdruck der Differentialdeterminante der Integrale bezüglich

$$(30.) \qquad \begin{cases} \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{\beta_1}, \\ \mu_1 \mu_2 \dots \mu_{\beta_1+\beta_2}, \quad \text{etc.} \end{cases}$$

Der constante Factor in diesen Differentialdeterminanten ergiebt sich also auch als eine ganze rationale Function gegebener Constanten.

III. *a) Die Entwickelung der Integrale* (25.) *ist zu bilden.*

Bei den Integralen (25.) ist für jedes Integral die Grösse U in No. 1 (1.) durch successive Ausführung von Integrationen aufzustellen. Aus II wird die Differentialgleichung für U entnommen, in dieser ist ein bei $x = a$ normaler Differentialausdruck gleich Null gesetzt. Ist dieselbe $\psi(y, x) = 0$ und ist der determinirende Factor bei $x = a$ in ψ gleich e^u, so ist $e^{-u}\psi(e^u y, x) = 0$ die Differentialgleichung mit dem charakteristischen Index bei $x = a$ gleich Null, welcher, wenn $U = e^u \bar{U}$ gesetzt wird, $\bar{U}$ genügt. Aus dieser Differentialgleichung wird nach Abh. Bd. 87, No. 7 I eine Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 hergeleitet, die bei $x = a$ den charakteristischen Index gleich Null

hat, der die Functionen $\chi_a(x-a)$ in No. 1 (3.) genügen. Dieselbe dient zur Darstellung dieser Functionen, die in dem Bezirke von $x=a$ bei $e^{-u}\psi(e^u y, x)=0$ einwerthig und stetig bleiben.

Es werde nun folgende Benennung eingeführt.

Für einen Ausdruck der Form

$$(31.) \qquad (x-a)^r \frac{\varphi}{\psi},$$

wo φ und ψ Functionen von x sind, die in einem Gebiete um $x=a$ abgesehen von diesem Punkte einwerthig und stetig sind (ψ auch gleich 1 sein kann) werde die Bezeichnung *Elementarintegral* angewandt. Der Ausdruck

$$(32.) \qquad \tau_1 \int dx \tau_1^{-1} \tau_2 \int \ldots \int \tau_{n-1}^{-1} \tau_n dx, \qquad (n \geqq 1)$$

worin τ_a ($a=1, \ldots n$) Elementarintegral ist, heisse *ein System von Elementarintegralen* τ_1, τ_2 *bis* τ_n, die Grössen τ_1, τ_2 bis τ_n heissen die Bestandtheile des Systems. Unter der Form (32.) bestehen die Integrale bei einem beliebigen singulären Punkte einer homogenen linearen Differentialgleichung, deren Coefficienten bei $x=a$ abgesehen von diesem Punkte einwerthig und stetig sind (vgl. No. 1 III).

Hat ein Elementarintegral den Ausdruck

$$(33.) \qquad (x-a)^r e^w \chi(x-a),$$

wo w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-a}(x-a)^{-a}$ ist, χ von der Form $\sum_0^\infty c_a (x-a)^a$, c_0 von Null verschieden, so werde dasselbe ein *normales Elementarintegral* genannt, und wenn $w=0$ ist, *ein reguläres Elementarintegral.* e^w heisse der *determinirende Factor, r der Exponent* des normalen Elementarintegrales.

Ein Integral (23.) oder (25.) ist also ein System normaler Elementarintegrale. In einem Systeme normaler Elementarintegrale seien, indem die Integrationsconstanten annullirt werden, die Integrationen successive ausgeführt, so lange je zwei auf einander folgende Elementarintegrale τ_c und τ_{c-1} die determinirenden Factoren übereinstimmend haben, bis man auf einen Ausdruck wie No. 1 (1.) gelangt, oder, wenn in dieser Weise alle Integrationen ausgeführt sind, auf einen Ausdruck wie No. 1 (3.). Wenn nun in dem hierdurch erhaltenen Ausdruck No. 1 (1.) der Exponent ϱ in U sich von einem der Exponenten in den vorhergehenden normalen Elementarintegralen nicht um eine ganze Zahl unterscheidet, oder wenn man

auf den Ausdruck No. 1 (3.) gelangt ist, so werde von dem ursprünglichen Systeme normaler Elementarintegrale gesagt, dasselbe enthalte den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles *einstellig.* Wenn aber in dem Ausdrucke No. 1 (1.) der Exponent ϱ sich von dem Exponenten in einem oder mehreren der vorhergehenden Elementarintegrale nur um eine ganze Zahl unterscheidet, so werde gesagt, das ursprüngliche System normaler Elementarintegrale enthalte den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles *mehrstellig.* Unter Gruppenexponenten ist hier jede beliebige Grösse verstanden, die sich von dem Exponenten ϱ nur um eine ganze Zahl unterscheidet. Diese Bezeichnung entspricht der in Abh. Bd. 91, No. 5 angenommenen, wo von einem Systeme bei $x = a$ normaler Differentialausdrücke, welches auf die Form gebracht ist, in der zwei auf einander folgende determinirende Factoren bei $x = a$ nicht übereinstimmen, gesagt ist, dasselbe enthalte den Gruppenexponenten ϱ einstellig, wenn von den Exponentengleichungen, welche den bei $x = a$ regulären Ausdrücken in den einzelnen bei $x = a$ normalen Bestandtheilen des Systems entsprechen, nur die zu dem letzten Bestandtheile gehörende Gleichung Wurzeln enthält, die sich von ϱ um ganze Zahlen unterscheiden. Im anderen Falle ist zu sagen, das System bei $x = a$ normaler Differentialausdrücke enthalte den Gruppenexponenten mehrstellig.

Wenn nun ein System normaler Elementarintegrale (25.) den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles einstellig enthält, so kommt zur Darstellung des entsprechenden Ausdruckes No. 1 (1.) nur die Formel No. 1 (14.) zur Anwendung. Die höchste Potenz des Logarithmus von $x-a$, die mit nicht verschwindendem Coefficienten in U No. 1 (3.) vorkommt, bleibt dann auch die höchste Potenz des Logarithmus mit nicht verschwindendem Coefficienten in der Entwickelung von No. 1 (1.). Dieser Coefficient wird nämlich

$$(34.) \quad \mu_1 \int dx\, \mu_1^{-1} \mu_2 \int \ldots \int \mu_k^{-1} e^{u} (x-a)^{\varrho} \chi_s(x-a)\, dx.$$

Wenn ein System normaler Elementarintegrale (25.) den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles mehrstellig enthält, so wird der entsprechende Ausdruck No. 1 (1.) unter Anwendung der Formeln No. 1 (14.) und (33.) dargestellt. Die höchste Potenz des Logarithmus von $x-a$ mit nicht verschwindendem Coefficienten in der Entwickelung von No. 1 (1.) kann nicht niedriger sein als die in U, wie sich durch Division mit den μ und Differentiation ergiebt. Weiteres hierüber in *d*).

Nachdem die Integrale (25.) durch die Formeln aus No. 1 dargestellt sind, erfolgt aus dieser Darstellung die Entwickelung unter der Form No. 1 (4.) so, wie in No. 2 angegeben ist.

b) ***Der Umgang um $x = a$ sei in einem System normaler Elementarintegrale*** (25.) ***vorzunehmen.*** Man erhält nach No. 4 I das Resultat ausgedrückt als lineare Function mit constanten Coefficienten von den aus dem ursprünglichen System hervorgehenden Systemen normaler Elementarintegrale, die mit einem der vorhergehenden Bestandtheile endigen, in welchem der Gruppenexponent derselbe ist wie in dem letzten Bestandtheile des ursprünglichen Systems. Diese constanten Coefficienten haben die Form $e^{2\pi i r}$ multiplicirt mit einer ganzen rationalen Function von $2\pi i$. Die Coefficienten in letzterer Function werden, wenn das betrachtete System (25.) den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles einstellig enthält, ganze rationale Ausdrücke gegebener Constanten No. 4 I (8.), sonst werden dieselben gemäss No. 4 I (12.) ausgedrückt.

Nun können in den gefundenen linearen Ausdruck mit constanten Coefficienten als Functionen Integrale aus (23.), in denen die Integrationsconstanten annullirt sind, eingehen. Dann sind diese Integrale noch durch Integrale aus (25.) auszudrücken.

Letzteres kommt darauf hinaus, die Integrale (21.), wenn in diesen die Integrationsconstanten annullirt werden, durch die Integrale (7.) $S_b^{(ra)}$ auszudrücken. Zu dem Zwecke werden zunächst in dem Ausdrucke eines Integrales (7.) $S_b^{(ra)}$ durch Integrale (21.) die constanten Coefficienten bestimmt. Ein Integral $S_b^{(ra)}$ ist gleich $e^{w_{ra}} Y$, wo Y das Integral (9.) ist. Die Entwickelung von Y wird in (10.) eingesetzt, und man hat, um die Integrationsconstanten auf der rechten Seite zu bestimmen, durch die Grössen σ_1 bis σ_b successive zu dividiren, alsdann zu differentiiren und vor jeder Differentiation das constante Glied in dem erhaltenen Ausdrucke links zu bestimmen. Dasselbe kann nur dann von Null verschieden werden, wenn der Gruppenexponent in der jedesmal vorliegenden Entwickelung ganzzahlig ist. Diese Integrationsconstanten in (10.) sind ganze rationale Ausdrücke gegebener Constanten. Dieselben werden die Integrationsconstanten in den Integralen (20.) und daher in den Integralen (21.) bei $l = \sum_{c=0}^{c=a-1} \alpha_{rc} + d$, $(d = 1, \ldots b)$. Es sind dann die Integrationsconstanten in den vorhergehenden Integralen (21.) zu bestimmen. Die Integrale von $F_{r1} = 0$ bis $F_{r(a-1)} = 0$,

$s < \mathfrak{a}$, aus II *a*) seien in der Differentialgleichung $G_{r(s-1)} = 0$ vereinigt. Wird dann das Integral $e^{\omega_{ra}} Y$ in $G_{r(s-1)}(y, x)$ eingesetzt, so ist das Resultat gleich dem Theile von (21.), der mit den Integralen (20.), nachdem in diesen s an Stelle von $\mathfrak{a}$ eingesetzt ist, beginnt. Um nun in letzteren Integralen die Integrationsconstanten zu bestimmen, ist wieder successive durch die τ zu dividiren und zu differentiiren und das jedesmalige constante Glied in der Entwickelung zu bestimmen.

Diese Constante wird nach No. 2 (1.) durch ein bestimmtes Integral ausgedrückt, welches nach No. 3 berechnet werden kann. Auf diese Weise erhält man die Constanten in dem Ausdrucke eines Integrales (7.) $S_{\mathfrak{b}}^{(r\mathfrak{a})}$ durch die Integrale (21.) von $l = \sum_{c=0}^{c=\mathfrak{a}-1} \alpha_{rc} + \mathfrak{b}$ an bis $l = 1$. In diesen Ausdruck können nur diejenigen Integrale (21.) eingehen, in denen der Gruppenexponent des letzten Bestandtheiles derselbe ist, wie in dem betrachteten Integrale (7.). Der Coefficient des letzten Integrales (21.) bei $l = \sum_{c=0}^{c=\mathfrak{a}-1} \alpha_{rc} + \mathfrak{b}$ ist gleich 1. Man erhält daher auch umgekehrt dieses Integral ausgedrückt durch die vorhergehenden in (21.) und durch das Integral (7.) $S_{\mathfrak{b}}^{(r\mathfrak{a})}$. Die vorhergehenden Integrale in (21.) werden nun auf dieselbe Weise behandelt, und es wird auf diese Weise schliesslich jedes der Integrale (21.) ausgedrückt durch Integrale (7.) $S_d^{(rc)} \begin{cases} c = 1, \ldots k_r \\ d = 1, \ldots \alpha_{rc} \end{cases}$, deren Entwickelungen denselben Gruppenexponenten enthalten wie das Integral (21.).

Es ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, wenn ein System normaler Elementarintegrale (25.) den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles *einstellig* enthält, und ein Umgang um $x = a$ vollzogen wird, dass die Constanten in den ganzen rationalen Functionen von $2\pi i$, welche Functionen mit einer Grösse $e^{2\pi i r}$ multiplicirt die Coefficienten in dem linearen Ausdruck von Integralen (25.), dem Resultate des Umganges, darstellen, immer *ganze rationale Ausdrücke gegebener Constanten* werden. Enthält ein System normaler Elementarintegrale (25.) den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles *mehrstellig*, so werden die genannten Constanten dadurch ausgedrückt, dass Functionen unter demselben Integralzeichen vereinigt werden, alsdann ein solches Integral nach No. 2 durch *eine Reihe ganzer rationaler Functionen gegebener Constanten* dargestellt wird. Dasselbe kann nach No. 3 berechnet werden.

Wenn bei einem Integral (25.) der Umgang um $x = a$ vollzogen ist

und das Resultat linear mit constanten Coefficienten durch die vorhergehenden Integrale (25.) ausgedrückt ist, die bei der Entwickelung unter der Form No. 1 (4.) denselben Gruppenexponenten enthalten, so erhält man nach No. 4 I *b*) die Functionen $\varphi_\alpha(x-\alpha)$, $\alpha > 1$ in dem Ausdrucke No. 1 (4.) jenes Integrales linear und homogen mit bekannten constanten Coefficienten durch die Functionen φ in den Ausdrücken der Form No. 1 (4.) der genannten vorhergehenden Integrale (25.) dargestellt.

c) In den Hauptunterdifferentialgleichungen eines canonischen Bestandtheiles von $F_m = 0$ sind normale Differentialausdrücke gleich Null gesetzt; es werde der in jedem solchen normalen Ausdruck enthaltene reguläre Ausdruck herausgenommen, und es sei die Exponentengleichung desselben bei $x = a$ aufgestellt. Die Wurzeln dieser Exponentengleichungen bei $x = a$ aus den Hauptunterdifferentialgleichungen eines und desselben canonischen Bestandtheiles seien zusammengestellt. Es werde nun der Fall betrachtet, wo das System der canonischen Bestandtheile (5.) von F_m die Beschaffenheit hat, dass bei $x = a$ eine der genannten Wurzeln bei einem canonischen Bestandtheile sich von einer bei einem anderen canonischen Bestandtheile *nicht um eine ganze* Zahl unterscheidet.

Werden gemäss II *a*) bei einem canonischen Bestandtheile die Integrale derjenigen Hauptunterdifferentialgleichungen, die denselben determinirenden Factor bei $x = a$ enthalten, in einer Differentialgleichung $F_{r\alpha} = 0$ vereinigt, so unterscheiden sich die Wurzeln der Exponentengleichung des bei $x = a$ regulären Ausdruckes, welcher zu $F_{r\alpha}$ gehört, nur um ganze Zahlen von den Wurzeln der Exponentengleichungen bei $x = a$ der regulären Ausdrücke, die zu den genannten Hauptunterdifferentialgleichungen gehören. Und ebenso unterscheiden sich die Wurzeln der Exponentengleichung der Differentialgleichung $e^{-w_{r\alpha}} F_{r\alpha}(e^{w_{r\alpha}} y, x) = 0$ bei $x = a$ von denen der Exponentengleichung der Differentialgleichung $e^{-w_{r\alpha}} \varphi_{r\alpha}(e^{w_{r\alpha}} y, x) = 0$ in II *a*) nur um ganze Zahlen (Abh. Bd. 83, No. 7 IV *a*)).

Es ergiebt sich demnach, dass unter der gemachten Voraussetzung jedes System normaler Elementarintegrale (25.) den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles *einstellig* enthält. (Vgl. Abh. Bd. 91, No. 9 II *b*) Schluss.) Bei dem Umgange um $x = a$ ergiebt sich das Resultat unmittelbar durch Integrale (25.) ausgedrückt.

Die vorhin genannte Bedingung sei dahin abgeändert, dass in den

Differentialgleichungen $F_{rk_r} = 0$ und $F_{(r+1)1} \neq 0$ in II die determinirenden Factoren bei $x = a$ übereinstimmen, oder wenn in diesem Falle $F_{(r+1)1}$ gleich einem canonischen Bestandtheile ist, dass auch in $F_{(r+2)1} = 0$ derselbe determinirende Factor enthalten ist, u. s. w., und dass Wurzeln der zu den entsprechenden bei $x = a$ regulären Ausdrücken gehörenden Exponentengleichungen sich von einer Gleichung zur anderen um ganze Zahlen unterscheiden dürfen, während im Uebrigen die vorige Bedingung bleibt. Alsdann enthält auch noch jedes System normaler Elementarintegrale (25.) den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles einstellig.

d) Wenn ein System normaler Elementarintegrale (25.) den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles *mehrstellig* enthält und man dem Integrale die Form No. 1 (1.) gegeben hat, so geht aus derselben in Bezug auf die höchste Potenz des Logarithmus mit von Null verschiedenem Coefficienten in der Entwickelung No. 1 (4.) zunächst hervor, dass dieselbe nicht niedriger sein kann, als die in U (vgl. *a*)). Letztere sei gleich s, und es mögen unter den normalen Elementarintegralen, die in dem Ausdrucke No. 1 (1.) vor U vorausgehen, p sein, die denselben Gruppenexponenten enthalten wie U. Stellt man nun das Integral No. 1 (1.) durch die Formeln von No. 1 dar, so ist die höchste Potenz des Logarithmus, die formell eingeht, $p+s$. Die Grösse, die mit dieser Potenz des Logarithmus multiplicirt ist, besteht aus einem Product von Constanten der Form des Coefficienten von $(\log(x-a))^{n+1}$ in No. 1 (33.) multiplicirt mit einer von Null verschiedenen Function. Will man untersuchen, *welches die höchste Potenz des Logarithmus mit von Null verschiedenem Coefficienten ist,* so ergiebt sich zunächst, damit dieses die $(p+s)^{\text{te}}$ sei, dass keine der genannten Constanten verschwinden darf. Um, falls keine dieser Constanten verschwindet, dieses nachzuweisen, oder um von einer nicht verschwindenden Function, die mit einer Potenz des Logarithmus multiplicirt ist, zu zeigen, dass sich in der Entwickelung derselben von Null verschiedene Coefficienten finden, verfährt man unter Anwendung der Methoden von No. 3, wie in No. 6 *c*) angegeben ist. Man kann aber ferner, wenn es in (25.) Systeme normaler Elementarintegrale, die den Gruppenexponenten des letzten Bestandtheiles mehrstellig enthalten, giebt, um zu erfahren, welches in einer Gruppe von Integralen von $F_m(y, x) = 0$ mit demselben Gruppenexponenten ϱ in den Entwickelungen No. 1 (4.) die höchste Potenz des Logarithmus mit nicht verschwindendem Coefficienten ist, speciell ob eine solche Gruppe von Logarithmen frei ist,

zusehen, ob sich aus $F_m(y, x)$ solche Systeme bei $x = a$ normaler Differentialausdrücke herleiten lassen, welche den Gruppenexponenten ϱ einstellig (vgl. *a*)) enthalten und gleich Null gesetzt Differentialgleichungen liefern, deren Integrale $F_m = 0$ erfüllen und welche die Integrale mit den Gruppenexponenten ϱ in erforderlicher Anzahl geben. Hierzu dienen die Untersuchungen in Abh. Bd. 91, No. 5, 6 I. und 9 II. *c*). Dieselben stützen sich auf folgende Sätze. In einem Systeme bei $x = a$ normaler Differentialausdrücke, welches den Gruppenexponenten ϱ einstellig enthält (vgl. *a*)), ist der zu $x = a$ gehörende determinirende Factor des letzten Bestandtheiles der zu dem Gruppenexponenten ϱ gehörende determinirende Factor genannt worden. Dann sind in Abh. Bd. 91, No. 5 II diese Sätze nachgewiesen: Es seien mehrere Systeme bei $x = a$ normaler Ausdrücke vorhanden, F_1 bis F_k, die den Gruppenexponenten ϱ einstellig enthalten, bei denen die Integrale von $F_1 = 0$ bis $F_k = 0$ die Differentialgleichung $F_m(y, x) = 0$ erfüllen. Sind die zu ϱ gehörenden determinirenden Factoren übereinstimmend, so giebt es auch ein System bei $x = a$ normaler Ausdrücke φ, welches ϱ einstellig mit demselben zugehörigen determinirenden Factor enthält, so dass die Integrale von $\varphi = 0$ $F_m(y, x) = 0$ erfüllen, wo die Differentialgleichung $\varphi = 0$ die linear-unabhängigen Integrale mit dem Gruppenexponenten ϱ von $F_1 = 0$ bis $F_k = 0$ liefert. Sind in $F_1 = 0$ bis $F_k = 0$ die zu ϱ gehörenden determinirenden Factoren unter einander verschieden, so sind auch die aus diesen Differentialgleichungen hervorgehenden Integrale mit dem Gruppenexponenten ϱ linear-unabhängig. Der Differentialausdruck φ ist dann nach den Angaben von Abh. Bd. 91, No. 9 II *c*) zu suchen.

IV. ***Die Integrale von $F_m = 0$ sind bei $x = \infty$ zu entwickeln.*** Zu dem Zwecke wird in der Differentialgleichung $x = \frac{1}{t}$ gesetzt, und es werden die Integrale bei $t = 0$ entwickelt.

Es wird

$$(35.) \quad F_m(y, t^{-1}) = (-t^2)^m F'_m(y, t),$$

$$(36.) \quad F_{(r)}(y, t^{-1}) = (-t^2)^{\beta_r} F'_{(r)}(y, t),$$

$$(37.) \quad t^{-2(\beta_1+\cdots+\beta_{r-1})} F'_{(r)}(t^{2(\beta_1+\cdots+\beta_{r-1})} y, t) = F''_{(r)}(y, t)$$

gesetzt. Alsdann ergiebt sich aus der canonischen Form (5.) von $F_m(y, x)$ die Darstellung für $F'_m(y, t)$:

$$(38.) \quad F'_{(1)}(y, t) = y'_1, \quad F''_{(2)}(y'_1, t) = y'_2, \quad \ldots \quad F''_{(\nu)}(y'_{\nu-1}, t).$$

Wenn die Hauptunterdifferentialgleichungen von $F_{(r)} = 0$ $f_{r1} = 0$ bis $f_{rs_r} = 0$

sind, die Ordnung von f_{rc} durch γ_{rc} bezeichnet wird und

$$(39.) \quad f_{rc}(y, t^{-1}) = (-t^2)^{\gamma_{rc}} f'_{rc}(y, t)$$

gesetzt wird, so sind die Integrale von $f'_{rc} = 0$ $(c = 1, \dots s_r)$ in $F'_{(r)} = 0$ enthalten, woraus folgt, da die determinirenden Factoren in $f'_{r1} = 0$ bis $f'_{rs_r} = 0$ von einander verschieden sind, dass $f'_{rc} = 0$ $(c = 1, \dots s_r)$ die Hauptunterdifferentialgleichungen von $F'_{(r)} = 0$ sind. Setzt man ferner

$$(40.) \quad t^{-2(\beta_1+\cdots+\beta_{r-1})} f'_{rc}(t^{2(\beta_1+\cdots+\beta_{r-1})} y, t) = f''_{rc}(y, t),$$

so ergiebt sich auf dieselbe Weise, dass $f''_{rc} = 0$ $(c = 1, \dots s_r)$ die Hauptunterdifferentialgleichungen von $F''_{(r)} = 0$ sind.

Wenn nun in $F'_m(y, t) = 0$ Integrale einer Differentialgleichung, in der ein normaler Ausdruck gleich Null gesetzt ist, enthalten sind, so müssen sie auch in einer der Differentialgleichungen $f'_{11} = 0$ bis $f'_{1s_1} = 0$ enthalten sein, wie aus den Beziehungen zwischen den Differentialgleichungen $F_m(y, x) = 0$ und $f_{11}(y, x) = 0$ bis $f_{1s_1}(y, x) = 0$ folgt. Also ist $F'_{(1)}(y, t)$ der erste canonische Bestandtheil von $F'_m(y, t)$. Setzt man $F'_m(y, t)$ gleich

$$(41.) \quad F'_{(1)}(y, t) = y'_1, \quad \Psi_{m'}(y'_1, t),$$

so ergiebt sich in gleicher Weise, indem man $t^{2\beta_1} \Psi_{m'}(t^{-2\beta_1} y, t)$ betrachtet, dass $F''_{(2)}$ der erste canonische Bestandtheil von $\Psi_{m'}$ ist, also der zweite von F'_m u. s. w.

Die Darstellung (38.) ist also die canonische Form von $F'_m(y, t)$. Um nun die Integrale von $F'_m = 0$ bei $t = 0$ auszudrücken, hat man das im Vorigen entwickelte Verfahren anzuwenden.

V. Es seien zu dem Zwecke, die Fortsetzung eines Integrales von $F_m(y, x) = 0$ nach den Angaben von No. 4 III auszudrücken, *die linearen Beziehungen zwischen den Integralen bei zwei singulären Punkten von* $F_m(y, x) = 0$ *darzustellen.*

Die Integrale der Differentialgleichung

$$(42.) \quad F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{(2)}(y_1, x) = y_2, \quad \dots \quad F_{(c)}(y_{c-1}, x) = 0 \quad (c = 1, \dots \nu)$$

bei dem singulären Punkte $x = a$ von $F_m(y, x) = 0$ gehen aus den Ausdrücken (25.) hervor, wenn in diesen $r = 1, \dots c$ gesetzt wird. Setzt man in (42.) $x = t^{-1}$, so erhält man gemäss IV die Differentialgleichung

$$(43.) \quad F'_{(1)}(y, t) = y'_1, \quad F''_{(2)}(y'_1, t) = y'_2, \quad \dots \quad F''_{(c)}(y'_{c-1}, t) = 0.$$

Es gehen also auch die Integrale dieser Differentialgleichung bei $t = 0$ aus

den für $F'_m(y, t) = 0$, wenn $t = 0$ singulärer Punkt dieser Differentialgleichung ist, gemäss dem Schema (25.) aufgestellten Integralen hervor für $r = 1, \ldots c$.

Nun sollen unter Anwendung der Methoden von No. 4 II und III die linearen Beziehungen zwischen den nach dem Schema (25.) ausgedrückten Integralen von $F_m(y, x) = 0$ bei zwei singulären Punkten dieser Differentialgleichung $x = \alpha$ und $x = \beta$, von denen einer $x = \infty$ sein kann, dargestellt werden, und zwar mögen die Integrale bei $x = \alpha$ durch die bei $x = \beta$ ausgedrückt werden. Dann ist diese Darstellung zunächst bei den Integralen von $F_{(1)} = 0$ vorzunehmen. Hierauf bei denjenigen Integralen von $F_{(1)}(y, x) = y_1$, $F_{(2)}(y_1, x) = 0$, in denen y_1 von Null verschieden ist, u. s. w. Man hat daher, um die linearen Beziehungen zwischen den Integralen, die bei den singulären Punkten von $F_m(y, x) = 0$ entwickelt sind, zu erhalten, diejenigen für die aus diesen Integralen hervorgehenden Integrale der Differentialgleichungen (42.) bei $c = 1, \ldots \nu$ zu bestimmen. Singuläre Punkte einer Differentialgleichung (42.), die nicht in $F_m = 0$ vorkommen, werden durch die Zerlegung von F_m bekannt (vgl. Abh. Bd. 91 p. 178). Die Differentialdeterminante der Integrale von (42.) ergiebt sich aus deren Ausdrücken bei den singulären Punkten. (Ist nur $F_{(1)}$ vorhanden, so kommt nur der constante Factor c (28.) in den Hauptunterdifferentialgleichungen bei den singulären Punkten von $F_m = 0$ in Betracht.) Zur Berechnung der Constanten wird nach No. 4 III $F_m = 0$ zu Hülfe gezogen; die Berechnung von e^S, $S = \pm\int\left(p_1 - \frac{dw}{dx} - \frac{R}{x-a}\right)dx$, in dem Bezirke von $x = a$ in (28.), (30.) geschieht (vgl. p. 57) nach Abh. Bd. 91, No. 3 p. 107.

6.

I. Um einen Differentialausdruck zu bilden, dessen canonische Form (s. No. 5 I) eine beliebig vorgeschriebene Anzahl canonischer Bestandtheile enthält, kann man in folgender Weise verfahren.

a) Wenn man bereits eine canonische Form von $s-1$ normalen canonischen Bestandtheilen hat

$$(1.) \qquad F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{(2)}(y_1, x) = y_2, \quad \ldots \quad F_{(s-1)}(y_{s-2}, x),$$

und wenn ferner

$$(2.) \qquad F_{(s-1)}(y_{s-2}, x) = y_{s-1}, \quad F_{(s)}(y_{s-1}, x)$$

ein System von zwei canonischen Bestandtheilen $F_{(s-1)}$ und $F_{(s)}$ bildet, so

hat auch der Differentialausdruck

(3.) $F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{(2)}(y_1, x) = y_2, \quad \ldots \quad F_{(s-1)}(y_{s-2}, x) = y_{s-1}, \quad F_{(s)}(y_{s-1}, x)$

die canonische Form mit den canonischen Bestandtheilen $F_{(1)}$ bis $F_{(s)}$. Der Ausdruck $F_{(s)}$ kann dabei normaler oder nichtnormaler canonischer Bestandtheil sein.

Denn es sei der durch das System (1.) dargestellte Differentialausdruck durch $f_l(y, x)$, der durch das System (3.) gegebene durch $F_m(y, x)$ bezeichnet. Wenn nun die Integrale einer Differentialgleichung $\varphi(y, x) = 0$ mit normalem Ausdrucke φ $F_m = 0$ erfüllen, so müssen sie auch $f_l = 0$ erfüllen. Erfüllen nämlich nicht alle Integrale von $\varphi(y, x) = 0$ die Differentialgleichung $f_l = 0$, so kann man φ zerlegen (vgl. Abh. Bd. 83, No. 2 II) in das System der Ausdrücke $\varphi_1(y, x) = y_1, \quad \varphi_2(y_1, x)$, wo $\varphi_1 = 0$ die gemeinschaftlichen Integrale von $\varphi = 0$ und $f_l = 0$ enthält, φ_1 auch nullter Ordnung sein könnte, und φ_1, wenn es höherer als nullter Ordnung ist, und φ_2 normale Ausdrücke mit dem determinirenden Factor von φ sind. Die Integrale von $\varphi_1 = 0$ müssen dann auch eine der Hauptunterdifferentialgleichungen von $F_{(1)} = 0$ erfüllen. Werden nun die Integrale von $\varphi = 0$ und der Differentialgleichung

(4.) $F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{(2)}(y_1, x) = y_2, \quad \ldots \quad F_{(s-2)}(y_{s-3}, x) = 0$

in einer Differentialgleichung vereinigt, so erhält dieselbe die Form (Abh. Bd. 83, No. 7 IV *a*))

(5.) $F_{(1)}(y, x) = y_1, \quad F_{(2)}(y_1, x) = y_2, \quad \ldots \quad F_{(s-2)}(y_{s-3}, x) = y_{s-2}, \quad \varphi_2'(y_{s-2}, x) = 0,$

wo φ_2' ein normaler Differentialausdruck ist von der Ordnung und dem determinirenden Factor von φ_2. Die Integrale von $\varphi_2' = 0$ können dann nicht die Differentialgleichung $F_{(s-1)} = 0$ erfüllen, während sie die Differentialgleichung $F_{(s-1)} = y_{s-1}, \quad F_{(s)} = 0$ erfüllen, entgegengesetzt der Voraussetzung, dass $F_{(s-1)}$ erster canonischer Bestandtheil des Differentialausdruckes (2.) ist.

Also müssen die Hauptunterdifferentialgleichungen des ersten canonischen Bestandtheiles von $F_m(y, x)$ Integrale haben, welche die Hauptunterdifferentialgleichungen von $F_{(1)} = 0$ erfüllen. Und da die Integrale der letzteren Differentialgleichungen $F_m = 0$ erfüllen, so ist also $F_{(1)}$ erster canonischer Bestandtheil von F_m. Auf dieselbe Weise ergiebt sich, dass $F_{(2)}(y_1, x)$ erster canonischer Bestandtheil des Differentialausdruckes

(6.) $F_{(2)}(y_1, x) = y_2, \quad F_{(3)}(y_2, x) = y_3, \quad \ldots \quad F_{(s-1)}(y_{s-2}, x) = y_{s-1}, \quad F_{(s)}(y_{s-1}, x)$

ist, also zweiter canonischer Bestandtheil von F_m, u. s. w.

b) Um also nach *a*) successive eine canonische Form mit normalen canonischen Bestandtheilen in vorgeschriebener Anzahl zu bilden, ist zu zeigen, wenn die Hauptunterdifferentialgleichungen von $F_{(s-1)} = 0$ gegeben sind, wie man die von $F_{(s)} = 0$ bilden kann, so dass das System (2.) eine canonische Form mit den zwei normalen canonischen Bestandtheilen $F_{(s-1)}$ und $F_{(s)}$ wird.

Die n Hauptunterdifferentialgleichungen von $F_{(s-1)} = 0$ seien durch $\Phi_{(r)} = 0$ $(r = 1, \ldots n)$ bezeichnet. Dann kann man Systeme

$$(7.) \qquad \Phi_{(r)}(y, x) = y_1, \quad \chi_{(r)}(y_1, x) = \Psi_{(r)}(y, x),$$

wo $\chi_{(r)}$ ein normaler Ausdruck ist, mit zwei canonischen Bestandtheilen $\Phi_{(r)}$ und $\chi_{(r)}$ bilden. Wenn nämlich $\overline{\Phi}_{(r)}$ der reguläre Ausdruck in $\Phi_{(r)}$ ist, so bilde man die Differentialgleichung

$$(8.) \qquad \overline{\Phi}_{(r)}(y, x) = y_1, \quad \chi'_{(r)}(y_1, x) = 0,$$

worin $\chi'_{(r)}$ ein unzerlegbarer normaler Differentialausdruck ist mit von 1 verschiedenem determinirenden Factor, nach den Angaben in Abh. Bd. 83, No. 8 I, pp. 144, 145 so, dass diese Differentialgleichung nicht in die beiden $\overline{\Phi}_{(r)} = 0$ und $X = 0$ zerfällt, wo X ein Differentialausdruck von der Ordnung von $\chi'_{(r)}$ ist. Wenn dann Ω der determinirende Factor in $\Phi_{(r)}$ ist, so wird $\chi_{(r)}(y, x) = \Omega \chi'_{(r)}(\Omega^{-1} y, x)$ gesetzt. Alsdann hat das System $\Psi_{(r)}$ die verlangte Eigenschaft (vgl. Abh. Bd. 83, No. 7 III *c*), IV *c*) (14.)). Die determinirenden Factoren in $\chi_{(r)}$ $(r = 1, \ldots n)$ mögen unter einander und von denen in $\Phi_{(r)}$ $(r = 1, \ldots n)$ verschieden sein. Die Integrale von $\Psi_{(r)} = 0$ $(r = 1, \ldots n)$ sind dann unter einander linear-unabhängig (Abh. Bd. 83, No. 7 IV *c*)). Die Integrale von $F_{(s-1)} = 0$ und $\Psi_{(r)} = 0$ seien vereinigt in der Differentialgleichung

$$(9.) \qquad F_{(s-1)}(y, x) = y_1, \quad \psi_{(r)}(y_1, x) = 0,$$

wo $\psi_{(r)}$ ein normaler Differentialausdruck von der Ordnung und dem determinirenden Factor von $\chi_{(r)}$ ist. (Abh. Bd. 83, No. 7 (14.).) Die Integrale von $\psi_{(r)} = 0$ $(r = 1, \ldots n)$ werden in einer homogenen linearen Differentialgleichung $F_{(s)} = 0$ vereinigt. Dann hat das System

$$(10.) \qquad F_{(s-1)}(y, x) = y_1, \quad F_{(s)}(y_1, x)$$

die verlangte Eigenschaft.

Denn es sei $\varphi(y, x) = 0$ eine Differentialgleichung mit normalem Ausdrucke φ, deren Integrale die Differentialgleichung $F_{(s-1)}(y, x) = y_1$, $F_{(s)}(y_1, x) = 0$

erfüllen. Der determinirende Factor in φ kann nicht von allen in $\Phi_{(r)}$ und $\chi_{(r)}$ $(r = 1, \dots n)$ verschieden sein, weil sonst die Integrale von $\varphi = 0$ linear-unabhängig von denen in $\Psi_{(r)} = 0$ $(r = 1, \dots n)$ wären (Abh. Bd. 83, No. 7 IV *c*)). Wenn der determinirende Factor in φ mit dem in $\chi_{(r)}$ für $r = s$ übereinstimmte, so würde ein Integral von $\varphi = 0$ nicht die Differentialgleichung $\Psi_{(s)} = 0$ erfüllen; da es sonst (vgl. Abh. Bd. 83, No. 2 II) eine Differentialgleichung mit normalem Ausdrucke und dem determinirenden Factor von $\chi_{(s)}$ gäbe, deren Integrale $\Psi_{(s)} = 0$ erfüllen, entgegengesetzt dem Umstande, dass $\Phi_{(s)}$ erster canonischer Bestandtheil in $\Psi_{(s)} = 0$ ist. Vereinigte man nun die Integrale von $\varphi = 0$ und $\Psi_{(s)} = 0$ in einer homogenen linearen Differentialgleichung (Abh. Bd. 83, No. 7 (14.)), so würden die Integrale derselben und die der übrigen Differentialgleichungen $\Psi_{(r)} = 0$ $(r \gtrless s)$ von einander linear-unabhängig sein, und es würden sich also mehr linear-unabhängige Integrale der Differentialgleichung $F_{(s-1)} = y_1$, $F_{(s)} = 0$ finden, als die Ordnung beträgt. Wenn der determinirende Factor in φ mit dem in $\Phi_{(s)}$ übereinstimmt, und wenn die Integrale von $\varphi = 0$ nicht sämmtlich $\Phi_{(s)} = 0$ erfüllten, so könnte man die Integrale von $\varphi = 0$ und $\Psi_{(s)} = 0$ in einer homogenen linearen Differentialgleichung vereinigen, und es würden deren Integrale und die von $\Psi_{(r)} = 0$ $(r \gtrless s)$ wieder mehr linear-unabhängige Integrale von $F_{(s-1)} = y_1$, $F_{(s)} = 0$ liefern, als die Ordnung dieser Differentialgleichung beträgt. Also müssen die Integrale von $\varphi = 0$ in einer Hauptunterdifferentialgleichung von $F_{(s-1)} = 0$ enthalten sein. Es ist demnach $F_{(s-1)}$ erster canonischer Bestandtheil des Differentialausdruckes $F_{(s-1)}(y, x) = y_1$, $F_{(s)}(y_1, x)$.

II. *a*) Wenn das Integral No. 1 (1.) gemäss Formel No. 1 (4.) entwickelt ist, und man der Entwickelung die Form $(x-a)^{\varrho} e^{w} \psi$ geben kann, wo w gleich Null oder von der Form $\sum_1^n c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$ ist, und in ψ nur eine endliche Anzahl von Potenzen von $x-a$ mit negativen Exponenten sich findet, so muss w gleich der Grösse u in U sein. Dieses ergiebt sich durch successive Division mit den Grössen μ und Differentiation. Wenn aber irgend ein Ausdruck

$$(11.) \qquad \mu_g \int dx\, \mu_g^{-1} \mu_{g+1} \int \dots \int \mu_k^{-1} U dx,$$

der aus No. 1 (1.) dadurch entsteht, dass die μ mit den Zeigern 1 bis $g-1$ weggenommen sind, eine Entwickelung besitzt, so dass, nachdem dieselbe auf die Form $(x-a)^{\varrho} e^{w} \varphi$ gebracht ist, φ unendlich viele Potenzen von $x-a$

mit negativen Exponenten enthält, so kann auch in der Entwickelung von No. 1 (1.) von der Form $(x-a)^{\varrho}e^{w}\psi$ der Ausdruck ψ nicht eine endliche Anzahl Potenzen von $x-a$ mit negativen Exponenten enthalten, wie sich durch Division mit den μ und Differentiation ergiebt.

Um einen Ausdruck (11.) zu bilden, in dessen Entwickelung der vorhin genannten Form die Grösse φ unendlich viele Potenzen von $x-a$ mit negativen Exponenten hat, kann man in dem Ausdrucke

$$(12.)\quad \mu_g \int dx\, \mu_g^{-1} V, \quad V = \mu_{g+1} \int \ldots \int \mu_k^{-1} U dx$$

die Grösse

$$(13.)\quad \mu_g = e^{w}(x-a)^{\varrho+\nu} \sum_0^{\infty} c_\alpha (x-a)^{\alpha}$$

so nehmen, dass w von der Form $\sum_1^{n} c_{-\alpha}(x-a)^{-\alpha}$, ν ganzzahlig, $w-u$ von Null verschieden ist. Ueber die ganze Zahl ν kann man dann so verfügen, dass die Entwickelung des Coefficienten der höchsten Potenz von $\log(x-a)$ in $\mu_g^{-1}V$ das Glied $(x-a)^{-1}$ enthält. Dann wird, wenn die Entwickelung von (12.) auf die Form $(x-a)^{\varrho}e^{w}\varphi$ gebracht ist, der Coefficient der höchsten Potenz von $\log(x-a)$ in φ gleich $c\mu_g(x-a)^{-\varrho}e^{-w}$, wo c eine von Null verschiedene Constante ist. Derselbe enthält also unendlich viele Potenzen von $x-a$ mit negativen Exponenten. (Vgl. auch Abh. Bd. 83 p. 158.)

b) Wenn man untersuchen will, ob, nachdem die Entwickelung No. 1 (4.) des Integrales No. 1 (1.) die Form $(x-a)^{\varrho}e^{w}\psi$ erhalten hat, sich in ψ unendlich viele Potenzen von $x-a$ mit negativen Exponenten finden, so hat man in folgender Weise zu verfahren.

Für die Factoren der Potenzen von $\log(x-a)$ in $(x-a)^{\varrho}\psi$ kann man aus der ursprünglichen Differentialgleichung eine homogene lineare Differentialgleichung mit rationalen Coefficienten und dem Coefficienten der höchsten Ableitung gleich 1 herleiten (vgl. No. 2). Dieselbe hat bei $x=a$ eine Exponentengleichung, unter deren Wurzeln sich solche finden, die sich von ϱ in $(x-a)^{\varrho}\psi$ nur um ganze Zahlen unterscheiden (Abh. Bd. 87, No. 7 III *d*), Abh. Bd. 91, No. 1 *e*)). Diejenige, deren reeller Theil am kleinsten ist, sei ϱ'. Es sei $(x-a)^{\varrho}\chi$ der Factor einer Potenz von $\log(x-a)$ in $(x-a)^{\varrho}\psi$. Wird aus der vorigen Differentialgleichung diejenige für $(x-a)^{\varrho-\varrho'}\chi$ hergeleitet, so enthält deren Exponentengleichung von ganzzahligen Wurzeln nur solche, die gleich oder grösser als Null sind. Wenn dann die Entwickelung von $(x-a)^{\varrho-\varrho'}\chi$ nur eine endliche Anzahl Potenzen von $x-a$

mit negativen Exponenten enthalten soll, so kann dieselbe überhaupt keine solche Potenz enthalten. Nun ergiebt sich aus der Differentialgleichung eine nicht identisch verschwindende Recursionsformel (vgl. No. 2) für die Coefficienten c_α der Potenzen $c_\alpha(x-a)^\alpha$ in dieser Entwickelung mit constanter Anzahl $\sigma+1$ der Glieder c_{k+1} bis $c_{k+1-\sigma}$. Die niedrigste ganze Zahl k, für welche der Coefficient von $c_{k+1-\sigma}$ in der Recursionsformel verschwindet, sei $\varkappa$. Damit die Entwickelung nun unendlich viele Potenzen mit negativen Exponenten enthält, ist nothwendig und hinreichend, wenn $\varkappa+1-\sigma<-\sigma$ ist, dass einer der Coefficienten $c_\varkappa$ bis $c_{\varkappa+1-\sigma}$ von Null verschieden ist; wenn $\varkappa+1-\sigma\geqq-\sigma$ ist, so wie wenn der Coefficient von $c_{k+1-\sigma}$ nicht für eine ganze Zahl verschwindet, dass einer der Coefficienten c_{-1} bis $c_{-\sigma}$ von Null verschieden ist.

c) Um von einer Entwickelung durch eine Potenzreihe, für welche eine Recursionsformel der Coefficienten mit constanter Anzahl der Glieder besteht, falls diese Entwickelung nicht verschwindet, letztere Eigenschaft nachzuweisen, hat man von einer endlichen Anzahl Coefficienten zu zeigen, dass wenigstens einer nicht verschwindet. Der Nachweis, dass ein Coefficient c von Null verschieden ist, geschieht dadurch, dass man $c=c'+c''$ setzt und unter Anwendung der Methoden von No. 3 einen derartig an c angenäherten Werth c' zu berechnen sucht, bei welchem sich $\text{Mod.}\,c''<\text{Mod.}\,c'$ ergiebt. Hat man einen Werth α gefunden, so dass $\text{Mod.}\,c>\alpha$ ist, und nimmt man $0<\beta<\alpha$, so kann man zugleich einen Werth $\varepsilon<\frac{\alpha-\beta}{2}$ angeben so beschaffen, dass, wenn man $\text{Mod.}\,c''<\varepsilon$ setzt und demgemäss c' berechnet, sich $\text{Mod.}\,c>\beta$ ergiebt, da $\text{Mod.}\,c'>\alpha-\varepsilon>\beta+\varepsilon$ ist.

7.

Bei der Behandlung der hier integrirten homogenen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten treten algebraische Aufgaben auf, die im Folgenden näher untersucht sind.

I. Bei einer Exponentengleichung sind die Wurzeln in Gruppen solcher, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, zu trennen. Demnach soll bei einer algebraischen Gleichung die Zerlegung des Gleichungspolynoms in ganze rationale Factoren vorgenommen werden, aus denen diese Gruppen hervorgehen, und die zu Coefficienten rationale Ausdrücke der ursprünglichen Coefficienten mit rationalen Zahlcoefficienten haben.

Aus dem ursprünglichen Gleichungspolynom sei dasjenige hergeleitet, welches gleich Null gesetzt eine Gleichung giebt, deren Wurzeln die verschiedenen der ursprünglichen Gleichung sind, jede einfach genommen. Dasselbe sei $\varphi(x)$. Wenn der Gleichung $\varphi(x)=0$, in welcher das höchste Glied x^a sei, die Wurzeln x_1 und x_1+n genügen, wo n ganzzahlig und von Null verschieden ist, und man

$$(1.) \quad \varphi(x+n) = \varphi(x)+n\varphi'(x)+\frac{n^2}{1.2}\varphi''(x)+\cdots+n^a$$

setzt, so genügen diese Werthe x_1 und n auch der Gleichung

$$(2.) \quad \varphi'(x)+\frac{n}{1.2}\varphi''(x)+\cdots+n^{a-1}=0.$$

Das Polynom in (2.) sei durch $\chi(x,n)$ bezeichnet. Die Wurzeln von $\varphi(x)=0$ seien α_1 bis α_a. Wird alsdann das Product

$$(3.) \quad \chi(\alpha_1,n)\chi(\alpha_2,n)\ldots\chi(\alpha_a,n) = \Phi(n)$$

aufgestellt, so ergiebt dasselbe ein Polynom von n des Grades $a(a-1)$, dessen Coefficienten als symmetrische Verbindungen der Wurzeln von $\varphi(x)=0$ sich als ganze rationale Ausdrücke der Coefficienten von $\varphi(x)$ ergeben. Es sind nun die von Null verschiedenen ganzen Zahlen n zu ermitteln, die $\Phi(n)=0$ erfüllen. Dieses sind diejenigen ganzen Zahlen, um welche zwei Wurzeln von $\varphi(x)=0$ sich unterscheiden. Es genügt die positiven Werthe von n zu nehmen.

Bei einem der gefundenen positiven Werthe von n ist nun der grösste gemeinschaftliche Theiler zwischen $\chi(x,n)$ und $\varphi(x)$ aufzustellen, der dann auch der grösste gemeinschaftliche Theiler zwischen $\varphi(x+n)$ und $\varphi(x)$ ist. Derselbe sei $\psi(x)$, so muss auch $\psi(x-n)$ Theiler von $\varphi(x)$ sein. Haben $\psi(x)$ und $\psi(x-n)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler, so ist $\varphi(x)$ durch $\psi(x)\psi(x-n)=\omega(x)$ theilbar. Haben $\psi(x)$ und $\psi(x-n)$ einen gemeinschaftlichen Theiler, so sei der grösste gemeinschaftliche Theiler durch $\varrho(x)$ bezeichnet. Dann ist eine ganze rationale Darstellung $\omega(x)$ von $\frac{\psi(x)\psi(x-n)}{\varrho(x)}$ zu ermitteln von der Beschaffenheit, dass $\psi(x)$ in derselben durch ein Product $\lambda_1(x)\lambda_2(x)\ldots\lambda_s(x)$ gegeben ist, wo die λ ganze rationale Functionen sind, und dass alsdann in $\omega(x)$ sich auch die Factoren $\lambda_1(x-n)$, $\lambda_2(x-n)$ bis $\lambda_s(x-n)$ von $\psi(x-n)$ finden. Factoren aus $\psi(x)$, deren Product $\varrho(x)$ ist, stimmen dabei mit Factoren aus $\psi(x-n)$ überein und kommen in $\omega(x)$ nur einmal vor. Setzt man dann $\varphi(x)=\omega(x)\mu(x)$, so machen

zwei Wurzeln von $\varphi(x) = 0$, die sich um n unterscheiden, zwei Factoren von $\varphi(x)$ gleich Null, von denen der eine aus dem anderen dadurch hervorgeht, dass $x-n$ an die Stelle von x tritt, und nur diese beiden Factoren, da $\varphi(x) = 0$ einfache Wurzeln besitzt.

Es ist nun die bezeichnete Darstellung $\omega(x)$ von $\frac{\psi(x)\psi(x-n)}{\varrho(x)}$ aufzusuchen. $\varrho(x)$ ist der grösste gemeinschaftliche Theiler zwischen $\psi(x)$ und $\psi(x-n)$, daher muss auch $\varrho(x+n)$ Theiler von $\psi(x)$ sein. Haben $\varrho(x)$ und $\varrho(x+n)$ keinen gemeinschaftlichen Theiler, so wird

$$(4.) \quad \psi(x) = \varrho(x)\varrho(x+n)\nu(x),$$

$$(5.) \quad \psi(x-n) = \varrho(x-n)\varrho(x)\nu(x-n).$$

Daher ergiebt sich

$$(6.) \quad \omega(x) = \varrho(x-n)\varrho(x)\varrho(x+n)\nu(x-n)\nu(x).$$

Haben $\varrho(x)$ und $\varrho(x+n)$ einen gemeinschaftlichen Theiler, so sei der grösste gemeinschaftliche Theiler $\xi(x)$. Es bleibt dann übrig von $\frac{\varrho(x)\varrho(x+n)}{\xi(x)}$ eine Darstellung zu geben, wie die von $\frac{\psi(x)\psi(x-n)}{\varrho(x)} = \omega(x)$ sein sollte. Es muss auch $\xi(x-n)$ Theiler von $\varrho(x)$ sein, und man hat nun in derselben Weise wie vorhin bei $\psi(x)$ weiter fortzufahren.

Es sei also nun $\varphi(x)$ durch $\omega(x)\mu(x)$ bei einem bestimmten Werthe von n so dargestellt, dass $\omega(x)$ die oben angegebene Beschaffenheit hat. Diese Zerlegung von $\varphi(x)$ wird bei jedem der gefundenen positiven ganzzahligen Werthe n vorgenommen. Zugleich wird $\varphi(x)$ durch das Product der Polynome dargestellt, von denen das einzelne die gleich vielfach vorkommenden linearen Factoren des ursprünglichen Gleichungspolynomes einfach enthält. Wenn man nun diese verschiedenen Zerlegungen von $\varphi(x)$ vorgenommen hat, so sind dieselben in einer Darstellung zusammenzufassen. Nimmt man zwei Zerlegungen heraus, so ist bei jedem Factor der einen Zerlegung und jedem der anderen zuzusehen, ob sich für beide Factoren ein gemeinschaftlicher Theiler findet. Die Zerlegung eines Polynomes von x zieht dabei die Zerlegung derjenigen Polynome nach sich, die aus jenem durch Vertauschung von x mit $x+s$, wo s eine ganze Zahl ist, entstehen. Man bildet auf diese Weise zunächst eine Zerlegung von φ, die zwei der vorhergehenden Zerlegungen enthält; mit dieser Zerlegung und einer dritten vorhergehenden eine solche, welche diese umfasst, bis man

schliesslich eine Zerlegung von φ hergestellt hat, welche alle vorhergehenden enthält.

Aus dieser Darstellung von $\varphi(x)$ sind diejenigen Factoren herauszunehmen, von denen nicht je zwei sich dadurch unterscheiden, dass an Stelle von x in dem einen x vermehrt um eine ganze Zahl in dem anderen steht. Diese Polynome, gleich Null gesetzt, liefern Gleichungen, deren Wurzeln sich gemäss dem oben Gesagten zu je zweien nicht um eine ganze Zahl unterscheiden. Diese Wurzeln sind die Repräsentanten der verschiedenen Gruppen von Wurzeln der ursprünglichen Gleichung. Die übrigen Wurzeln dieser Gruppen ergeben sich dann unmittelbar aus den anderen Factoren von $\varphi(x)$ und dadurch, dass sich zugleich findet, welche Wurzeln der ursprünglichen Gleichung mehrfach und wie oft sie vorkommen.

II. Bei den hier gegebenen Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen mit rationalen Functionen als Coefficienten tritt die Aufgabe auf, zu beurtheilen, ob Ausdrücke, die ganze rationale Functionen bereits ermittelter Constanten mit rationalen Zahlcoefficienten sind, verschwinden. Und es sind algebraische Gleichungen aufzulösen, deren Coefficienten algebraisch mit den Coefficienten in den rationalen Functionen in der Differentialgleichung zusammenhängen.

Für den Fall, dass jene Constanten und die Coefficienten dieser Gleichungen algebraische Zahlen sind, kann man folgendes Verfahren anwenden.

a) Eine algebraische Zahl wird eine solche genannt, die eine Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Zahlcoefficienten ist; der Coefficient der höchsten Potenz in dieser Gleichung wird gleich Eins gesetzt. (S. die Abhandlung des Herrn *Dedekind* in *Dirichlets* Vorlesungen über Zahlentheorie 3. Aufl. p. 452).

Man hat dann folgende Sätze (s. *Dedekind* l. c. p. 454, 459, 460):

A) Wenn α und β algebraische Zahlen sind mit den Gleichungen

$$(7.) \quad \alpha^r = a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_{r-1}\alpha^{r-1},$$

$$(8.) \quad \beta^s = b_0 + b_1\beta + \cdots + b_{s-1}\beta^{s-1},$$

so sind auch $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$ algebraische Zahlen. Man bildet für jeden dieser Ausdrücke ω eine algebraische Gleichung mit rationalen Coefficienten, indem man die $rs = n$ Producte

$$(9.) \quad \alpha^\mu \beta^\nu \quad \begin{cases} \mu = 0, \ldots r-1 \\ \nu = 0, \ldots s-1 \end{cases}$$

aufstellt, und wenn dieselben durch ω_1 bis ω_n bezeichnet werden, wo $\omega_1 = 1$ ist, die Grössen $\omega\omega_l$ $(l = 1, \dots n)$ linear und homogen durch ω_1 bis ω_n vermittelst (7.) und (8.) ausdrückt. Alsdann liefert die gleich Null gesetzte Determinante dieses Systems von n linearen homogenen Gleichungen mit den n Grössen ω_1 bis ω_n die gesuchte Gleichung. Da, wenn β von Null verschieden ist, auch $\frac{1}{\beta}$ algebraische Zahl ist, deren Gleichung sich aus (8.) ergiebt, so ist also auch $\frac{\alpha}{\beta}$ eine algebraische Zahl, für die man eine Gleichung nach dem Vorhergehenden erhält.

B) Wenn in einer Gleichung

$$(10.) \qquad \omega^m + a_1\omega^{m-1} + \cdots + a_m = 0$$

die Coefficienten algebraische Zahlen sind, so sind auch die Wurzeln der Gleichung algebraische Zahlen. Sind für die Coefficienten a_s $(s = 1, \dots m)$ die algebraischen Gleichungen mit rationalen Coefficienten

$$(11.) \qquad a_s^{r_s} + \alpha_{s1}a_s^{r_s-1} + \cdots + \alpha_{sr_s} = 0 \qquad (s = 1, \dots m)$$

gegeben, so erhält man eine algebraische Gleichung mit rationalen Coefficienten, welcher die Wurzeln von (10.) genügen, auf folgende Weise. Man stellt die $mr_1r_2 \dots r_m = n$ Producte

$$(12.) \qquad \omega^\mu a_1^{\varrho_1} \dots a_m^{\varrho_m} \quad \begin{cases} \mu = 0, \dots m-1 \\ \varrho_s = 0, \dots r_s - 1 \end{cases} \qquad (s = 1, \dots m)$$

auf. Dieselben seien durch ω_1 bis ω_n bezeichnet, $\omega_1 = 1$. Nun werden die Grössen $\omega\omega_l$ $(l = 1, \dots n)$ linear und homogen durch ω_1 bis ω_n vermittelst (10.) und (11.) ausgedrückt. Dann ergiebt wieder die gleich Null gesetzte Determinante dieses Systems von n linearen homogenen Gleichungen mit den Grössen ω_1 bis ω_n die gesuchte Gleichung. Wenn in (10.) der Coefficient von ω^m statt 1 eine von Null verschiedene algebraische Zahl a_0 ist, für welche eine algebraische Gleichung mit rationalen Coefficienten gegeben ist, so sind nach *A*) die Coefficienten $\frac{a_s}{a_0}$ $(s = 1, \dots m)$ algebraische Zahlen, für welche man algebraische Gleichungen mit rationalen Coefficienten herleiten kann. Alsdann kommt man auf das Vorige zurück.

b) Es sei nun ein Ausdruck vorgelegt, der eine ganze rationale Function algebraischer Zahlen ist, und für diese algebraischen Zahlen seien algebraische Gleichungen mit rationalen Zahlcoefficienten gegeben. Es soll untersucht werden, ob jener Ausdruck verschwindet.

Nun werde vorausgesetzt, dass man von den hier vorkommenden algebraischen Zahlen bereits ermittelt habe, wie für dieselben mit beliebig vorgeschriebener Annäherung complexe Ausdrücke mit rationalem reellen Theile und Coefficienten von i aufzustellen sind, eine Voraussetzung, die nach *c*) als erfüllt betrachtet werden kann. Man leitet nach Satz *A*) eine algebraische Gleichung mit rationalen Coefficienten her, welcher der Ausdruck genügt. In derselben muss, wenn der Ausdruck gleich Null sein soll, zunächst das absolute Glied verschwinden. Ferner werde, wenn nicht alle Wurzeln Null sind, ein positiver Werth $a > 0$ ermittelt, der kleiner ist als der kleinste der Moduln der von Null verschiedenen Wurzeln der Gleichung. Derselbe ergiebt sich aus der Gleichung, in welcher die den Gliedern gemeinschaftlichen Factoren x weggestrichen sind. Setzt man dann $a = a' + a''$ und $a' > a''$ und den betrachteten Ausdruck $C = C' + C''$, nimmt $\mathrm{mod.}\, C'' \leqq a''$ an und berechnet demgemäss C', so ist, damit $C = 0$ sei, nothwendig und hinreichend, dass sich $\mathrm{mod.}\, C' < a'$ ergiebt.

c) Wenn die Gleichungen (10.) und (11.) gegeben sind, so seien diejenigen Wurzeln der Gleichung (10.), die von einander verschieden sind, aufzusuchen. Von den algebraischen Zahlen, welche die Coefficienten bilden, wird vorausgesetzt, dass man sie mit beliebiger Annäherung berechnen kann. Nach Satz *B*) wird eine algebraische Gleichung mit rationalen Coefficienten aufgestellt, welcher die Wurzeln der Gleichung (10.) genügen. Aus dieser Gleichung werden diejenigen hergeleitet, welche die gleichvielfachen Wurzeln derselben einfach enthalten. Alsdann sind letztere Gleichungen aufzulösen. Die rationalen Wurzeln derselben sind aufzustellen, und die irrationalen und complexen Wurzeln können mit beliebiger Annäherung berechnet werden. Setzt man nun eine solche Wurzel in die Gleichung (10.) ein, so kann man nach *b*) erkennen, ob die Gleichung erfüllt ist.

Was die beliebig angenäherte Berechnung der complexen Wurzeln einer Gleichung $F(x) = 0$ mit rationalen Coefficienten angeht, so ist Folgendes zu bemerken. Wenn $x = y + iz$ gesetzt wird, sei $F(x) = G(y, z) + iH(y, z)$. Aus der Betrachtung der höchsten Potenz von x in $F(x)$ ergiebt sich, dass immer in wenigstens einer der Functionen G und H die höchste Potenz von y bezüglich z mit constantem Coefficienten vorkommt; beide Variabeln sind in G und H enthalten. Eliminirt man nun mittelst symmetrischer Functionen aus $G = 0$ und $H = 0$ das eine Mal z, das andere Mal y, so ergeben

sich die Polynome $\varphi(y)$ und $\psi(z)$ mit rationalen Coefficienten. Die Coefficienten können in keinem dieser Polynome alle verschwinden, weil sich sonst unendlich viele Wurzeln von $F(x) = 0$ ergeben würden. Denn wenn etwa die Coefficienten von $\varphi(y)$ alle gleich Null wären, so müsste es zu jedem Werthe y einen Werth z geben, so dass $G(y, z) = 0$ und $H(y, z) = 0$ erfüllt wären. Nimmt man dann y reell und ist der zugehörige Werth z complex gleich $a+ib$, so müssen die beiden Gleichungen auch durch den conjugirten Werth $a-ib$ erfüllt werden. Oder der zugehörige Werth von z sei reell gleich α. Es ergeben sich dann als Wurzeln x von $F(x) = 0$ die Werthe $y+i(a\pm ib)$ oder $y+i\alpha$; daher wird Mod. x^2 gleich $(y\pm b)^2+a^2$ oder $y^2+\alpha^2$, woraus folgen würde, dass dieser Modul beliebig gross werden könnte. Ebenso ist es, wenn die Coefficienten von $\psi(z)$ alle gleich Null wären; es würden sich bei einem beliebigen reellen Werthe von z als zugehörige Werthe von y, so dass $G(y, z) = 0$ und $H(y, z) = 0$ erfüllt sind, entweder ergeben $a\pm ib$ oder ein reeller Werth α. Demnach wird alsdann Mod. x^2 gleich $a^2+(z\pm b)^2$ oder α^2+z^2. Also ergiebt sich aus $\varphi(y) = 0$ und $\psi(z) = 0$, ob Werthe von y und z möglich sind und welche diese sind. Werden nun aus den Gleichungen, welche die Wurzeln jeder dieser Gleichungen einfach enthalten, die reellen Wurzeln mit beliebiger Annäherung berechnet, so kann man dann, um zu ersehen, ob $G(y, z) = 0$ und $H(y, z) = 0$ erfüllt sind, das Verfahren von *b*) anwenden.

Auf die im Vorhergehenden angegebene Weise lässt sich also, indem jede Wurzel einer algebraischen Gleichung mit rationalen Coefficienten mit beliebiger Annäherung berechnet werden kann, auch jede Wurzel einer algebraischen Gleichung wie (10.), also jede algebraische Zahl, sobald für dieselbe eine dieser Gleichungen gegeben ist, mit beliebiger Annäherung berechnen, und man findet, wenn der reelle Theil oder der Coefficient von i in dem allgemeinen complexen Ausdrucke dieser algebraischen Zahl eine rationale Zahl ist, diese rationale Zahl. Werden aus einer Gleichung (10.) unter Anwendung des Verfahrens von *b*) diejenigen hergeleitet, welche die gleichvielfachen Wurzeln von (10.) einfach enthalten, so kann man durch Auflösung dieser zugleich entnehmen, wie oft eine Wurzel in (10.) vorkommt.

III. Die Constanten in den rationalen Functionen, welche die Coefficienten einer homogenen linearen Differentialgleichung bilden, seien algebraische Zahlen, von denen die algebraischen Gleichungen mit rationalen Zahlcoefficienten gegeben sind.

Bei der Zerlegung des Differentialausdruckes $F_m(y, x)$ in die canonische Form (s. No. 5 und in No. 5 (6.), (7.) *d*)) sind folgende algebraische Gleichungen aufzulösen: solche, welche sich auf die Ermittelung von singulären Punkten beziehen, sei es bei dem ursprünglichen Differentialausdruck, sei es bei den Bestandtheilen des Systems, in welches der Differentialausdruck zerlegt wird; ferner algebraische Gleichungen, deren Wurzeln die Coefficienten in den rationalen Functionen, die in den determinirenden Factoren vorkommen, bestimmen (Coefficientengleichungen), alsdann algebraische Gleichungen, deren Wurzeln Exponenten in den etwa vorhandenen Systemen normaler Elementarintegrale (s. No. 5 III *a*)) bei den singulären Punkten bestimmen (Exponentengleichungen). Die Coefficienten in diesen algebraischen Gleichungen sind rationale Ausdrücke von den ursprünglichen Constanten in den Coefficienten der Differentialgleichung und von Constanten, die selbst Wurzeln von anderen dieser Gleichungen sind mit rationalen Zahlcoefficienten. Unter der über die Coefficienten der Differentialgleichung gemachten Voraussetzung ergeben sich nach II *b*) und *c*) successive die Wurzeln der vorhin genannten Gleichungen ebenfalls als algebraische Zahlen, für die man algebraische Gleichungen mit rationalen Zahlcoefficienten aufstellen und die man mit beliebiger Annäherung berechnen kann. Bei den fundamentalen Exponentengleichungen (Abh. Bd. 91, No. 8 p. 173), die bei den singulären Punkten der ursprünglichen Differentialgleichung auftreten, kommt es darauf an, die Wurzeln in Gruppen solcher, die sich nur um ganze Zahlen unterscheiden, zu trennen. Zu dem Zwecke kann man nach I unter Anwendung von II *b*) die algebraischen Gleichungen aufstellen, deren Wurzeln die Repräsentanten der verschiedenen Gruppen liefern, alsdann sind diese Gleichungen nach II *c*) aufzulösen, worauf sich nach I unmittelbar alle zu einer Gruppe gehörenden Wurzeln ergeben. Oder man kann auch zunächst aus der Gleichung unter Anwendung von II *b*) diejenigen Gleichungen herleiten, welche die gleichvielfachen Wurzeln der ursprünglichen einfach enthalten, alsdann letztere nach II *c*) auflösen, wodurch sich die Wurzeln mit beliebiger Annäherung ergeben. Nimmt man nun aus der Gesammtheit S dieser Wurzeln eine derselben ω heraus und setzt $\omega+n$ in die ursprüngliche Gleichung ein, so ist nach II *b*) zuzusehen, für welche ganzen Zahlen n etwa das Gleichungspolynom verschwindet. Die sich auf diese Weise ergebenden Wurzeln aus S sind wegzustreichen, und es ist mit einer der übrig bleibenden in derselben Weise zu verfahren u. s. w.

Es ist ferner bei der successiven Zerlegung des ursprünglichen Differentialausdruckes in ein System, indem normale Differentialausdrücke als Bestandtheile des Systems abgesondert werden, zu untersuchen, ob ganze rationale Ausdrücke der bisher ermittelten Constanten mit rationalen Zahlcoefficienten verschwinden. Dieses geschieht nach II *b*).

Bei der Aufstellung und Untersuchung der Integrale sind andere homogene Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten nach Abh. Bd. 87, No. 7 I hinzugezogen (No. 2, No. 3, No. 5), bei welchen nur die Coefficienten in Betracht kamen. Die Herleitung dieser Differentialgleichungen aus der ursprünglichen Differentialgleichung erfordert nur, dass zu beurtheilen ist, ob ganze rationale Ausdrücke der bisher betrachteten Constanten mit rationalen Zahlcoefficienten verschwinden, was nach II *b*) geschieht. Die Constanten in den rationalen Coefficienten dieser Differentialgleichungen ergeben sich als rationale Ausdrücke der bisher gegebenen algebraischen Constanten, sie werden also selbst wieder algebraische Zahlen.

In der Darstellung der Integrale unter der Form von Systemen normaler Elementarintegrale (No. 5), in dem Ausdruck der Differentialdeterminante derselben, in den Gliedern der Reihen für die Coefficienten der Entwickelung der Integrale (No. 2), in den Ausdrücken für die angenäherte Darstellung der Integrale (No. 3) treten immer wieder rationale Ausdrücke der bisherigen Constanten auf. Die Constanten in den rationalen Substitutionen ersten Grades No. 4 II können ebenfalls als algebraische Zahlen angenommen werden, ebenso diejenigen, welche bei den Berechnungen von No. 3 auftreten.

Es ergiebt sich hieraus, dass, wenn die Constanten in den rationalen Functionen, welche die Coefficienten der homogenen linearen Differentialgleichung bilden, algebraische Zahlen sind, sich alle im Früheren verlangten Operationen durchführen lassen.

IV. Für den Fall, dass unter den Constanten in den rationalen Coefficienten der Differentialgleichung auch Grössen vorkommen, die nicht als algebraische Zahlen vorausgesetzt sind, die man aber mit beliebiger Annäherung berechnen kann, ist Folgendes zu bemerken.

Die Gleichungen, welche in den Sätzen II *A*) und *B*) sich ergaben, werden durch dasselbe Verfahren erhalten, welches auch die Grössen a, b, α sein mögen, wobei die Coefficienten der Gleichungen ganze rationale Functionen dieser Grössen werden. Um nun die Aufgabe aus II *b*) bei einem

ganzen rationalen Ausdruck gegebener Constanten, die man mit beliebiger Annäherung berechnen kann, zu behandeln, kann man versuchen, wieder aus algebraischen Gleichungen für die Constanten eine algebraische Gleichung, welcher dieser Ausdruck genügt, von folgender Beschaffenheit zu ermitteln. Ergiebt sich das absolute Glied derselben als algebraische Zahl, so kann man nach dem Vorigen erkennen, ob dasselbe verschwindet. Ebenso wenn die vorhergehenden Coefficienten, welche verschwinden, und der erste der vorhergehenden, welcher nicht verschwindet, sich als algebraische Zahlen ergeben, so kann man nachweisen, dass jene verschwinden und dieser nicht verschwindet. Dann ist im Uebrigen das Verfahren von II *b*) unverändert anwendbar.

Von den algebraischen Gleichungen, die bei der Untersuchung der Differentialgleichung aufzulösen sind, kommen hauptsächlich die fundamentalen Exponentengleichungen, die bei den singulären Punkten auftreten, in Betracht, sobald die singulären Punkte dieser Differentialgleichung von vornherein gegeben sind. Denn die übrigen algebraischen Gleichungen ergeben sich entweder meist von so niedrigem Grade (Abh. Bd. 91, No. 7 III, No. 8 p. 178), dass sie dadurch keine algebraischen Schwierigkeiten darbieten, oder es sind Exponentengleichungen, deren Wurzeln bereits bis auf eine ganzzahlige Differenz bekannt sind; auf dieselben ist das Verfahren von II *b*) anzuwenden.

8.

Es werde hier noch die Verallgemeinerung eines Convergenzsatzes angeführt, der in Abh. Bd. 87, No. 9 II gegeben ist.

Eine Function, die durch eine Potenzreihe von x mit positiven ganzzahligen Exponenten ausgedrückt ist, möge in einer endlichen Anzahl von Punkten auf dem Convergenzkreise der Reihe die Beschaffenheit haben, dass sie bei einem solchen Punkte nicht mehr einwerthig und stetig bleibt. Und zwar soll sie, wenn ein solcher singulärer Punkt a ist, bei $x = a$ eine Entwickelung haben, welche die Form eines von $x-a$ abhängenden regulären Integrales hat (in der Entwickelung können Exponenten vorkommen, die sich nicht um ganze Zahlen unterscheiden). Wenn nun die Exponenten in diesen Entwickelungen in dem reellen Theile grösser als -1 sind, so convergirt die Reihe in allen nichtsingulären Punkten des Convergenzkreises und in denjenigen singulären, in welchen die Exponenten der Entwickelung,

nachdem das constante Glied abgezogen ist, in dem reellen Theile grösser als Null sind.

Die Coefficienten der Reihe werden durch bestimmte Integrale dargestellt, und es wird der Uebergang auf den Convergenzkreis in dem Ausdrucke des allgemeinen Gliedes unter Zugrundelegung der bei den singulären Punkten vorausgesetzten Entwickelungen gerade wie in Abh. Bd. 87, p. 336 und 337 vollzogen. Es werde $x = e^{i\vartheta}$ gesetzt und der reelle Theil der Function durch $u(\varrho, \theta)$, der Coefficient von i durch $v(\varrho, \theta)$ bezeichnet, und es sei R der Radius des Convergenzkreises. Gehört nun θ_1 einem der singulären Punkte an, so ist zu zeigen, dass bei hinreichender Annäherung von θ an θ_1 $\text{Mod.}u(R, \theta) < k[\text{Mod.}(\theta - \theta_1)]^{\alpha-1}$, wo die Constante $\alpha > 0$ ist, bleibt, und ebenso dass $\text{Mod.}v(R, \theta) < k_1[\text{Mod.}(\theta - \theta_1)]^{\beta-1}$, wo die Constante $\beta > 0$ ist, k und k_1 positive Constanten sind. Es ergiebt sich dieses aus den Entwickelungen Abh. Bd. 87, No. 10 p. 346, 349. Dann bleibt im Uebrigen das Verfahren von Abh. Bd. 87, No. 9 p. 337 etc. unverändert. In Betreff der Convergenz in den singulären Punkten gelten die Betrachtungen Abh. Bd. 87, No. 10 p. 349.

Greifswald, 5. Januar 1883.

Ueber die Integration simultaner partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln.

(Von Herrn *J. Vályi* in Klausenburg.)

Zur Integration der simultanen Differentialgleichungen:

$$(1.)\quad F_1(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad F_2(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

(wo $p, q; r, s, t,$ wie gewöhnlich, die ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten von z nach x und y bezeichnen) ist es genügend, r, s, t als Functionen von x, y, z, p, q so zu bestimmen, dass die Gleichungen (1.) erfüllt seien, und dass das gewöhnliche Differentialgleichungssystem:

$$(2.)\quad dz - p\,dx - q\,dy = 0, \quad dp - r\,dx - s\,dy = 0, \quad dq - s\,dx - t\,dy = 0$$

durch drei von einander unabhängige Integrale integrabel sei.

Dazu sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen:

$$(3.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial x} + p\dfrac{\partial s}{\partial z} + r\dfrac{\partial s}{\partial p} + s\dfrac{\partial s}{\partial q} = \dfrac{\partial r}{\partial y} + q\dfrac{\partial r}{\partial z} + s\dfrac{\partial r}{\partial p} + t\dfrac{\partial r}{\partial q}, \\ \dfrac{\partial s}{\partial y} + q\dfrac{\partial s}{\partial z} + s\dfrac{\partial s}{\partial p} + t\dfrac{\partial s}{\partial q} = \dfrac{\partial t}{\partial x} + p\dfrac{\partial t}{\partial z} + r\dfrac{\partial t}{\partial p} + s\dfrac{\partial t}{\partial q}. \end{cases}$$

Wir wollen eine neue Relation:

$$(4.)\quad F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

so bestimmen, dass die durch die Gleichungen (1.), (4.) bestimmten r, s, t die Gleichungen (3.) befriedigen.

Die Gleichungen (1.), (4.) sind so aufzufassen, dass sie die Grössen r, s, t als Functionen von x, y, z, p, q bestimmen. Unter dieser Voraussetzung, partiell nach x, y, z, p, q differentiirt geben sie die Werthe von $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}, \frac{\partial r}{\partial p}, \frac{\partial r}{\partial q}$ etc., die in den Gleichungen (3.) vorkommen. Die erhaltenen Werthe, in (3.) eingesetzt, liefern die Gleichungen:

$$(5.)\quad \left\{\begin{aligned} & D\frac{F,F_1,F_2}{r,x,t}+pD\frac{F,F_1,F_2}{r,z,t}+rD\frac{F,F_1,F_2}{r,p,t}+sD\frac{F,F_1,F_2}{r,q,t} \\ &= D\frac{F,F_1,F_2}{y,s,t}+qD\frac{F,F_1,F_2}{z,s,t}+sD\frac{F,F_1,F_2}{p,s,t}+tD\frac{F,F_1,F_2}{q,s,t}, \\ & D\frac{F,F_1,F_2}{r,y,t}+qD\frac{F,F_1,F_2}{r,z,t}+sD\frac{F,F_1,F_2}{r,p,t}+tD\frac{F,F_1,F_2}{r,q,t} \\ &= D\frac{F,F_1,F_2}{r,s,x}+pD\frac{F,F_1,F_2}{r,s,z}+rD\frac{F,F_1,F_2}{r,s,p}+sD\frac{F,F_1,F_2}{r,s,q}. \end{aligned}\right.$$

(wenn man allgemein durch $D\frac{\varphi,\psi,\chi}{u,v,w}$ die Functionaldeterminante von φ, ψ, χ nach u, v, w bezeichnet).

Diese partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung bestimmen F.

Wenn die Gleichungen (5.) ausser den evidenten gemeinschaftlichen Lösungen $F=F_1$ und $F=F_2$ keine anderen gemeinschaftlichen Lösungen besitzen, haben auch die Gleichungen (1.) kein gemeinschaftliches Integral. Die allgemeinste gemeinschaftliche Lösung von (5.) führt zu den allgemeinsten Werthen von r, s, t, und dann die Integration von (2.) zu dem allgemeinsten Werthe von z.

Die Integration der simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung so wie auch die Integration eines integrablen unvollständigen gewöhnlichen Differentialgleichungssystems erster Ordnung ist bekannt. Die gestellte Aufgabe ist also in principio gelöst.

Ein ähnliches Verfahren gestattet die Integration von k simultanen partiellen Differentialgleichungen k^{ter} Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln, — wie man leicht bemerkt.

Ein einfaches Beispiel möge das Integrationsverfahren beleuchten.

Die gemeinschaftliche Lösung zu bestimmen von

$$(6.)\quad r=q \quad \text{und} \quad t=p.$$

Zur Bestimmung von s dienen die Gleichungen:

$$\frac{\partial s}{\partial x}+p\frac{\partial s}{\partial z}+q\frac{\partial s}{\partial p}+s\frac{\partial s}{\partial q}=p, \quad \frac{\partial s}{\partial y}+q\frac{\partial s}{\partial z}+r\frac{\partial s}{\partial p}+p\frac{\partial s}{\partial q}=q.$$

Das allgemeine gemeinschaftliche Integral hiervon ist:

$$(7.)\quad F(u_0, u_1, u_2, u_3)=0,$$

wo

$$u_0=z-s, \quad u_1=(s+p+q)e^{-x-y}, \quad u_2=(s+\alpha p+\alpha^2 q)e^{-\alpha^2 x-\alpha y},$$
$$u_3=(s+\alpha^2 p+\alpha q)e^{-\alpha x-\alpha^2 y},$$

α eine complexe dritte Wurzel der Einheit und F eine beliebige Function bedeutet.

Zur Integration der Gleichungen (2.) führen wir statt p, q, s, z die Grössen u_0, u_1, u_2, u_3 ein. Wir erhalten die Gleichungen:

$$du_0 + e^{x+y}du_1 = 0, \quad du_0 + e^{\alpha^2 x+\alpha y}du_2 = 0, \quad du_0 + e^{\alpha x+\alpha^2 y}du_3 = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (7.) ist das System äquivalent mit diesem:

$$du_0 = 0, \quad du_1 = 0, \quad du_2 = 0, \quad du_3 = 0.$$

Die allgemeinste gemeinschaftliche Lösung von (6.) wird also durch

$$u_0 = c_0, \quad u_1 = 3c_1, \quad u_2 = 3c_2, \quad u_3 = 3c_3$$

(wo c_0, c_1, c_2, c_3 beliebige Constanten sind) geliefert, woraus

$$z = c_0 + c_1 e^{x+y} + c_2 e^{\alpha^2 x+\alpha y} + c_3 e^{\alpha x+\alpha^2 y}$$

oder in reeller Form:

$$z = c_0 + c_1 e^{x+y} + c_2' e^{-\frac{x+y}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-y)\right) + c_3' e^{-\frac{x+y}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-y)\right).$$

Klausenburg (Ungarn), 1882 März.

Ein combinatorischer Satz.

(Von Herrn *Stern* in Göttingen.)

Euler hat in seiner Introd. in analysin infinitorum § 314 einen Satz bewiesen, welcher combinatorisch ausgedrückt so lautet: Die Anzahl der Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung aus allen Classen zur Summe n gebildet aus den Elementen 1, 2, ... m ist gleich der Anzahl der Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung zur Classe m und zur Summe $n+m$ gebildet aus allen verwendbaren Elementen. Man kann einen anderen combinatorischen Satz beweisen, welcher mit diesem eine gewisse Aehnlichkeit hat. Bezeichnet man nämlich die Formen, welche man erhält, wenn man nicht bloss die Combinationen mit unbeschränkter Wiederholung sondern auch deren Permutationen bildet, wie es gewöhnlich geschieht, als *Variationen*, so hat man den Satz: Die Anzahl der Variationen aus allen Classen zur Summe n gebildet aus den *zwei* Elementen 1 und m ist gleich der Anzahl der Variationen aus allen Classen zur Summe $n+m$ gebildet aus allen verwendbaren Elementen, welche nicht kleiner als m sind. Bezeichnet man durch ${}^{n}v(1, m)$ die aus den Elementen 1 und m gebildeten Variationen zur Summe n, ihre Anzahl durch ${}^{n}v_1(1, m)$, ferner durch ${}^{n}V(m)$ die Variationen zur Summe n gebildet aus allen verwendbaren Elementen, die nicht kleiner als m sind, ihre Anzahl durch ${}^{n}V_1(m)$, so heisst dieser Satz

$$(1.) \qquad {}^{n}v_1(1, m) = {}^{n+m}V_1(m).$$

Man findet z. B. dass ${}^{7}v(1, 3)$ aus neun Formen besteht, nämlich

1111111, 11113, 11131, 11311, 13111, 133, 31111, 313, 331.

Aber auch ${}^{10}V(3)$ besteht aus neun Formen, nämlich

10, 37, 334, 343, 433, 46, 55, 64, 73.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich daraus, dass man, wenn man in ${}^{n}v(1, m)$ von allen Formen, welche (von links nach rechts gerechnet) mit

dem Elemente 1 beginnen, dieses wegnimmt, alle Formen von ${}^{n-1}v(1,m)$ und keine anderen erhält, und ebenso, wenn man von allen Formen, welche mit dem Elemente m beginnen, dieses wegnimmt, alle Formen von ${}^{n-m}v(1,m)$ und keine anderen erhält, so dass man

$$(2.) \quad {}^{n}v_1(1,m) = {}^{n-1}v_1(1,m)+{}^{n-m}v_1(1,m)$$

hat. Zieht man ferner in allen Formen von ${}^{n}V(m)$, welche mit einem höheren Elemente als m beginnen, von diesem eine Einheit ab, so erhält man alle Formen von ${}^{n-1}V(m)$ und keine anderen, nimmt man ferner in den Formen, welche mit dem Elemente m beginnen, dieses weg, so erhält man alle Formen von ${}^{n-m}V(m)$ und keine anderen. Demnach hat man

$$(3.) \quad {}^{n}V_1(m) = {}^{n-1}V_1(m)+{}^{n-m}V_1(m)\ *).$$

Das Bildungsgesetz ist also in (2.) und (3.) dasselbe.

Setzt man in (3.) statt n den Werth $n+m$, so hat man

$${}^{n+m}V_1(m) = {}^{n+m-1}V_1(m)+{}^{n}V_1(m).$$

Ist also bis zu einem bestimmten Werthe von n jedes Glied in der Reihe

$${}^{0}v_1(1,m), \quad {}^{1}v_1(1,m), \quad \ldots \quad {}^{n-1}v_1(1,m)$$

dem Gliede, welches dieselbe Stelle in der Reihe

$${}^{m}V_1(m), \quad {}^{m+1}V_1(m), \quad \ldots \quad {}^{m+n-1}V_1(m)$$

einnimmt, gleich, so ist auch ${}^{n}v_1(1,m) = {}^{n+m}V_1(m)$.

Nun ist, wenn man $n = m$ setzt, jedes Glied in der Reihe

$${}^{0}v_1(1,m), \quad {}^{1}v_1(1,m), \quad \ldots \quad {}^{m-1}v_1(1,m)$$

der Einheit gleich, und dasselbe ist bei den Gliedern der Reihe

$${}^{m}V_1(m), \quad {}^{m+1}V_1(m), \quad \ldots \quad {}^{2m-1}V_1(m)$$

der Fall (während die vorhergehenden Glieder Null sind); also ist auch ${}^{2m}V_1(m) = {}^{m}v_1(1,m)$, und hieraus folgt dann allgemein, was zu beweisen war, dass

$${}^{n}v_1(1,m) = {}^{n+m}V_1(m).$$

Bemerkenswerth ist der Fall, wenn $m = 2$. Dann bedeutet ${}^{n}V_1(2)$ die Anzahl der Variationen aus den Elementen 2, 3, ... n zur Summe n, so dass nur das Element 1 ausgeschlossen ist, oder auch, nach dem Vorhergehenden,

---

*) Ist $n = m$, so ist ${}^{m}v_1(1,m) = 2$ und ${}^{m-1}v_1(1,m) = 1$, man muss also nach (2.) das Symbol ${}^{0}v(1,m) = 1$ setzen. Ebenso folgt aus (3.), dass man ${}^{0}V_1(m) = 1$ setzen muss, da ${}^{m}V_1(m) = 1$ und ${}^{m-1}V_1(m) = 0$.

die Anzahl der Variationen zur Summe $n-2$ aus den Elementen 1 und 2 gebildet. Hier geht mithin die Formel (3.) in

$$^{n}V_1(2) = {}^{n-1}V_1(2) + {}^{n-2}V_1(2)\ ^{*})$$

über. Die Relation ist also dieselbe wie sie bei den Zählern des Kettenbruches $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}$ stattfindet, und da ${}^{3}V_1(2)=1$, ${}^{4}V_1(2)=2$, so folgt allgemein, dass ${}^{n}V_1(2) = {}^{n-2}v_1(1,2)$ mit dem Zähler des $(n-2)^{\text{ten}}$ Näherungswerthes dieses Kettenbruches übereinstimmt, mithin

$$^{n}V_1(2) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}$$

ist. Nun bedeutet ${}^{n}V_1(1)$ die Variationen zur Summe n aus *allen* Elementen 1, 2, ... n gebildet, und es folgt aus (3.)

$$^{n}V_1(1) = 2.{}^{n-1}V_1(1)$$

und hieraus die bekannte Formel ${}^{n}V_1(1) = 2^{n-1}$.

Demnach ist die Anzahl aller Variationen zur Summe n aus den Elementen 1, 2, ... n gebildet, in welchen das Element 1 vorkommt

$$= 2^{n-1} - \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}}{\sqrt{5}}.$$

*) Diese Relation hat schon *Cayley* ohne Beweis gegeben (Messenger of mathematics V, p. 188).

Göttingen, April 1883.

Nachtrag zur Abhandlung „Die *Steiner*schen Polygone“ Seite 105 dieses Bandes.

(Von Herrn *P. H. Schoute* in Groningen.)

In der Abhandlung des Herrn *E. Weyr* „Ueber eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung“, welche im Aprilhefte der Abhandlungen der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien von diesem Jahre steht, fand ich gestern eine Arbeit „Ueber die *Steiner*schen Polygone auf einer Curve dritter Ordnung und damit zusammenhängende Sätze aus der Geometrie der Lage“ citirt, welche Herr *K. Küpper* bereits 1873 in den Prager Abhandlungen publicirt hat. Nach dem Referate im Jahrbuche über die Fortschritte der Mathematik enthält diese Abhandlung schon einen rein geometrischen Beweis der von *Steiner* gestellten Probleme. Ich bedaure lebhaft meine Unbekanntschaft mit dieser nach aller Wahrscheinlichkeit sehr verdienstvollen Arbeit, die wegen der geringen Verbreitung der Prager Abhandlungen im Auslande ganz sicher noch zu wenig bekannt ist, und hoffe, dass mein Aufsatz etwas zu ihrer allgemeineren Verbreitung beitragen möge.

Natürlich trete ich hierbei Herrn *Küpper* die Priorität der Auflösung ab.

Groningen, den 29. September 1883.

Die *Steiner*schen Polygone.

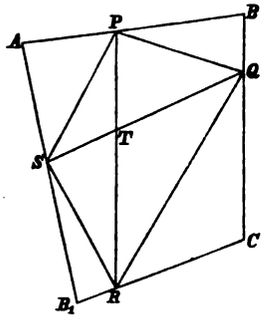
(Von Herrn *P. H. Schoute* in Groningen.)

Die Schliessungsprobleme, welche *Steiner* vor fast vierzig Jahren im 32. Bande dieses Journals (Seite 182—184) aufgestellt hat, warten noch immer einer geometrischen Lösung. Zwar hat bekanntlich *Clebsch* im 63. Bande des nämlichen Journals (Seite 94—122) die Coordinaten eines willkürlichen Punktes einer Curve dritter Ordnung C^3 ohne Doppelpunkt mittelst elliptischer Functionen eines einzigen Parameters u auszudrücken gelehrt, aus der Relation $u_1+u_2+u_3+u_0=0$ zwischen den Parametern u_1, u_2, u_3 der drei Schnittpunkte von C^3 mit einer beliebigen Geraden und einer von der Curve abhängenden Constante u_0 eine analytische Lösung der Probleme gegeben und diese nach verschiedenen Seiten hin erweitert. Aber obgleich hiedurch der geometrische Beweis ohne Zweifel dem Kreise unseres Wissens bedeutend näher gerückt und dessen wissenschaftlicher Werth noch erhöht war in Beziehung auf die historische Frage, ob *Steiner* auf dem von *Clebsch* betretenen Wege zu seinen Problemen geführt worden sei, so ist, wenn ich mich nicht irre, bis jetzt noch keine geometrische Lösung gelungen. Mir ist wenigstens kein anderer Versuch bekannt als der von Herrn *Eduard Weyr* (dieses Journal Bd. 71, Seite 18—29), welcher auf der von ihm entworfenen zwei- und zwei-gliedrigen Verwandtschaft basirt. Der Beweis gilt jedoch, wie es dieser Mathematiker selbst nachweist (Band 73, Seite 87—94), nur in dem besonderen Falle, dass die in Betracht genommene Curve dritter Ordnung einen Doppelpunkt hat; daher war *Weyr* genöthigt, ihn mit Einbüssung des geometrischen Charakters mittelst der Differentialrechnung auf den allgemeinen Fall auszudehnen.

In den folgenden Seiten werde ich eine ganz einfache Lösung obengenannter Probleme geben und einige naheliegende Fragen erörtern.

1. Hülfssatz I. „Wenn die Ecken P, Q, R, S eines einfachen Vierecks $PQRS$ und der Schnittpunkt T seiner Diagonalen PR und QS auf einer gegebenen Curve C^3 gelegen sind, giebt es unendlich viele der Curve eingeschriebene Vierecke, deren Seiten der Reihe nach durch die Punkte P, Q, R, S gehen; fixirt man die Reihe der Punkte P, Q, R, S, so ist jeder willkürliche Punkt der Curve einmal Eckpunkt eines solchen eingeschriebenen Vierecks."

Fig. 1.



Beweis. Ist A (Fig. 1) der willkürlich auf C^3 angenommene Punkt, schneidet die Gerade AP die Curve zum dritten Male in B, und BQ die Curve zum dritten Male in C, so muss nur gezeigt werden, dass der Schnittpunkt B_1 von CR und AS ein Punkt der Curve ist. Nun bilden aber die Curven dritter Ordnung, welche durch die acht Punkte P, Q, R, S, T, A, B, C gehen, einen Büschel; weil dieser Büschel zwei durch B_1 gehende Curven enthält, — die drei Geraden ASB_1, PTR, BQC, und die drei Geraden APB, STQ, B_1RC, — so ist B_1 der neunte Basispunkt dieses Büschels, und somit gehen alle seine Curven und also auch die vorliegende durch B_1. Auf dieselbe Weise findet man die Umkehrung des Satzes, welche aussagt, dass der Schnittpunkt T der Diagonalen PR und QS des eingeschriebenen Vierecks $PQRS$ auf C^3 liegen muss, sobald es ein andres eingeschriebenes Viereck giebt, dessen Seiten der Reihe nach durch P, Q, R, S gehen.

2. Satz I von *Steiner*. „Nennt man ein der Curve C^3 eingeschriebenes $2n$-Eck ein *Steiner*sches $2n$-*Eck*, wenn seine Seiten abwechselnd durch einen von zwei festen Punkten P und Q der Curve gehen, so können nur die zwei folgenden Fälle eintreten, 1) entweder die willkürlich gewählten festen Punkte P und Q lassen kein einziges *Steiner*sches $2n$-Eck zu, 2) oder es sind deren unendlich viele möglich; im letzteren Falle ist jeder willkürliche Punkt der Curve einmal Eckpunkt eines solchen $2n$-Ecks."

Beweis. Angenommen, dass es für die Punkte P und Q schon ein *Steiner*sches $2n$-Eck $ABCDEFGH\ldots$ gäbe, so hat man nur zu zeigen, wie man hieraus unmittelbar entnehmen kann, die Punkte P und Q lassen nun auch ein zweites *Steiner*sches $2n$-Eck zu, von dem ein ganz willkürlich auf C^3 gewählter Punkt ein Eckpunkt ist. Bilden nun (Fig. 1) APB und BQC zwei auf einander folgende Seiten des gegebenen $2n$-Ecks, und ist

B_1 der willkürlich gewählte Punkt, R der dritte Schnittpunkt von B_1C und S der dritte Schnittpunkt von B_1A mit der Curve, so folgt aus der Umkehrung des Hülfssatzes, dass der Schnittpunkt T der Diagonalen PR und QS des Vierecks $PQRS$ auf der Curve gelegen ist. Und nun zeigt man nach einander, erstens dass R und S, zweitens dass P und Q ein *Steiner*sches $2n$-Eck mit B_1 als Eckpunkt zulassen. Aus dem Hülfssatze folgt nämlich, dass man die Paare von Seiten AB und BC, CD und DE, EF und FG, ..., von denen jedes Paar eine Seite durch P und eine Seite durch Q enthält, durch Paare von Seiten AB_1 und B_1C, CD_1 und D_1E, EF_1 und F_1G... ersetzen kann, von denen jedes Paar eine Seite durch S und eine Seite durch R enthält; hierdurch entsteht dann für die Punkte S und R ein *Steiner*sches $2n$-Eck $AB_1CD_1EF_1GH_1$... mit B_1 als Eckpunkt. Und nachher kann man immer mittelst des Hülfssatzes die Paare von Seiten B_1C und CD_1, D_1E und EF_1, F_1G und GH_1... dieses neuen $2n$-Ecks auf dieselbe Weise durch Paare von Seiten B_1C_1 und C_1D_1, D_1E_1 und E_1F_1, F_1G_1 und G_1H_1... ersetzen, so dass die eine Seite jedes Paares durch Q, die andere durch P geht; dadurch wird endlich für P und Q ein *Steiner*sches $2n$-Eck $A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$... mit einem Eckpunkte B_1 erzeugt.

3. Nennt man die Punkte R und S, in denen die Verbindungsgeraden von den Punkten P und Q auf C^3 mit einem ganz beliebig auf dieser Curve gewählten Punkte T die Curve zum dritten Male treffen, „die Projectionen von P und Q aus T“, und nennt man zwei Punkte der Curve, die in angegebener Weise eine Unendlichkeit von eingeschriebenen *Steiner*schen $2n$-Ecken zulassen, ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung, so hat man folgenden

Satz von *Clebsch*. „Bilden die Punkte P und Q einer Curve C^3 für diese Curve ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung, so thun dies auch alle Projectionen von P und Q aus beliebig gewählten Punkten der Curve C^3.“

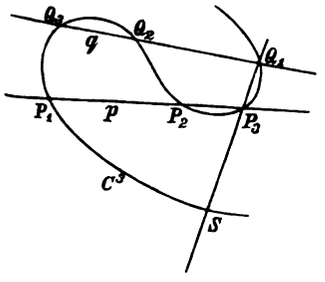
Der Beweis dieses Satzes ist unmittelbar dem Vorhergehenden zu entnehmen. Der Satz ist jedoch nicht umkehrbar, d. h. wenn P und Q ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung bilden und ebenso R und S, so sind R und S nicht immer als Projectionen von P und Q zu betrachten. Denn es wird sich sogleich zeigen, dass ein Punkt P mit verschiedenen Punkten Q der Curve ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung bilden kann.

Nennt man weiter AC, BD, CE, DF, ... die Theile der Curve C^3, die bei einem *Steiner*schen Polygon $ABCDEFGH$... als die Projectionen von PQ aus B, C, D, E, ... zu betrachten sind, einander gleich, — wobei

man natürlich nicht an Gleichheit in Bogenlänge zu denken hat, — so ist die Bedingung, dass P und Q ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung bilden, auch dadurch auszudrücken, dass PQ n-mal in einem Curvenumlaufe oder in mehreren Curvenumläufen enthalten sei; aber auch selbst die Betrachtung eines unmessbaren n führt nur zur reellen Periode der Curve und steht aus diesem Grunde der analytischen Theorie von *Clebsch* nach.

4. Hülfssatz II. „Wenn die Curve C^3 von zwei beliebigen Geraden p und q in den Punkten P_1, P_2, P_3 und Q_1, Q_2, Q_3 geschnitten wird, so giebt es unendlich viele der Curve eingeschriebene Sechsecke, deren Seiten der Reihe nach durch die Punkte P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3 gehen. Ist die Folge dieser Punkte einmal so fixirt, dass keine zwei Punkte einer nämlichen Geraden unmittelbar auf einander folgen, so ist jeder beliebige Punkt der Curve einmal Eckpunkt eines solchen Sechseckes."

Fig. 2.

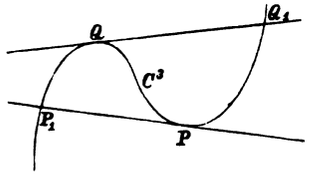


Beweis. Sind von einem beliebigen Punkte A der Curve angefangen die sechs Seiten des Sechsecks mit den Punkten, die sie enthalten:

AP_1B, BQ_1C, CP_2D, DQ_2E, EP_3F, $FQ_3\ldots$,

so hat man nur zu zeigen, dass die Gerade FQ_3 durch A geht. Wenn nun S (Fig. 2) den dritten Schnittpunkt von P_3Q_1 mit der Curve bezeichnet, so ergiebt sich aus der Anwendung des ersten Hülfssatzes auf das einfache Viereck $P_1Q_1P_2S$ (für welches der Schnittpunkt P_3 der Diagonalen auf C^3 liegt), dass das Viereck AP_1B, BQ_1C, CP_2D, $DS\ldots$ der Curve eingeschrieben ist, die Gerade DS also durch A, oder die Gerade AS durch D geht. Und ganz auf dieselbe Weise folgt aus der Betrachtung des einfachen Vierecks $SQ_2P_3Q_3$ (für welches der Schnittpunkt Q_1 der Diagonalen auf C^3 liegt), dass die Eckpunkte des Vierecks ASD, DQ_2E, EP_3F, FQ_3 auf C^3 liegen, die FQ_3 also durch A geht, u. s. w.

Fig. 3.



Verdoppelungs- und Halbirungstheorem. „Bilden die Tangentialpunkte P_1 und Q_1 von den Punkten P und Q der Curve C^3 ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung, so bilden die Punkte P und Q ein *Steiner*sches Paar $2n^{ter}$ Ordnung und umgekehrt."

Beweis. Wenn in Fig. 2 die Punkte P_2 und P_3 in einen Punkt P und die Punkte Q_2 und Q_3 in einen Punkt Q zusammenfallen, so findet man, dass die Curve C^3 (Fig. 3)

unendlich viele eingeschriebene Sechsecke zulässt, deren Seiten der Reihe nach durch die Punkte P_1, Q_1, P, Q, P, Q gehen. Sind nun P_1 und Q_1 ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung und ist $ABCDEFGH\ldots$ ein *Steiner*sches $2n$-Eck, dessen Seiten abwechselnd durch P_1 und Q_1 gehen, so kann man der Reihe nach jedes Seitenpaar dieses Polygons, z. B. ABC, CDE, $EFG\ldots$ durch den übrigen Theil der oben genannten Sechsecke, also durch vier abwechselnd durch P und Q gehende Seiten ersetzen und so ein *Steiner*sches $4n$-Eck erhalten, dessen Seiten abwechselnd durch P und Q gehen, u. s. w.

Absichtlich habe ich das Verdoppelungstheorem von *Steiner* durch das oben gegebene ersetzt, weil das letztere die beiden Punkte P und Q genau auf die nämliche Weise behandelt.

---

5. Untersuchen wir jetzt einige besondere Fälle.

a. Viereck. Fallen in Fig. 1 die Punkte P und R in einen Punkt P, die Punkte Q und S in einen Punkt Q zusammen, so erhält man eine Reihe von *Steiner*schen Vierecken, von welchen P und Q die *Steiner*schen Punkte sind; in diesem Falle sind aber die Punkte P und Q dadurch charakterisirt, dass sie den nämlichen Tangentialpunkt, den Punkt T von Fig. 1, haben. Umgekehrt ist jedes Punktepaar P und Q mit gemeinschaftlichem Tangentialpunkte T ein *Steiner*sches Paar zweiter Ordnung; also giebt es drei Punkte Q, welche mit einem willkürlich gewählten Punkte P vereint ein *Steiner*sches Paar zweiter Ordnung bilden.

Schon *Poncelet* hat bewiesen, dass die Gegenecken eines vollständigen Vierecks, dessen Eckpunkte auf einer gegebenen Curve C^3 liegen, in Bezug auf diese Curve den nämlichen Tangentialpunkt haben; auch aus diesem Satze kann man die Eigenschaften der *Steiner*schen Vierecke ableiten.

Sind P_1, P_2, P_3 die drei Schnittpunkte von C^3 mit einer beliebigen Geraden, und ist P_2' der Tangentialpunkt von P_2, so ist $P_1P_2P_3P_2'$ ein einfaches der Curve eingeschriebenes Viereck, da der Schnittpunkt der Diagonalen, der Punkt P_2, auf der Curve liegt. Hieraus folgt, dass es unendlich viele eingeschriebene Vierecke giebt, deren Seiten der Reihe nach durch P_1, P_2, P_3, P_2' gehen. Nur wenn die durch P_2' gehende Seite eines solchen Vierecks die Curve in einem von P_2' verschiedenen Punkte berührt, ist dieses Viereck als ein eingeschriebenes Dreieck zu betrachten, dessen Seiten der Reihe nach durch drei in einer Geraden gelegene Punkte P_1,

P_2, P_3 von C^3 gehen. Desshalb giebt es, wie *Hesse* nachgewiesen hat, bei gegebener Curve C^3 und gegebener Geraden drei Dreiecke von der beschriebenen Beschaffenheit.

Sind A, B, C die drei einfachen Fundamentalpunkte einer involutorischen quadratischen Transformation, so liegen die vier sich selbst entsprechenden Punkte M, M_a, M_b, M_c bekanntlich so, dass die Geraden MM_a und M_bM_c durch A, die Geraden MM_b und M_cM_a durch B und die Geraden MM_c und M_aM_b durch C gehen. Wie ich an einer andern Stelle*) gezeigt habe, hat nun das Netz von Curven C^3 durch A, B, C und die vier Punkte M die Eigenschaft, durch diese Transformation Curve für Curve in sich selbst überzugehen. Weil es aber für jedes Paar aus den drei Fundamentalpunkten ein *Steiner*sches Viereck giebt (z. B. für A und B das Viereck $MM_aM_bM_c$), welches allen diesen Curven gemeinschaftlich ist, so haben die drei Punkte A, B, C in Bezug auf jede dieser Curven einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt. Hiermit ist aber umgekehrt im Allgemeinen noch nicht gezeigt, dass eine gegebene Curve C^3 durch involutorische quadratische Transformation nur in sich selbst übergehen kann, wenn die drei Fundamentalpunkte in Bezug auf diese Curve den nämlichen Tangentialpunkt haben.

b. Sechseck. Fallen in Fig. 2 die drei Punkte P_1, P_2, P_3 in einen Inflexionspunkt P und die drei Punkte Q_1, Q_2, Q_3 in einen Inflexionspunkt Q zusammen, so bilden diese Punkte nach dem zweiten Hülfssatze ein *Steiner*sches Paar dritter Ordnung. Und so folgt weiter aus dem Satze von *Clebsch*, dass ein beliebig gewählter Punkt P von acht verschiedenen Punkten Q zu einem *Steiner*schen Paare dritter Ordnung ergänzt wird; diese acht Punkte bilden nämlich mit P eine Inflexionsgruppe von neun Punkten, den neun Projectionen der Inflexionspunkte aus einem bestimmten Punkte von C^3. Was *Steiner* von der Relation zwischen den Punkten P und Q bei Sechsecken, Zehnecken, u. s. w. noch angiebt, wird unmittelbar gefunden durch die Annahme, der Anfangspunkt A falle mit P zusammen. Und die Relation zwischen P und Q bei Zwölfecken, welche *Clebsch* erwähnt, folgt sogleich aus meinem Verdoppelungstheoreme.

c. Man kann auch fragen, für wie viele Curven eines Büschels

*) „Deux cas particuliers de la transformation birationnelle" (Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, 2. Série, tome VI, page 152—169 et 174—189). Die dort in den Artikeln 7 und 9 angestellte Betrachtung bezieht sich nur auf eine quadratische Transformation von besonderer Beschaffenheit, ist aber im allgemeinen Falle einer willkürlichen quadratischen Transformation gültig.

dritter Ordnung zwei bestimmte Punkte P und Q der neun Basispunkte $P, Q, R, S, T\ldots$ ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung bilden. Ist dies für eine dieser Curven der Fall, so wird man R als einen der Eckpunkte eines der $2n$-Ecke annehmen können. Und wenn man der Reihe nach den dritten Schnittpunkt von der Curve mit PR durch A_1, mit QA_1 durch B_1, mit PB_1 durch A_2, mit QA_2 durch B_2, mit PB_2 durch A_3 u. s. w. und mit PB_{n-1} durch A_n bezeichnet, so muss sich A_n wieder auf der Geraden QR befinden. Beschreibt nun A_1 die Gerade PR, so ist der Ort

von B_1 eine Curve $C^3\ (Q^2, ST\ldots)$,
- A_2 - - $C^7\ (P^4QR^3, S^2T^2\ldots)$,
- B_2 - - $C^{12}(P^7Q^6R^3, S^4T^4\ldots)$,
- A_3 - - $C^{19}(P^9Q^4R^7, S^6T^6\ldots)$,
- B_3 - - $C^{27}(P^6Q^{12}R^8, S^9T^9\ldots)$,
- A_4 - - $C^{37}(P^{16}Q^9R^{13}, S^{12}T^{12}\ldots)$,

und endlich

von A_n eine Curve $C^{3n^2-3n+1}\{P^{n^2}Q^{(n-1)^2}R^{n^2-n+1}, (ST\ldots)^{n^2-n}\}$.

Weil diese Curve die Gerade QR ausser Q und R in

$$3n^2-3n+1-(n-1)^2-(n^2-n+1) = n^2-1$$

Punkten schneidet, ist die gesuchte Zahl der Curven n^2-1 *).

---

6. Satz II von *Steiner*. „Nennt man ein einer Curve C^4 mit zwei Doppelpunkten P und Q eingeschriebenes $2n$-Eck ein *Steiner*sches *$2n$-Eck*, wenn seine Seiten abwechselnd durch einen von den zwei Doppelpunkten P und Q gehen, so können nur die zwei folgenden Fälle eintreten, 1) entweder die Doppelpunkte P und Q lassen kein einziges *Steiner*sches $2n$-Eck zu, 2) oder es sind deren unendlich viele möglich; im letzteren Falle ist jeder willkürliche Punkt der Curve einmal Eckpunkt eines solchen $2n$-Ecks".

Beweis. Wenn man die Punkte P und Q und einen dritten Punkt R ausserhalb der Curve C^4 als Fundamentalpunkte einer quadratischen Transformation annimmt, so entspricht in dieser Transformation der gegebenen Curve C^4 eine Curve C^3 ohne Doppelpunkt durch P und Q und jedem

*) Für die Ableitung der verschiedenen Oerter vergleiche man den Aufsatz von Herrn *C. Le Paige* „Sur quelques transformations géométriques uniformes" (Bulletins de l'Académie de Belgique 3. Série, tome IV, no. 11; 1882) und für die Notation unseren schon oben citirten Aufsatz, Art. 10.

*Steiner*schen $2n$-Ecke in C^4 ein *Steiner*sches $2n$-Eck in C^3, welches ebenfalls die Punkte P und Q zu *Steiner*schen Punkten hat. In Verbindung mit den bei der Curve C^3 gefundenen Resultaten folgt hieraus unmittelbar der neue Satz.

Mehr im Anschluss an die Vorstellungen, in die *Steiner* seine Entdeckung der quadratischen Transformation kleidet, (Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten, S. 254; Gesammelte Werke I, S. 409) hat schon Herr *Weyr* im 71. Bande dieses Journals diesen Beweis geliefert.

7. Bemerkung (von *Steiner*.) „Bei der Curve C^3 kann man die Seiten der Vielecke, die abwechselnd durch P und Q gehen, durch Kegelschnitte ersetzen, welche durch drei feste Punkte der Curve und abwechselnd durch P und Q gehen."

Beweis. Man betrachte die drei willkürlich angenommenen festen Punkte R, S, T der Curve C^3 als Fundamentalpunkte einer quadratischen Transformation. Entspricht bei dieser Transformation der Curve C^3 eine andere Curve C_1^3 durch R, S, T, so kann man auf dieser neuen Curve C_1^3 ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung P_1, Q_1 bestimmen. Die Punkte P und Q von C^3, welche mit P_1 und Q_1 correspondiren, lassen dann eine unendliche Anzahl von *Steiner*schen Kegelschnitt-$2n$-Ecken zu, u. s. w.

Steiner hat seine Bemerkung nicht nur für Curven C^3, sondern auch für Curven C^4 mit zwei Doppelpunkten aufgestellt. Wie schon *Weyr* am angeführten Orte nachgewiesen hat, ist dies aber nicht richtig. Will man, dass ein Kegelschnitt durch einen der beiden Doppelpunkte die Curve in zwei beweglichen Punkten schneide, so muss man vier feste Punkte R, S, T, U auf der Curve annehmen. Dabei tritt dann aber der Uebelstand ein, dass je zwei auf einander folgende Kegelschnitte identisch sind, da sie fünf gemeinschaftliche Punkte haben. Wie wir sogleich sehen werden, sind die *Steiner*schen Kegelschnittpolygone bei Curven C^4 nur in einem besonderen Falle möglich.

Vor den bekannten analytischen Methoden hat die hier entwickelte geometrische den bedeutenden Vortheil, gleichmässig auf Curven C^3 ohne und mit Doppelpunkt zu passen; die Methode von *Clebsch* dagegen, welche die Gleichung $u_1+u_2+u_3+u_0=0$ zu Grunde legt, lässt sich nur auf Curven C^3 ohne Doppelpunkt, die Methode von *Weyr* (Mathem. Annalen Bd. III

Seite 235—238 und *Clebsch-Lindemann* „Vorlesungen über Geometrie I, Seite 589) mittelst Einführung von Parametern ohne elliptische Functionen naturgemäss nur auf Curven C^3 mit Doppelpunkt anwenden.

Aber auch die analytische Lösung des Problems im Falle einer Curve C^3 mit Doppelpunkt lässt in der Untersuchung der Realität der Polygone der Behandlung nach zu wünschen übrig. Ausgehend vom Satze, dass die Gleichung einer Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt immer nur auf eine Weise in die Form

$$x_1^3+x_2^3+x_1x_2x_3 = 0$$

transformirt werden kann, wobei die Coordinaten der Punkte der Curve sich mittelst der Gleichungen

$$\sigma x_1 = u^2, \quad \sigma x_2 = u, \quad \sigma x_3 = -(u^3+1)$$

als Functionen dritten Grades eines Parameters u darstellen lassen, findet man zwischen den Parametern u_1, u_2, u_3 von den drei Schnittpunkten einer beliebigen Geraden mit C^3 die Relation

$$u_1u_2u_3 = -1,$$

und hieraus folgt unmittelbar, dass P und Q zwei *Steiner*sche Punkte n^{ter} Ordnung für die Curve sind, wenn ihre Parameter u_p und u_q der Gleichung

$$u_p^n = u_q^n$$

genügen (*Clebsch-Lindemann*), oder wenn sie beide Wurzeln der Gleichung

$$u^n = \varrho$$

sind, wo ϱ eine willkürliche Constante bedeutet (*Weyr*). Nimmt man nun P als gegeben an und bestimmt Q aus der Bedingungsgleichung, so findet man bei ungeradem n als reelles Resultat nur $q = p$, was die Coincidenz der Punkte P und Q verlangt, und bei geradem n als reelles Resultat obendrein nur noch $q = -p$, was sich schon bei einem *Steiner*schen Vierecke vorfindet und desshalb nur *Steiner*sche $4m$-Ecke liefert, die aus einer m-maligen Wiederholung eines Vierecks bestehen. Alles zusammengenommen würde es also scheinen, es gäbe nur *Steiner*sche *Vier*ecke, und dabei entspräche einem gegebenen Punkte P nur ein einziger Punkt Q. Folgt nun das Letztere bei Vierecken in einer Curve C^3 mit Doppelpunkt allerdings auch aus den geometrischen Betrachtungen, weil wirklich aus einem Punkte dieser Curve nicht vier sondern zwei Tangenten an die Curve zu legen sind, so fordert doch der erste Theil von anderer Seite mindestens Bestätigung.

Aber es lässt sich ganz leicht zeigen, dass die angenommene Gleichungsform nur dann mit einem reellen Coordinatendreieck vereinbar und also das Gefundene nur dann gültig ist, wenn der Doppelpunkt der Curve C^3 ein eigentlicher Knotenpunkt ist; denn bei der angenommenen Form der Gleichung sind die Seiten $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ bekanntlich die Tangenten der Curve im Doppelpunkte, und $x_3 = 0$ ist die Verbindungslinie der drei Wendepunkte der Curve. Hat man es also mit einer Curve C^3 mit isolirtem Punkte zu thun, so kann man die vorausgesetzte Gleichungsform nur erhalten, wenn man dem Coordinatensysteme ein theilweise imaginäres Coordinatendreieck zu Grunde legt, und dann folgt aus der Bemerkung, dass imaginäre Werthe des Parameters u dabei reelle Punkte angeben können, die Unrichtigkeit der oben angestellten Betrachtung.

Hat die Curve C^3 einen isolirten Punkt, so kann man, wie es ***Salmon*** zuerst gezeigt hat, von der Gleichung

$$(x_1^2+x_2^2)x_3 = x_1^3$$

ausgehen, wo $x_3 = 0$ eine Wendetangente, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ den isolirten Punkt und $x_1 \pm i x_2 = 0$ die beiden imaginären Tangenten der Curve in diesem Punkte darstellen. Bringt man nun die Coordinaten eines Punktes der Curve mittelst der Gleichungen

$$\sigma x_1 = u(u^2+1), \quad \sigma x_2 = u^2+1, \quad \sigma x_3 = u^3$$

mit einem Parameter u in Verbindung, so findet man zwischen den Parametern u_1, u_2, u_3 der drei Schnittpunkte von C^3 mit einer beliebigen Geraden die Relation

$$u_1+u_2+u_3-u_1u_2u_3 = 0$$

oder

$$u_3 = -\frac{u_1+u_2}{1-u_1u_2}.$$

Setzt man also mit ***Durège*** (Math. Annalen Bd. I Seite 512)

$$u_1 = \operatorname{tg}\theta_1, \quad u_2 = \operatorname{tg}\theta_2, \quad u_3 = \operatorname{tg}\theta_3,$$

so findet man zwischen den neuen Parametern θ_1, θ_2, θ_3 die einfache Relation

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3 = k\pi,$$

wo k eine willkürliche ganze Zahl bedeutet. Und hieraus folgt weiter, dass P und Q ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung bilden, wenn ihre Parameter θ_p und θ_q der Gleichung

$$\theta_p-\theta_q = \frac{c\pi}{n}$$

Genüge leisten, wo c eine ganze zwischen Null und n gelegene Zahl be-

zeichnet, die mit n keinen gemeinschaftlichen Factor hat. Somit ergiebt sich die Realität von *Steiner*schen Polygonen aller geraden Seitenzahlen, und ist es ebenso evident, dass in Bezug auf eine Curve dritter Ordnung mit isolirtem Punkte ein gegebener Punkt P bei einem Viereck einen einzigen Punkt Q, bei einem Sechs-, Acht- und Zwölfeck zwei Punkte Q, bei einem Zehn-, Sechzehn-, Zwanzig- und Vierundzwanzigeck vier Punkte Q, bei einem Vierzehn-, Achtzehn-, Achtundzwanzig- und Sechsunddreissigeck sechs Punkte Q, bei einem Dreissig-, Zweiunddreissig-, Vierzig- und Achtundvierzigeck acht Punkte Q bestimmt, u. s. w.

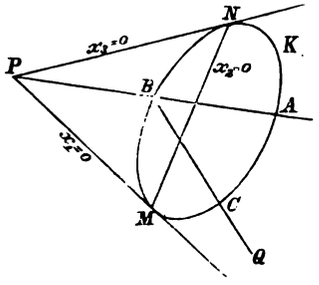
9. Hat die gegebene Curve C^3 einen Doppelpunkt D, sind die Punkte P, Q für sie ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung, ist R ein beliebiger Punkt ausserhalb der Curve, und führt man die Curve mittelst einer quadratischen Transformation mit den Fundamentalpunkten P, Q, R in eine Curve C^4 über, so hat diese drei Doppelpunkte, P, Q und den dem D entsprechenden Punkt D_1; ausserdem sind die Punkte P, Q für diese neue Curve ebenfalls *Steiner*sche Punkte n^{ter} Ordnung. Nimmt man nun abermals zwei ganz beliebige Punkte S, T von C^4 und D_1 als Fundamentalpunkte einer neuen quadratischen Transformation an, so geht C^4 in eine andere Curve C_1^4 und es gehen die *Steiner*schen Polygone in C^4 in Kegelschnittpolygone in C_1^4 über, von denen die Kegelschnittseiten alle durch S, T und D_1 aber nur abwechselnd durch P und Q gehen. Hier ist also die in Art. 7 beschriebene Unmöglichkeit einfach dadurch aufgehoben, dass einer der drei festen Punkte der Kegelschnitte der dritte Doppelpunkt der Curve C^4 ist.

---

10. Geht man wieder von einer Curve C^3 mit Doppelpunkt D aus, für welche P und Q ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung bilden, und unterwirft man diese Curve einer quadratischen Transformation, für die P, Q und der Doppelpunkt D die Fundamentalpunkte sind, so wird sie übergeführt in einen Kegelschnitt durch D, auf dem aber P und Q nicht mehr gelegen sind. Und dabei ist es klar, dass jedes *Steiner*sche $2n$-Eck von C^3, dessen Seiten abwechselnd P und Q enthalten, in ein dem Kegelschnitt eingeschriebenes $2n$-Eck übergeht, dessen Seiten ebenfalls abwechselnd durch P und Q gehen. Mit Rücksicht auf zwei ausserhalb des Kegelschnittes gelegene Punkte P und Q hat man also bei den Curven zweiter Ordnung ein den *Steiner*schen Problemen analoges Problem erhalten; dasselbe bildet, wie man

unmittelbar einsieht, einen ganz besonderen Fall des bekannten Satzes *Poncelet*s über das einem Kegelschnitte eingeschriebene und zugleich einem anderen Kegelschnitte umgeschriebene Polygon *). Hierbei tritt aber der Umstand ein, dass man bei gegebenem P und n für Q nicht einige unzusammenhängende Punkte, sondern einen geometrischen Ort findet. Ich beendige meinen Aufsatz mit der Aufsuchung dieses geometrischen Ortes.

Fig. 4.



Ist MN (Fig. 4) eine Secante des gegebenen Kegelschnittes K, und nimmt man nun MN und die Tangenten in M und N als Seiten des Coordinatendreiecks an, so ist die Gleichung des Kegelschnittes von der Form

$$x_3 x_1 = x_2^2,$$

und die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Curve stehen durch die Proportion

$$x_1 : x_2 : x_3 = u^2 : u : 1$$

mit einem Parameter u in Verbindung. Ist nun der Schnittpunkt der beiden Tangenten der beliebig gegebene Punkt P, ist Q mit den Coordinaten $y_1 y_2 y_3$ einer der Punkte, die mit P für den Kegelschnitt ein *Steiner*sches Paar bilden, und ist ABC ein Theil eines *Steiner*schen Polygons, so hat man einerseits die Relation zwischen den Parametern zweier mit P auf einer Geraden gelegenen Punkte A und B, andererseits die Relation zwischen den Parametern zweier mit Q auf einer Geraden gelegenen Punkte B und C zu suchen. Die erste Relation ist sehr einfach, denn die Summe der beiden Parameter ist Null. Also kann man die Parameter der auf einander folgenden Ecken eines *Steiner*schen Polygons $ABCDEFGH\ldots$ durch u_1, $-u_1$, u_2, $-u_2$, ... bezeichnen, und man hat nur noch die Relation zwischen u_n und u_{n-1} (eigentlich zwischen u_n und $-u_{n-1}$) zu finden. Und diese ist offenbar gegeben durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} u_{n-1}^2 & -u_{n-1} & 1 \\ u_n^2 & u_n & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$u_n = \frac{y_2 u_{n-1} + y_1}{y_3 u_{n-1} + y_2},$$

*) Vergl. „Traité des propriétés projectives des figures", Bd. I, Seite 347 der zweiten Auflage.

und wenn man endlich $\frac{y_1}{y_3} = x$ und $\frac{y_2}{y_3} = y$ setzt,

$$u_n = \frac{y u_{n-1} + x}{u_{n-1} + y}.$$

Gehen wir jetzt zur Specialisirung der verschiedenen Fälle über.

a. Viereck. Die Bedingung für ein geschlossenes Viereck ist offenbar $u_3 = u_1$. Mittelst der allgemeinen Relation zwischen u_n und u_{n-1} ändert sich dies in

$$u_1 = \frac{(y^2+x)u_1 + 2xy}{2yu_1 + (y^2+x)},$$

welche Gleichung unabhängig von den Werthen von u_1 erfüllt ist für $y = 0$. In diesem Falle ist daher der Ort von Q die Gerade $x_2 = 0$, die Polare von P in Bezug auf den Kegelschnitt, ein auch aus der Polarentheorie bekanntes Resultat.

b. Sechseck. Die Bedingung $u_4 = u_1$ geht in bekannter Weise über in

$$u_1 = \frac{y(y^2+3x)u_1 + x(3y^2+x)}{(3y^2+x)u_1 + y(y^2+3x)},$$

was in der Voraussetzung $3y^2+x = 0$ unabhängig von u_1 wahr ist. Hier ist also der Ort des Punktes Q ein Kegelschnitt $3x_2^2 + x_1x_3 = 0$, welcher den gegebenen in den Punkten M und N berührt.

c. Achteck. Die Bedingung $u_5 = u_1$ giebt

$$u_1 = \frac{(y^4+6y^2x+x^2)u_1 + 4xy(y^2+x)}{4y(y^2+x)u_1 + (y^4+6y^2x+x^2)},$$

was für den Ort von Q die Gleichung $y(y^2+x) = 0$ liefert. Hierbei ist $y = 0$ oder $x_2 = 0$ der Ort, für welchen die Achtecke aus zweimal durchlaufenen Vierecken bestehen, und der Kegelschnitt $y^2+x = 0$ oder $x_2^2 + x_1x_3 = 0$, welcher den gegebenen in den Punkten M und N berührt, der Ort der Punkte Q, die selbständige Lösungen liefern.

c. Zehneck. Man findet

$$u_1 = \frac{y(y^4+10y^2x+5x^2)u_1 + x(5y^4+10y^2x+x^2)}{(5y^4+10y^2x+x^2)u_1 + y(y^4+10y^2x+5x^2)}$$

und für den Ort von Q die Gleichung $5y^4+10y^2x+x^2 = 0$, die sich in $y^2+x(1+\frac{2}{5}\sqrt{5}) = 0$ und $y^2+x(1-\frac{2}{5}\sqrt{5}) = 0$ zerlegt; dies ergiebt also zwei Kegelschnitte, welche beide den gegebenen in M und N berühren.

d. Zwölfeck. Der Ort von Q ist $6y^5+20y^3x+6yx^2 = 0$; diese Gleichung lässt sich zerlegen in $y = 0$, $3y^2+x = 0$ und $y^2+3x = 0$. Da nun

$y = 0$ dreimal durchlaufene Vierecke und $3y^2+x = 0$ zweimal durchlaufene Sechsecke anzeigt, so enthält der Kegelschnitt $y^2+3x = 0$ oder $x_2^2+3x_1x_3 = 0$, welcher immer wieder den gegebenen Kegelschnitt in M und N berührt, die Punkte Q, welche mit den eigentlichen Lösungen des Problems in Verbindung stehen.

e. 2n-Eck. Im Allgemeinen findet man für den Ort von Q die Gleichung

$$\frac{n}{1}y^{n-1}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}y^{n-3}x+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}y^{n-5}x^2+\text{etc.} = 0,$$

welche sich bei geradem n in $y = 0$ und $\frac{n}{2}-1$ Gleichungen von der Form $y^2+Ax = 0$, bei ungeradem n in $\frac{n-1}{2}$ Gleichungen von der Form $y^2+Ax = 0$ zerlegen lässt. Desshalb besteht der gesuchte Ort immer aus einigen Kegelschnitten, welche den gegebenen in M und N berühren, entweder mit oder ohne Hinzunahme der Polaren MN von P, jenachdem n gerade oder ungerade ist.

Es ist ein Leichtes, die Aenderungen anzugeben, welche eintreten, wenn die Polare von P den gegebenen Kegelschnitt nicht schneidet. Indem ich dies dem Leser überlasse, zeige ich nur noch, wie die vorigen Resultate sich fast ohne alle Rechnung ableiten lassen.

Setzt man $-y^2z$ anstatt x in die allgemeine Gleichung

$$u_n = \frac{yu_{n-1}+x}{u_{n-1}+y}$$

ein, so geht sie über in

$$\frac{u_n}{y} = \frac{\frac{u_{n-1}}{y}-z}{\frac{u_{n-1}}{y}+1}.$$

Hierin $\frac{u_n}{y}$ durch $v_n\sqrt{z}$ ersetzt, wird es

$$v_n = \frac{v_{n-1}-\sqrt{z}}{1+v_{n-1}\sqrt{z}}$$

oder mit Einführung von $\operatorname{tg}\varphi_n$ für v_n und $\operatorname{tg}\alpha$ für $\sqrt{z}$

$$\varphi_n = \varphi_{n-1}-\alpha+k\pi,$$

wo k eine ganze Zahl bezeichnet. So findet man im Falle eines $2n$-Ecks für den Ort der Punkte Q die Gleichung

$$n\alpha = k\pi$$

oder

$$n \operatorname{Arc\,tg} \frac{\sqrt{-x}}{y} = k\pi.$$

Dies liefert für $\frac{y^2}{x}$ eine Reihe von Werthen und stellt also eine Curve dar, die aus einer Combination von den auch oben gefundenen Kegelschnitten besteht. Denn es ist wieder ein Leichtes, das zweite allgemeine Resultat mit dem ersten, das die Binomialcoefficienten enthält, in völlige Uebereinstimmung zu bringen. Dies aber will ich dem geneigten Leser überlassen.

Groningen, 9. Dec. 1882.

Ueber die Curven, welche sich so bewegen können, dass sie stets geodätische Linien der von ihnen erzeugten Flächen bleiben.

(Von Herrn *J. N. Hazzidakis* in Athen.)

1. Alle solche Curven genügen der Differentialgleichung

$$(1.)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} + a\xi + b\eta + c\zeta = 0,$$

wobei a, b, c, A, B, C Constanten und ξ, η, ζ die Richtungscosinus der Hauptnormale bedeuten.

2. Genügt eine Curve nur einer solchen Differentialgleichung, so hat sie die angegebene Eigenschaft nur, wenn ihre Bewegung um eine bestimmte Axe und zwar so geschieht, dass die Winkelgeschwindigkeit zur Gleitungsgeschwindigkeit ein constantes Verhältniss beibehält. Wird die Axe der Bewegung als z-Axe angenommen, so wird die Differentialgleichung (1.)

$$x\eta - y\xi + k\zeta = 0,$$

und die Curven werden von den Gleichungen gegeben

$$(2.)\qquad \begin{cases} x = \varphi(\theta)\cos\theta, \quad y = \varphi(\theta)\sin\theta, \\ cz = \frac{1}{1-m^2}\int \left| C\varphi^2 \pm m\sqrt{C^2\varphi^4 + c^2(1-m^2)(\varphi^2+\varphi'^2)} \right| d\theta, \end{cases}$$

wo $\varphi(\theta)$, oder bloss φ, eine willkürliche Function von θ ist. Die erzeugte Fläche hat die Gleichungen

$$x = u.\cos v, \quad y = u.\sin v, \quad z = kv + f(u).$$

3. Genügt eine Curve zwei Differentialgleichungen von der Form (1.)

$$(3.)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} + \Sigma a\xi = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ A' & B' & C' \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} + \Sigma a'\xi = 0,$$

so ist sie fähig, die betrachtete Eigenschaft auch bei complicirterer Bewegung beizubehalten. Die momentane Axe der Bewegung bleibt alsdann (in Bezug auf die Curve selbst) einer Ebene parallel, deren Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix} = 0$$

ist, und schneidet eine Gerade, welche senkrecht auf dieser Ebene steht. Wird diese Ebene als xy-Ebene angenommen und die Gerade als z-Axe, so lassen sich die Gleichungen (3.) in die Form bringen

$$a\xi+(b+z)\eta-y\zeta=0, \quad (b-z)\xi+a\eta+x\zeta=0,$$

und die Gleichungen der Curve sind alsdann folgende

$$(4.) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\sqrt{\delta'}\left\{e^{-a\int\frac{dz}{N}-n\int\frac{(z-b)dz}{N\delta'}} - e^{a\int\frac{dz}{N}+n\int\frac{(z-b)dz}{N\delta'}}\right\}, \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{\delta}\left\{e^{a\int\frac{dz}{N}-n\int\frac{(z+b)dz}{N\delta}} - e^{-a\int\frac{dz}{N}+n\int\frac{(z+b)dz}{N\delta}}\right\}, \end{cases}$$

wo

$$N^2 = (2ab-mm')^2-\{a^2+(z+b)^2-m^2\}.\{a^2+(z-b)^2-m'^2\},$$
$$\delta = a^2+(z+b)^2-m^2, \quad \delta' = a^2+(z-b)^2-m'^2, \quad n = 2ab-mm'.$$

Diese Curve hat die Eigenschaft, geodätische Linie der von ihr erzeugten Fläche zu bleiben, wenn ihre Bewegung folgendermassen geschieht.

Die rechtwinkligen Axen ox, oy, oz, auf welche die Curve bezogen ist, sollen den Hauptrichtungen einer beliebig gewählten Curve parallel bleiben (und zwar die z-Axe parallel der Hauptnormale) und der Anfangspunkt $o(x_0y_0z_0)$ soll sich nach folgenden Gleichungen bewegen:

$$x_0 = a\int\left(\frac{\lambda}{\varrho}-\frac{\alpha}{T}\right)ds+b\int\left(\frac{\alpha}{\varrho}-\frac{\lambda}{T}\right)ds,$$
$$y_0 = a\int\left(\frac{\mu}{\varrho}-\frac{\beta}{T}\right)ds+b\int\left(\frac{\beta}{\varrho}-\frac{\mu}{T}\right)ds,$$
$$z_0 = a\int\left(\frac{\nu}{\varrho}-\frac{\gamma}{T}\right)ds+b\int\left(\frac{\gamma}{\varrho}-\frac{\nu}{T}\right)ds,$$

worin α, β, γ die Cosinus der Tangente der beliebig gewählten Curve, λ, μ, ν diejenigen der Normalen zur Schmiegungsebene und endlich ϱ und T die Krümmungsradien derselben Curve sind.

Die bei dieser Bewegung erzeugte Fläche (X, Y, Z) hat die Gleichungen:

$$(5.)\quad \left\{\begin{aligned} X &= a\int\left\{\alpha\varrho^2\Delta+\frac{1}{\Delta.\varrho^4}(\varrho^2\alpha''+\varrho\varrho'\alpha'+\alpha)\right\}ds \\ &\quad +2b\int\frac{\alpha\,ds}{\varrho}+\alpha x+\frac{(\alpha+\varrho\varrho'\alpha'+\varrho^2\alpha'')y}{\Delta.\varrho^3}+\varrho\alpha'(z+b), \\ Y &= a\int\left\{\beta\varrho^2\Delta+\frac{1}{\Delta.\varrho^4}(\varrho^2\beta''+\varrho\varrho'\beta'+\beta)\right\}ds \\ &\quad +2b\int\frac{\beta\,ds}{\varrho}+\beta x+\frac{(\beta+\varrho\varrho'\beta'+\varrho^2\beta'')y}{\Delta.\varrho^3}+\varrho\beta'(z+b), \\ Z &= a\int\left\{\gamma\varrho^2\Delta+\frac{1}{\Delta.\varrho^4}(\varrho^2\gamma''+\varrho\varrho'\gamma'+\gamma)\right\}ds \\ &\quad +2b\int\frac{\gamma\,ds}{\varrho}+\gamma x+\frac{(\gamma+\varrho\varrho'\gamma'+\varrho^2\gamma'')y}{\Delta.\varrho^3}+\varrho\gamma'(z+b). \end{aligned}\right.$$

In diesen Gleichungen bedeuten α, β, γ drei willkürliche Functionen der Variabeln s, welche nur die Gleichung $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ zu erfüllen brauchen; x und y sind die durch die Gleichungen (4.) gegebenen Functionen von z, so dass die Coordinaten X, Y, Z irgend eines Punktes der Fläche als Functionen von zwei unabhängigen Variabeln s und z ausgedrückt sind. Zur Abkürzung ist noch gesetzt

$$\frac{1}{\varrho^2}=\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2,\quad \Delta=\begin{vmatrix}\alpha & \beta & \gamma\\ \alpha' & \beta' & \gamma'\\ \alpha'' & \beta'' & \gamma''\end{vmatrix}.$$

Im besonderen Falle, wo die Constanten A, B, C der Gleichungen (3.) alle drei Determinanten

$$\begin{vmatrix}A & B\\ A' & B'\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}B & C\\ B' & C'\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}C & A\\ C' & A'\end{vmatrix}$$

zu Null machen, behält die momentane Axe der Bewegung immer dieselbe Richtung bei und beschreibt (in Bezug auf die Curve selbst) eine Ebene. Wird diese Richtung als Richtung der z-Axe angenommen und die Ebene als zx-Ebene, so werden die Gleichungen (3.) auf die Form gebracht

$$\begin{vmatrix}x & y\\ \xi & \eta\end{vmatrix}=0,\quad \eta+k\zeta=0,$$

und die Curve hat die Gleichungen

$$(x+mm')^2=(1+k^2-m^2)(x^2+y^2-m'^2),$$

$$z-ky=k\sqrt{1+k^2-m^2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(mx+m')^2+k^2(m'^2-x^2)}}.$$

Diese Curve leistet dasselbe, wenn ihre Bewegung folgendermassen geschieht.

Die Ebene der xz soll eine beliebige Cylinderfläche stets berühren, und die Drehungsgeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ um die Berührungslinie (welche die Richtung der z-Axe hat) soll mit der Gleitungsgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ längs derselben Linie durch die Gleichung $d\varphi = a.s.d\omega$ verbunden sein, wo s den Arcus des Hauptschnittes der Cylinderfläche bedeutet.

4. Genügt eine Curve drei verschiedenen Gleichungen von der Form (1.), so ist sie nothwendig eine ebene Curve; und jede ebene Curve hat die betrachtete Eigenschaft, wenn ihre Ebene auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche rollt.

Die gerade Linie hat offenbar die betrachtete Eigenschaft bei irgend einer Bewegung.

Hiermit sind alle Lösungen der Aufgabe angegeben.

Man denke sich eine Curve in zwei unendlich nahen Lagen. Man kann sie, wie bekannt, von der ersten Lage in die zweite übergehen lassen, indem man dieselbe um eine bestimmte Axe dreht und zugleich längs derselben Axe fortschiebt. Wenn nun die Curve bei einer solchen unendlich kleinen Bewegung um eine Axe die betrachtete Eigenschaft hat, so hat sie offenbar dieselbe Eigenschaft, auch wenn sie von der zweiten Lage durch dieselbe Bewegung in eine dritte kommt, und so weiter. Es muss also (wenn die Aufgabe lösbar ist) Lösungen geben, bei denen die Curve um eine feste Axe sich dreht und zugleich längs derselben Axe gleitet. Diese Lösungen wollen wir zuerst aufsuchen.

I.

Die Axe, um welche sich die Curve bewegt, sei als z-Axe angenommen, und die rechtwinkligen Coordinatenaxen ox, oy, oz seien fest mit der Curve verbunden. Dreht sich nun die Curve um diese Axe um den unendlich kleinen Winkel $d\omega$ in der Zeit dt und gleitet zugleich längs derselben Axe um die Strecke $d\varphi$, so haben die Componenten der Geschwindigkeit eines ihrer Punkte, dessen Coordinaten mit x, y, z bezeichnet werden, folgende Werthe

$$-y\,d\omega, \quad x\,d\omega, \quad d\varphi,$$

und da die Geschwindigkeit jedes Punktes der Curve auf der Hauptnormalen

derselben (in diesem Punkte) senkrecht stehen soll, damit die Curve eine geodätische Linie der erzeugten Fläche bleibe, so folgt die Bedingungsgleichung

$$(x\eta - y\xi)\,d\omega + \zeta\,d\varphi = 0,$$

wo ξ, η, ζ die Richtungscosinus der genannten Hauptnormale bedeuten.

Diese Gleichung soll aber in jeder Lage der Curve erfüllt werden; und da bei der Bewegung die Coordinaten x, y, z des betrachteten Punktes und die Cosinus ξ, η, ζ unverändert bleiben, so folgt, dass auch $\frac{d\varphi}{d\omega}$ unverändert bleiben muss; sei

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = k,$$

dann wird die Bedingungsgleichung

$$x\eta - y\xi + k\zeta = 0,$$

welches eine Differentialgleichung der Curve ist. Bezeichnet man die Richtungscosinus der Tangente der Curve im Punkte $(x\,y\,z)$ mit α, β, γ, so sind bekanntlich die ξ, η, ζ den Differentialen $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ proportional; daher ist

$$x\,d\beta - y\,d\alpha + k\,d\gamma = 0,$$

d. i.

$$x\,d\frac{dy}{ds} - y\,d\frac{dx}{ds} + k\,d\frac{dz}{ds} = 0,$$

also

$$x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} + k\frac{dz}{ds} = km,$$

oder

$$(x\,dy - y\,dx + k\,dz)^2 = k^2m^2(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Da die drei Coordinaten der Curve nur durch diese eine Gleichung verbunden sind, so folgt, dass es unendlich viele Curven giebt, welche die Fähigkeit haben, sich um eine feste Axe so zu bewegen, dass sie stets geodätische Linien der erzeugten Fläche bleiben.

Setzt man nun $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, und löst die Gleichung nach dz, so kommt

$$k\,dz = \frac{1}{1-m^2}\left\{-r^2 \pm m\sqrt{r^4 + (1-m^2)k^2\left(r^2 + \frac{dr^2}{d\theta^2}\right)}\right\}d\theta.$$

Hieraus ergeben sich die im Anfange gegebenen Gleichungen (2.), wenn man statt r eine willkürliche Function von θ, und $-\frac{c}{C}$ statt k schreibt.

Um jetzt die Gleichungen der erzeugten Fläche zu finden, bemerken wir, dass bei der Bewegung alle Punkte der Curve Schraubenlinien mit gleicher Höhe ($2\pi k$) erzeugen; folglich ist in jedem Punkte der Fläche

$$(6.) \qquad x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = kv + f(u).$$

Aus dem Umstande, dass die Grössen E, F, G, D, D', D'' dieser Fläche (nach der *Gauss*ischen Bezeichnung) nur von u abhängen, folgt unmittelbar, dass die Differentialgleichung ihrer geodätischen Linien folgende Form hat

$$\frac{d^2v}{du^2} + A\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + B\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + C\left(\frac{dv}{du}\right) + C' = 0,$$

wo die A, B, C, C' nur von u abhängen, so dass alle geodätischen Linien der Fläche durch eine Gleichung von der Form

$$v = \sigma(u, C_1) + C_2$$

gegeben werden, wenn die willkürlichen Constanten C_1, C_2 alle Werthe durchlaufen.

Aus dieser Gleichung der geodätischen Linien ist nun leicht zu sehen, dass jede von ihnen die Eigenschaft hat, durch ihre Bewegung um die z-Axe die Fläche zu erzeugen. Man betrachte nämlich eine bestimmte geodätische Linie, die zu den Werthen C_1' und C_2' der Constanten C_1 und C_2 gehört, und welche also die Gleichungen hat

$$x = u.\cos(\sigma + C_2'), \quad y = u.\sin(\sigma + C_2'), \quad z = k\sigma + kC_2' + f(u),$$

wenn C_1 den Werth C_1' beibehält; indem C_2 alle möglichen Werthe durchläuft, bewegt sich offenbar die geodätische Linie um die z-Axe, ohne sich zu ändern.

Es ist noch zu bemerken, dass auch die Krümmungslinien und die asymptotischen Linien derselben Fläche (6.) die Eigenschaft haben, durch ihre Bewegung um die z-Axe die Fläche zu erzeugen. Auch ist sie die einzige Fläche, deren Krümmungslinien (jeder Reihe) verschiedene Lagen einer und derselben Curve sind; dies werde ich bei einer anderen Gelegenheit beweisen.

II.

Wir wollen jetzt diejenigen Lösungen aufsuchen, bei denen die Axe, um welche sich die Curve bewegt, keine feste ist, sondern sich mit der Zeit ändert.

Zu dem Ende seien

$$(6'.) \qquad \frac{x-P}{p} = \frac{y-Q}{q} = \frac{z-R}{r}$$

die Gleichungen der momentanen Axe zur Zeit t in Bezug auf ein rechtwinkliges mit der Curve fest verbundenes Coordinatensystem; dann sind die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes (xyz) der Curve folgenden Grössen proportional:

$$\begin{vmatrix} y-Q & z-R \\ q & r \end{vmatrix} d\omega + p\,d\varphi, \quad \begin{vmatrix} z-R & x-P \\ r & p \end{vmatrix} d\omega + q\,d\varphi, \quad \begin{vmatrix} x-P & y-Q \\ p & q \end{vmatrix} d\omega + r\,d\varphi;$$

$d\omega$ und $d\varphi$ sind die Elemente der Bewegung um die momentane Axe während des Zeitmomentes dt.

Soll nun die Curve geodätische Linie der von ihr erzeugten Fläche bleiben, so muss die Hauptnormale derselben in jedem Punkte senkrecht auf der Geschwindigkeit desselben Punktes stehen; es folgt also die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} x-P & y-Q & z-R \\ p & q & r \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} d\omega + (p\xi + q\eta + r\zeta)\,d\varphi = 0,$$

welche die Form annimmt

$$(7.) \qquad \Pi\xi + K\eta + \Lambda\zeta + p(z\eta - y\zeta) + q(x\zeta - z\xi) + r(y\xi - x\eta) = 0,$$

wenn gesetzt wird

$$\Pi = p\cdot\frac{d\varphi}{d\omega} - (Qr - Rq), \quad K = q\cdot\frac{d\varphi}{d\omega} - (Rp - Pr), \quad \Lambda = r\cdot\frac{d\varphi}{d\omega} - (Pq - Qp).$$

In dieser Gleichung sind die Grössen Π, K, Λ, p, q, r Functionen der Zeit t, während die Grössen x, y, z, ξ, η, ζ nur von dem Arcus s der Curve abhängen. Soll aber eine solche Gleichung zwischen Functionen zweier Variabeln bestehen, die unabhängig von einander sind, so müssen (wie es sich durch die Theorie der linearen Differentialgleichungen leicht zeigen lässt) zwischen den sechs Grössen Π, K, Λ, p, q, r eine Anzahl i ($i \leqq 6$) linearer und homogener Gleichungen mit constanten Coefficienten existiren, und zwischen den sechs Grössen ξ, η, ζ, $(z\eta - y\zeta)$, $(x\zeta - z\xi)$, $(y\xi - x\eta)$ müssen $6-i$ ebenfalls lineare und homogene Gleichungen mit constanten Coefficienten bestehen.

Die Anzahl i kann nicht gleich sechs vorausgesetzt werden, denn dann müssten alle Π, K, Λ, p, q, r gleich 0 sein, was nicht möglich ist.

Wenn $i = 5$ ist, so lassen sich dieselben Grössen mit Hülfe von

einer unter ihnen ausdrücken, die ich mit g bezeichnen will; es ist also

$$\Pi = a.g, \quad K = b.g, \quad \Lambda = c.g, \quad p = A.g, \quad q = B.g, \quad r = C.g,$$

und die Bedingungsgleichung (7.) wird alsdann

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} + a\xi + b\eta + c\zeta = 0.$$

Da aber die Verhältnisse der Grössen p, q, r constant sind, so folgt, dass die Richtung der momentanen Axe eine und dieselbe bleibt; und wenn man die z-Axe parallel mit dieser Richtung nimmt, so ist $p = 0$, $q = 0$, mithin auch $\frac{\Pi}{r} = \text{const.}$, $\frac{K}{r} = \text{const.}$ und $\frac{\Lambda}{r} = \text{const.}$; folglich $P = \text{const.}$, $Q = \text{const.}$ und $R = \text{const.}$ Hieraus folgt, dass in diesem Falle die Axe der Bewegung unverändert bleibt. Dieser Fall ist schon erledigt.

Sei nun $i = 4$. Dann lassen sich die sechs Grössen mit Hülfe von zweien unter ihnen ausdrücken, die ich mit g und h bezeichne; es ist also

$$\Pi = ag + a'h, \quad K = bg + b'h, \quad \Lambda = cg + c'h,$$
$$p = Ag + A'h, \quad q = Bg + B'h, \quad r = Cg + C'h,$$

und die Bedingungsgleichung (7.) zerspaltet sich in die zwei folgenden

$$(\alpha.) \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} + \Sigma a\xi = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ A' & B' & C' \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} + \Sigma a'\xi = 0.$$

Wir nehmen nun an, dass die drei Determinanten

$$\begin{vmatrix} A & A' \\ B & B' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B & B' \\ C & C' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C & C' \\ A & A' \end{vmatrix}$$

nicht alle gleich Null sind (dieser besondere Fall wird nachher betrachtet). Dann finden wir aus den vorigen Gleichungen

$$\begin{vmatrix} p & A & A' \\ q & B & B' \\ r & C & C' \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die momentane Axe stets einer Ebene parallel bleibt; nimmt man diese Ebene als xy-Ebene, so ist $r = 0$, d. i. $C = C' = 0$, und da die Determinante $\begin{vmatrix} A & A' \\ B & B' \end{vmatrix}$ verschieden von Null ist, so lassen sich

die zwei Grössen h und g durch die p und q linear und homogen ausdrücken. Man kann daher annehmen $g=p$ und $h=q$, d. h. man kann setzen $A=1$, $A'=0$, $B=0$, $B'=1$. Dann ist

$$\Pi = ap+a'q, \quad K=bp+b'q, \quad \Lambda = cp+c'q,$$

oder, wenn man statt Π, K, Λ ihre Werthe einsetzt:

$$(8.) \quad p\cdot\frac{d\varphi}{d\omega}+Rq = ap+a'q, \quad q\cdot\frac{d\varphi}{d\omega}-Rp = bp+b'q, \quad Qp-Pq = cp+c'q.$$

Die letzte Gleichung zeigt, dass die momentane Axe, welche nun die Gleichungen hat

$$\frac{x-P}{p}=\frac{y-Q}{q}, \quad z=R,$$

die Gerade $x=-c'$, $y=c$ stets schneidet. Wenn man also diese Gerade als z-Axe annimmt, so ist $c=c'=0$, mithin auch $\Lambda=0$ und $P=Q=0$, so dass die momentane Axe folgende Gleichungen hat

$$\frac{x}{p}=\frac{y}{q}, \quad z=R.$$

Löst man noch die übrig gebliebenen zwei Gleichungen (8.) nach den unbekannten $\frac{d\varphi}{d\omega}$ und R, so findet man die Werthe

$$(p^2+q^2)\cdot\frac{d\varphi}{d\omega} = ap^2+(a'+b)pq+b'q^2,$$
$$(p^2+q^2)\cdot R = (a-b')pq+a'q^2-bp^2.$$

Die verschiedenen Lagen, welche die Axe der Bewegung einnimmt (in Bezug auf die mit der Curve verbundenen Axen), bilden eine Fläche, deren Gleichung ist

$$(x^2+y^2)z = (a-b')xy+a'y^2-bx^2.$$

Nun lässt sich aber die homogene Function zweiten Grades

$$(a-b')xy+a'y^2-bx^2$$

durch passende Wahl der Axen ox, oy auf der xy-Ebene in die Form bringen Mx^2+Ny^2; folglich kann man setzen $a=b'$. Dann wird die Gleichung der Fläche

$$(x^2+y^2)z = a'y^2-bx^2.$$

Setzt man endlich $z+\varrho$ statt z, so wird diese Gleichung

$$(x^2+y^2)z = (a'-\varrho)y^2-(b+\varrho)x^2,$$

und man kann die Constante ϱ so bestimmen, dass $a'-\varrho=b+\varrho$ wird. Daher

kann man annehmen $a' = b$. Alsdann werden die gefundenen Gleichungen

$$r = 0, \quad P = 0, \quad Q = 0,$$

$$(p^2+q^2)\cdot\frac{d\varphi}{d\omega} = a(p^2+q^2)+2bpq, \qquad \text{oder} \qquad \begin{aligned} r &= 0, \\ \Pi &= ap+bq, \\ K &= aq+bp, \\ \Delta &= 0. \end{aligned}$$

$$(p^2+q^2)\cdot R = b(q^2-p^2),$$

Die Gleichungen (α.) werden jetzt

$$(9.) \qquad a\xi+(b+z)\eta-y\zeta = 0, \quad (b-z)\xi+a\eta+x\zeta = 0;$$

dies sind die Differentialgleichungen der gesuchten Curve.

Um die Curve aus den Gleichungen (9.) zu finden, ersetzen wir die Cosinus ξ, η, ζ durch die Differentiale $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$. Dadurch werden die ersten Glieder derselben vollständige Differentiale, und wir finden nach der Integration

$$(10.) \qquad a\alpha+(b+z)\beta-y\gamma = m, \quad (b-z)\alpha+a\beta+x\gamma = m'.$$

Man setze noch

$$(11.) \qquad a\lambda+(b+z)\mu-y\nu = \varphi, \quad (b-z)\lambda+a\mu+x\nu = \varphi',$$

wo λ, μ, ν die Richtungscosinus der Normale auf der Schmiegungsebene der Curve, und φ, φ' zwei Hülfsvariabeln bedeuten.

Aus den Gleichungen (9.), (10.), (11.) findet man nun leicht folgende

$$(12.) \qquad \begin{cases} a = m\alpha+\varphi\lambda, & b+z = m\beta+\varphi\mu, & -y = m\gamma+\varphi\nu, \\ b-z = m'\alpha+\varphi'\lambda, & a = m'\beta+\varphi'\mu, & x = m'\gamma+\varphi'\nu, \end{cases}$$

woraus folgt

$$(13.) \quad a^2+(b+z)^2+y^2-m^2 = \varphi^2, \quad a^2+(b-z)^2+x^2-m'^2 = \varphi'^2, \quad 2ab-xy-mm' = \varphi\varphi'.$$

Wenn man die φ, φ' aus den letzten Gleichungen eliminirt, so kommt

$$\{a^2+(b+z)^2+y^2-m^2\}\cdot\{a^2+(b-z)^2+x^2-m'^2\} = (2ab-xy-mm')^2,$$

eine Fläche vierten Grades, auf der die gesuchte Curve liegt. Löst man ferner die Gleichungen (12.) nach den Cosinus, so findet man folgende Werthe

$$\alpha = \frac{a\varphi'+(z-b)\varphi}{m\varphi'-m'\varphi}, \quad \beta = \frac{(b+z)\varphi'-a\varphi}{m\varphi'-m'\varphi}, \quad \gamma = -\frac{x\varphi+y\varphi'}{m\varphi'-m'\varphi},$$

$$\lambda = -\frac{m'a+m(z-b)}{m\varphi'-m'\varphi}, \quad \mu = -\frac{m'(b+z)-ma}{m\varphi'-m'\varphi}, \quad \nu = \frac{mx+m'y}{m\varphi'-m'\varphi},$$

$$\xi = -\frac{(b+z)x+ay}{m\varphi'-m'\varphi}, \quad \eta = -\frac{(z-b)y-ax}{m\varphi'-m'\varphi}, \quad \zeta = -\frac{a^2-b^2+z^2}{m\varphi'-m'\varphi}.$$

Betrachtet man nun die vier Variabeln x, y, φ, φ' als Functionen von z, so findet man aus diesen Gleichungen

$$(14.)\qquad \frac{dx}{dz}=\frac{\alpha}{\gamma}=-\frac{a\varphi'+(z-b)\varphi}{x\varphi+y\varphi'},\quad \frac{dy}{dz}=\frac{\beta}{\gamma}=-\frac{(b+z)\varphi'-a\varphi}{x\varphi+y\varphi'},$$

und aus den Gleichungen (11.), wenn man dieselben differentiirt und die zwischen den neun Cosinus geltenden Relationen beachtet,

$$(15.)\qquad \frac{d\varphi}{dz}=\frac{\xi}{\gamma}=\frac{(b+z)x+ay}{x\varphi+y\varphi'},\quad \frac{d\varphi'}{dz}=\frac{\eta}{\gamma}=\frac{(z-b)y-ax}{x\varphi+y\varphi'}.$$

Der Nenner $x\varphi+y\varphi'$, den ich der Kürze wegen mit N bezeichnen will, lässt sich gleich durch z ausdrücken: in der That, es ist identisch

$$(x\varphi+y\varphi')^2=(xy+\varphi\varphi')^2-(\varphi^2-y^2)(\varphi'^2-x^2),$$

also nach den Werthen (13.)

$$(x\varphi+y\varphi')^2=(2ab-mm')^2-|a^2+(b+z)^2-m^2|.|a^2+(b-z)^2-m'^2|;$$

folglich ist

$$N^2=n^2-\delta.\delta',$$

wenn gesetzt wird

$$(16.)\qquad \begin{cases} n=2ab-mm', \\ \delta=a^2+(z+b)^2-m^2=\varphi^2-y^2, \\ \delta'=a^2+(z-b)^2-m'^2=\varphi'^2-x^2. \end{cases}$$

Die Gleichungen (14.) und (15.) lassen sich jetzt auf folgende Weise schreiben

$$N\frac{dx}{dz}=-a\varphi'-(z-b)\varphi,\quad N\frac{dy}{dz}=a\varphi-(z+b)\varphi',$$

$$N\frac{d\varphi'}{dz}=-ax+(z-b)y,\quad N\frac{d\varphi}{dz}=ay+(z+b)x.$$

Daraus folgt

$$N\frac{d(x+\varphi')}{dz}=-a(x+\varphi')+(y-\varphi)(z-b),\quad N\frac{d(y+\varphi)}{dz}=a(y+\varphi)+(x-\varphi')(z+b)$$

oder

$$N\frac{dl(x+\varphi')}{dz}=-a+(z-b)\frac{y^2-\varphi^2}{(y+\varphi)(x+\varphi')},\quad N\frac{dl(y+\varphi)}{dz}=a+(z+b)\frac{x^2-\varphi'^2}{(x+\varphi')(y+\varphi)}.$$

Und da

$$(x+\varphi')(y+\varphi)=(xy+\varphi\varphi')+(x\varphi+y\varphi')=n+N$$

ist, und

$$y^2-\varphi^2=-\delta,\quad x^2-\varphi'^2=-\delta',$$

so folgt

$$\frac{dl(x+\varphi')}{dz}=-\frac{a}{N}-(z-b)\frac{\delta}{N(N+n)}=-\frac{a}{N}-(z-b)\frac{n-N}{N.\delta'}$$

und

$$\frac{dl(y+\varphi)}{dz} = \frac{a}{N} - (z+b)\frac{\delta'}{N(N+n)} = \frac{a}{N} - (z+b)\frac{n-N}{N.\delta}$$

oder

$$\frac{dl\left(\frac{x+\varphi'}{\sqrt{\delta'}}\right)}{dz} = -\frac{a}{N} - \frac{n(z-b)}{N.\delta'}$$

und

$$\frac{dl\left(\frac{y+\varphi}{\sqrt{\delta}}\right)}{dz} = \frac{a}{N} - \frac{n(z+b)}{N.\delta};$$

folglich ist

$$x+\varphi' = \sqrt{\delta'}.e^{-a\int\frac{dz}{N} - n\int\frac{(z-b)\,dz}{N.\delta'}},$$
$$y+\varphi = \sqrt{\delta}.\ e^{a\int\frac{dz}{N} - n\int\frac{(z+b)\,dz}{N.\delta}},$$

und aus den Gleichungen (16.)

$$\varphi'-x = \sqrt{\delta'}.\ e^{a\int\frac{dz}{N} + n\int\frac{(z-b)\,dz}{N.\delta'}},$$
$$\varphi-y = \sqrt{\delta}.e^{-a\int\frac{dz}{N} + n\int\frac{(z+b)\,dz}{N.\delta}},$$

also

$$(17.)\quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\sqrt{\delta'}.\left\{e^{-a\int\frac{dz}{N} - n\int\frac{(z-b)\,dz}{N.\delta'}} - e^{a\int\frac{dz}{N} + n\int\frac{(z-b)\,dz}{N.\delta'}}\right\}, \\ y = \frac{1}{2}\sqrt{\delta}.\left\{e^{a\int\frac{dz}{N} - n\int\frac{(z+b)\,dz}{N.\delta}} - e^{-a\int\frac{dz}{N} + n\int\frac{(z+b)\,dz}{N.\delta}}\right\}, \end{cases}$$

womit die Curve bestimmt ist.

Es bleibt noch übrig, die Bewegung dieser Curve zu bestimmen, bei welcher dieselbe eine geodätische Linie der von ihr erzeugten Fläche bleibt.

Bewegt sich die Curve und das mit ihr fest verbundene Axensystem *ox, oy, oz* nach irgend einer Bewegung, so gelten in Bezug auf ein festes Coordinatensystem folgende Bewegungsgleichungen

$$(18.)\quad \begin{cases} X = x_0+\alpha x+\lambda y+\xi z, \\ Y = y_0+\beta x+\mu y+\eta z, \\ Z = z_0+\gamma x+\nu y+\zeta z. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen bedeuten die α, β, γ; λ, μ, ν; ξ, η, ζ die Richtungs-

cosinus der Axen ox, oy, oz zur Zeit t in Bezug auf das feste Axensystem OX, OY, OZ; $x_0y_0z_0$ sind die Coordinaten des Anfangspunktes o und XYZ die Coordinaten des Punktes xyz ebenfalls zur Zeit t.

Bezeichnet man nun mit u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit des Punktes (xyz) in Bezug auf die Axen ox, oy, oz, so ist bekanntlich

$$\begin{aligned} u.dt &= \Sigma\alpha dx_0 - ry + qz, \\ v.dt &= \Sigma\lambda dx_0 - pz + rx, \\ w.dt &= \Sigma\xi dx_0 - qx + py, \end{aligned}$$

wo

$$p = \Sigma\lambda d\xi, \quad q = \Sigma\xi d\alpha, \quad r = \Sigma\alpha d\lambda.$$

Da die Grössen p, q, r den Cosinus der momentanen Axe in Bezug auf die Axen ox, oy, oz proportional sind, so kann man sie als identisch mit den gleichnamigen Grössen ansehen, die in den Gleichungen (6′.) der momentanen Axe vorkommen; auch sind die Summen $\Sigma\alpha dx_0$, $\Sigma\lambda dx_0$, $\Sigma\xi dx_0$ identisch mit den Π, K, Λ (7.), weil sowohl diese als jene, wenn sie durch dt dividirt werden, den Componenten der Geschwindigkeit des Punktes $o(x_0y_0z_0)$ gleich werden.

Nun soll aber die Bewegung derart sein, dass folgende vier Gleichungen stattfinden.

$$r = 0, \quad \Pi = ap + bq, \quad K = aq + bp, \quad \Lambda = 0,$$

folglich muss sein

$$\Sigma\alpha d\lambda = 0$$

und

$$(19.) \quad \begin{cases} \Sigma\alpha dx_0 = ap + bq, \\ \Sigma\lambda dx_0 = aq + bp, \\ \Sigma\xi dx_0 = 0. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen kann man $x_0y_0z_0$, also die Bahn des Anfangspunktes o bestimmen, wenn man die neun Cosinus kennt, welche also nur die Gleichung $\Sigma\alpha d\lambda = 0$ zu erfüllen haben.

Diese Gleichung $\Sigma\alpha d\lambda = 0$ drückt aber weiter nichts aus, als dass die Axen ox, oz, oy den drei Hauptrichtungen einer beliebig gewählten Curve (Tangente, Hauptnormale und Normale auf der Schmiegungsebene) immer parallel bleiben. In der That kann man die Differentiale der neun Cosinus in die folgende Form bringen:

$$d\alpha = q\xi, \quad d\xi = p\lambda - q\alpha, \quad d\lambda = -p\xi,$$
$$d\beta = q\eta, \quad d\eta = p\mu - q\beta, \quad d\mu = -p\eta,$$
$$d\gamma = q\zeta, \quad d\zeta = p\nu - q\gamma, \quad d\nu = -p\zeta,$$

aber auch die gleichnamigen Cosinus jeder Curve genügen folgenden Gleichungen

$$d\alpha = \xi d\sigma, \quad d\xi = -\alpha d\sigma - \lambda d\tau, \quad d\lambda = \xi d\tau,$$
$$d\beta = \eta d\sigma, \quad d\eta = -\beta d\sigma - \mu d\tau, \quad d\mu = \eta d\tau,$$
$$d\gamma = \zeta d\sigma, \quad d\zeta = -\gamma d\sigma - \nu d\tau, \quad d\nu = \zeta d\tau.$$

Setzt man also $dt = ds$ und nimmt eine Curve, für die man hat

$$d\tau = -p \quad \text{und} \quad d\sigma = q,$$

(was immer möglich ist, welche Werthe auch die p, q haben mögen), so bleiben die Axen ox, oz, oy den Hauptrichtungen dieser Curve immer parallel. Da aber die p, q willkürliche Functionen sein können (weil zwischen den Cosinus die einzige Gleichung $\Sigma\alpha d\lambda = 0$ besteht), so folgt, dass auch die Curve ganz beliebig sein kann.

Die Bewegung des Anfangspunktes o ist vollständig bestimmt, sobald die Leitcurve gewählt ist; denn die drei Gleichungen (19.) geben nun

$$(20.) \quad \begin{cases} dx_0 = a\left(\frac{\lambda}{\varrho} - \frac{\alpha}{T}\right)ds + b\left(\frac{\alpha}{\varrho} - \frac{\lambda}{T}\right)ds, \\ dy_0 = a\left(\frac{\mu}{\varrho} - \frac{\beta}{T}\right)ds + b\left(\frac{\beta}{\varrho} - \frac{\mu}{T}\right)ds, \\ dz_0 = a\left(\frac{\nu}{\varrho} - \frac{\gamma}{T}\right)ds + b\left(\frac{\gamma}{\varrho} - \frac{\nu}{T}\right)ds, \end{cases}$$

wenn durch ϱ und T die zwei Krümmungsradien der Leitcurve bezeichnet werden.

Die Cosinus $\xi\eta\zeta$, $\lambda\mu\nu$ der Leitcurve lassen sich nach den bekannten Formeln mit Hülfe von $\alpha\beta\gamma$ und ihren Ableitungen ausdrücken. Setzt man also ihre Werthe in die Gleichungen (18.) und ersetzt auch die $x_0 y_0 z_0$ durch ihre Werthe aus (20.), so findet man die im Anfange geschriebenen Gleichungen (5.) der erzeugten Fläche.

Integration des allgemeinen Systemes

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} + \Sigma a\xi = 0, \quad \begin{vmatrix} x & y & z \\ A' & B' & C' \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} + \Sigma a'\xi = 0.$$

Die vorhergehenden kinematischen Betrachtungen haben gezeigt, dass die Integration dieses allgemeinen Systemes durch passende Wahl der Coordinatenaxen auf die Integration des speciellen (9.) zurückgeführt werden kann. Es lässt sich aber auch unmittelbar integriren.

Zuerst ist zu bemerken, dass man immer die Summe $\Sigma AA'$ gleich Null machen kann. Dazu hat man statt der zweiten Gleichung folgende zu nehmen

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ A'+\varrho A & B'+\varrho B & C'+\varrho C \\ \xi & \eta & \zeta \end{vmatrix} + \Sigma(a'+\varrho a)\xi = 0,$$

und die unbestimmte Grösse ϱ so zu bestimmen, dass die Summe $\Sigma A(A'+A\varrho)$ gleich Null wird. Wir nehmen also an, dass $\Sigma AA' = 0$ ist.

Ordnet man die Gleichungen nach den ξ, η, ζ, so nehmen sie die Form an

$$\begin{aligned} f_1\xi+f_2\eta+f_3\zeta &= 0, \\ f_1'\xi+f_2'\eta+f_3'\zeta &= 0, \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} \Sigma f_1\xi &= 0, \\ \Sigma f_1'\xi &= 0, \end{aligned}$$

wo

$$f_1 = a+\begin{vmatrix} y & z \\ B & C \end{vmatrix}, \quad f_1' = a'+\begin{vmatrix} y & z \\ B' & C' \end{vmatrix} \quad \text{u. s. w.,}$$

und durch Integration erhält man wieder

$$\Sigma f_1\alpha = m, \quad \Sigma f_1'\alpha = m'.$$

Setzt man nun noch

$$\Sigma f_1\lambda = \varphi, \quad \Sigma f_1'\lambda = \varphi',$$

so kann man, wie bei dem speciellen Systeme geschehen ist, die neun Cosinus mit Hülfe der übrigen Grössen ausdrücken. Wenn man alsdann setzt

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ f_1' & f_2' & f_3' \end{vmatrix} = u, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = -v, \quad \begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ x & y & z \end{vmatrix} = w-\tfrac{1}{2}\Sigma(A'a-Aa'),$$

$$\tau = \Sigma A^2, \quad \tau' = \Sigma A'^2, \quad k = \tfrac{1}{2}\Sigma(A'a+Aa'),$$

$$\delta = -\begin{vmatrix} \tau & 0 & \Sigma Aa \\ 0 & \tau' & k+w \\ \Sigma Aa & k+w & m^2 \end{vmatrix}, \quad \delta' = -\begin{vmatrix} \tau & 0 & k-w \\ 0 & \tau' & \Sigma A'a' \\ k-w & \Sigma A'a' & m'^2 \end{vmatrix},$$

$$n = -\begin{vmatrix} \tau & 0 & k-w \\ 0 & \tau' & \Sigma A'a' \\ \Sigma Aa & k+w & mm' \end{vmatrix}$$

und

$$N^2 = n^2 - \delta.\delta',$$

und die vier Grössen φ, φ', u, v als Functionen von w betrachtet, so findet man (auf dieselbe Weise wie bei dem speciellen Systeme), indem man die Ableitungen von $u + \varphi'\sqrt{\tau\tau'}$, $v + \varphi\sqrt{\tau\tau'}$ berechnet:

$$u = \tfrac{1}{2}\sqrt{\delta'}\left\{e^{-\tau'\Sigma A\alpha\int\frac{dw}{N}-\tau'\int\frac{n(w-k)\,dw}{N.\delta'}} - e^{\tau'\Sigma A\alpha\int\frac{dw}{N}+\tau'\int\frac{n(w-k)\,dw}{N.\delta'}}\right\},$$

$$v = \tfrac{1}{2}\sqrt{\delta}\left\{e^{\tau\Sigma A'\alpha'\int\frac{dw}{N}-\tau\int\frac{n(w+k)\,dw}{N.\delta}} - e^{-\tau\Sigma A'\alpha'\int\frac{dw}{N}+\tau\int\frac{n(w+k)\,dw}{N.\delta}}\right\}.$$

Mit diesen Gleichungen sind die zwei Integrale des allgemeinen Systems gefunden.

Um den Fall $i = 4$ zu erschöpfen, haben wir noch diejenige Art der Bewegung zu betrachten, bei welcher die drei Determinanten

$$\begin{vmatrix} A & A' \\ B & B' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B & B' \\ C & C' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} C & C' \\ A & A' \end{vmatrix}$$

alle gleich Null sind. Die Verhältnisse der Grössen p, q, r sind alsdann alle constant, und die Axe der Bewegung bleibt daher einer bestimmten Geraden immer parallel. Wird diese Gerade als z-Axe angenommen, so ist $p = 0$, $q = 0$ und $R = 0$, mithin $A = A' = B = B' = 0$. Man kann noch $g = r$ setzen, d. i. man kann annehmen $C = 1$ und $C' = 0$. Dann werden die Gleichungen, welche zwischen den sechs Grössen Π, K, Λ, p, q, r bestehen:

$$p = 0, \quad q = 0,$$
$$\Pi = -Qr = ar + a'h,$$
$$K = Pr = br + b'h,$$
$$\Lambda = \frac{d\varphi}{d\omega}\,r = cr + c'h.$$

Aus diesen Gleichungen kommt nun $a'P + b'Q = ba' - b'a$, woraus erhellt, dass die momentane Axe in einer Ebene (in Bezug auf die Axen ox, oy, oz) bleibt; nimmt man also diese Ebene als zx-Ebene, so wird $Q = 0$, d. i. $a = a' = 0$. Endlich findet man aus den zwei übrigen Gleichungen

$$b'\frac{d\varphi}{d\omega} = Pc' + cb' - c'b;$$

da man aber die Abscisse P um eine Constante vermehren kann, so kann man diese Gleichung in die Form $\frac{d\varphi}{d\omega} = P.k$ bringen, d. i. $cb' - c'b = 0$ machen.

Aus dem Vorhergehenden erhellt, dass die momentane Axe im Raume eine beliebige Cylinderfläche zum Ort hat, und die Bewegung ist diejenige der Tangentialebene einer beliebigen Cylinderfläche, wobei die Drehungsgeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ um die Berührungslinie mit der Gleitungsgeschwindigkeit $\frac{d\varphi}{dt}$ längs derselben Linie durch die Gleichung $\frac{d\varphi}{d\omega} = kP$ verbunden ist.

Die Gleichungen der Curve werden jetzt

$$y\xi - x\eta = 0 \quad \text{und} \quad \eta + k\zeta = 0,$$

welche sich leicht auf dieselbe Weise integriren lassen wie die früheren (9.): man findet

$$(x + mm')^2 = (1 + k^2 - m^2)(x^2 + y^2 - m'^2),$$

$$z - ky = k\sqrt{1 + k^2 - m^2} \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(mx + m')^2 + k^2(m'^2 - x^2)}}.$$

Anmerkung.

Die Aufgabe, „eine Curve zu finden, welche die Fähigkeit hat, bei ihrer Bewegung asymptotische Linie der erzeugten Fläche zu bleiben", lässt sich auf dieselbe Weise behandeln wie die hier betrachtete. Ihre Bedingungsgleichung unterscheidet sich von der Gleichung (7.) nur dadurch, dass sie statt der Cosinus ξ, η, ζ die λ, μ, ν hat. Die Grössen Π, K, Λ, p, q, r bleiben aber dieselben; hieraus folgt, dass in beiden Aufgaben die Art der Bewegung eine und dieselbe ist. Die Curve aber muss durch die Gleichungen bestimmt werden

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\omega u + (b - z)v}{vx - uy},$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{\omega v + (b + z)u}{vx - uy},$$

wo $u = ax + by - yz$, $v = ay + bx + xz$ und ω durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \omega & b + z & -y \\ b - z & \omega & x \\ v & -u & a^2 - b^2 + z^2 \end{vmatrix} = 0$$

gegeben wird.

III.

Wenn zwischen den sechs Grössen Π, K, Λ, p, q, r nur drei homogene lineare Gleichungen bestehen, so muss die Curve drei Gleichungen von

der Form (1.) erfüllen

$$(21.) \qquad \Sigma f_1 \xi = 0, \quad \Sigma f_1' \xi = 0, \quad \Sigma f_1'' \xi = 0;$$

dieses aber kann nur dann eintreten, wenn die Curve eine ebene Curve ist.

Um es zu beweisen, eliminire man aus den drei Gleichungen (21.) die ξ, η, ζ, so kommt

$$(22.) \qquad \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \end{vmatrix} = 0;$$

aus denselben Gleichungen kommt noch (wenn man statt ξ, η, ζ die Differentiale $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ setzt und integrirt)

$$(23.) \qquad \Sigma f_1 \alpha = m, \quad \Sigma f_1' \alpha = m', \quad \Sigma f_1'' \alpha = m''.$$

Die drei Constanten $m\ m'\ m''$ können nicht alle gleich Null sein; denn dann würden sowohl die Cosinus $\xi\ \eta\ \zeta$ als die $\alpha\ \beta\ \gamma$ denselben drei Gleichungen genügen, und da sie nicht dieselben sein können, so würden alle Unterdeterminanten $\begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix}$ u. s. w. von (22.) verschwinden, d. i. es würde sein $\frac{f_1'}{f_1} = \frac{f_2'}{f_2} = \frac{f_3'}{f_3}$, was unmöglich ist, weil alsdann die Gleichungen (21.) nicht von einander verschieden wären.

Bezeichnet man nun die Coefficienten von f_1, f_2, ... in der Determinante (22.) mit φ_{11}, φ_{12}, ..., so findet man mit Hülfe der Gleichungen (23.) folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} m\varphi_{11} + m'\varphi_{21} + m''\varphi_{31} &= 0, \\ m\varphi_{12} + m'\varphi_{22} + m''\varphi_{32} &= 0, \\ m\varphi_{13} + m'\varphi_{23} + m''\varphi_{33} &= 0, \end{aligned}$$

welche sich in der Form schreiben lassen

$$\begin{aligned} x\omega + F_1 &= 0, \\ y\omega + F_2 &= 0, \\ z\omega + F_3 &= 0, \end{aligned} \qquad \text{wo} \quad \omega = \begin{vmatrix} A & A' & A'' & x \\ B & B' & B'' & y \\ C & C' & C'' & z \\ m & m' & m'' & 0 \end{vmatrix}$$

und die $F_1 F_2 F_3$ lineare Functionen sind.

Aus diesen Gleichungen sehen wir, dass (wenn ω keine Constante ist) die Curve auf drei hyperbolischen Paraboloiden liegen muss, welche eine Leitebene parallel haben. Drei solche Paraboloide haben aber nie eine

Raumcurve gemein; denn wenn gesetzt wird $\omega = k$, so kann man aus dem Systeme der Gleichungen ersten Grades

$$(24.) \quad \begin{cases} kx + F_1 = 0, \\ ky + F_2 = 0, \\ kz + F_3 = 0, \\ \omega - k = 0, \end{cases}$$

die x, y, z eliminiren; alsdann kommt eine Gleichung für k, welche die Form hat

$$k^4 + \cdots = 0.$$

Es giebt also vier Werthe von k, für die das System (24.) eine Lösung hat; folglich haben die Paraboloide vier Punkte gemein (oder eine Gerade, wenn die drei Ebenen (24.) sich in einer Geraden schneiden), aber nie eine Raumcurve.

Hiernach bleibt nur noch der Fall zu betrachten, wo die Curve eine ebene ist. Wenn man die Ebene der Curve als xy-Ebene annimmt, so ist $z = 0$, mithin auch $\zeta = 0$ und die Bedingungsgleichung (7.) wird

$$\Pi\xi + K\eta + r(y\xi - x\eta) = 0.$$

Wenn nun zwischen den drei Grössen Π, K, r drei homogene lineare Gleichungen bestehen, so ist $\Pi = K = r = 0$, und die Curve bleibt unbestimmt. Aus den Gleichungen $\Pi = 0$, $K = 0$ folgt aber auch $d\varphi = 0$ und $R = 0$; folglich bleibt die momentane Axe stets auf der Ebene der Curve, und da keine Gleitung stattfindet, so folgt, dass diese Ebene auf einer beliebigen abwickelbaren Fläche rollt.

Wenn zwischen denselben drei Grössen nur zwei homogene lineare Gleichungen bestehen, so lassen sie sich in die Form bringen

$$\Pi = ar, \quad K = br,$$

und die Bedingungsgleichung wird alsdann

$$a\xi + b\eta + (y\xi - x\eta) = 0.$$

Dieselbe nimmt, wenn man die Coordinaten xy um Constanten vermehrt, folgende Form an $y\xi - x\eta = 0$, d. i. man kann $a = 0$ und $b = 0$ voraussetzen.

Die Gleichung der Curve $y\xi - x\eta = 0$ drückt aus, dass ihre Normale stets durch den Anfangspunkt hindurchgeht; sie ist also ein Kreis, und da $a = 0$ und $b = 0$ ist, so folgt, dass auch $\Pi = 0$ und $K = 0$ sind; der Mittelpunkt des Kreises beschreibt also eine Curve, auf der seine Ebene immer

senkrecht bleibt. Die dabei erzeugte Fläche ist offenbar nicht verschieden von derjenigen, welche erzeugt wird, wenn die Ebene des Kreises auf einer abwickelbaren Fläche rollt, so dass diese Lösung in der vorhergehenden mit enthalten ist.

Existirt endlich zwischen den Grössen Π, K, r nur eine homogene lineare Gleichung, $a\Pi+bK+cr=0$, so folgen für die Curve die beiden Gleichungen

$$c\xi = a(y\xi - x\eta) \quad \text{und} \quad c\eta = b(y\xi - x\eta),$$

woraus noch folgt $b\xi = a\eta$, d. i. die Normale ändert ihre Richtung gar nicht, was nur bei der Geraden geschehen kann.

Athen, den 1. September 1882.

Einfache Erzeugung einiger Complexe zweiten Grades.

(Von Herrn *A. Weiler* in Zürich.)

Diejenigen Complexe zweiten Grades, deren Singularitätenflächen Linienflächen sind, lassen sich sehr einfach aus den darin enthaltenen linearen Congruenzen erzeugen *). Schliessen wir diese Complexe sowie den allgemeinen Complex zweiten Grades **) aus, so verbleiben noch zehn, die nicht aus Schaaren linearer Congruenzen bestehen, und für welche ich an dieser Stelle einfache Erzeugungen angeben will.

I.

Die Complexe [11112], [1113], [114], [15], [1122], [123], [33] ***).

Hier sind weder Ausnahmepunkte noch Ausnahmeebenen, dagegen doppelte Complexstrahlen vorhanden. Eine Doppellinie d des Complexes ist Doppelstrahl und Doppelaxe für die Singularitätenfläche Σ, im speciellen Fall Rückkehrgerade etc. derselben.

Sei A eine durch d gehende Ebene. In jedem Fall schneidet sie aus der Fläche vierten Grades Σ nebst d noch einen Kegelschnitt a^2, welcher entweder d in zwei Punkten B, C schneidet, oder in einem Punkt $B = C$ berührt. In A hat man ferner zwei Büschel von Complexgeraden, deren Scheitel M, N in d liegen. — Wir werden erkennen, dass jeder dieser Büschel MA, NA auf eine Congruenz (Strahlsystem) zweiten Grades führt, welche a^2 zur Brenncurve hat.

Sei nämlich E irgend ein Punkt auf a^2, so sind EM, EN zwei durch

*) Vgl. „Erzeugung von Complexen aus linearen Congruenzen," Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1881.

**) Für denselben vergl. man *Plücker* (Neue Geometrie), ferner einige Arbeiten der Herren *Klein* und *Schur* (Math. Annalen).

***) Die Bedeutung dieser Symbole ist auseinandergesetzt in der Abhandlung „Ueber die verschiedenen Gattungen der Complexe etc.," Math. Annalen, VII.

ihn gehende Complexstrahlen. Da weiterhin E auf Σ liegt, so müssen alle durch E gehenden Complexstrahlen zwei Büschel bilden. Der eine dieser Büschel muss EM, der andere EN enthalten. (Die Annahme, dass EM, EN zu demselben Büschel gehören, würde dahin führen, dass in A drei Büschel von Complexgeraden wären, was unmöglich ist.) Die Ebenen dieser beiden Büschel aus E sind singuläre, d. h. Tangentialebenen an Σ; somit sind diese zwei Ebenen zwei von den vier, die man durch EM, EN an Σ noch legen kann. — Der zweite Schnittpunkt von EM mit a^2 sei F. Auch von diesem Punkte aus gehen zwei Büschel von Complexstrahlen. Die Ebene des einen geht auch durch $EM = FM$ und berührt Σ, ist aber von der vorhin für E gefundenen verschieden (denn sonst wäre MEF eine singuläre Linie *), welche nicht in der singulären Ebene durch den zugehörigen singulären Punkt — den Berührungspunkt der singulären Ebene mit Σ — gehen würde). — Dies zusammenfassend erkennen wir, dass von den beiden aus MEF an Σ noch möglichen Tangentialebenen die eine den Büschel in E, die andere den in F sofort liefert.

Dreht sich der Complexstrahl MEF um M, so bilden die aus ihm an Σ gelegten Tangentialebenen in ihrer Gesammtheit den Berührungskegel aus M an Σ, und da Σ von der vierten Klasse ist, M aber in einer Doppelaxe liegt, so muss dieser Kegel M^2 von der zweiten Klasse sein.

Hat sich EF so weit gedreht, dass er a^2 in G (oder H) berührt, so berührt der Strahl auch Σ, und es fallen die aus MG an Σ gelegten Tangentialebenen zusammen. Für die so entstandene singuläre Ebene G ist G der singuläre Punkt, und die zugehörige singuläre Linie des Complexes ist eine der Haupttangenten von Σ im Punkte G **). — Es soll unten bewiesen werden, dass im Allgemeinen M nicht auf a^2 gelegen ist. Darum giebt es stets zwei Tangenten MG, MH an a^2, von denen die eine mit d zusammenfällt, wenn a^2 und d sich berühren.

Wenn endlich der Strahl EF mit d zusammenfällt, so treten an Stelle der aus EF an Σ gelegten Tangentialebenen die beiden, welche man in M selbst an die Fläche legen kann. — Wenn aber $B = C$, so hat man in diesem Punkt B stets noch zwei Büschel von Complexgeraden (s. unten). Ihre Ebenen sind Tangentialebenen an Σ mit den Berührungspunkten M und N.

---

*) *Plücker*, a. a. O. No. 311, 318.

**) Vgl. die Abhdl. des Herrn *Klein*, Math. Annalen II, p. 223.

Damit ist eine einzelne Congruenz des Complexes nachgewiesen. Sie hat den Kegelschnitt a^2 von Σ zur Brenncurve und den Berührungskegel M^2 an Σ aus dem Punkt M auf d zur Brennfläche. Die Ebene von a^2 geht durch den Mittelpunkt M von M^2, ferner berühren sich a^2 und M^2 in zwei Punkten (G, H). Durch a^2 und M^2 sind aber zwei Congruenzen zweiten Grades (zweiter Ordnung und zweiter Klasse) bestimmt *), von denen nur die eine dem in Frage stehenden Complex angehört.

Führt man weiterhin in der vorigen Betrachtung die beiden Punkte M, N gleichzeitig ein, so erhält man unmittelbar den Satz, *dass jeder Kegelschnitt a^2 der Fläche Σ Brenncurve zweier Congruenzen zweiten Grades des Complexes ist, welche zu Brennflächen zwei Berührungskegel der Fläche Σ aus zwei Punkten der Doppelgeraden d besitzen* **).

Nach der eingeführten Bezeichnung sind B, C die Berührungspunkte der durch d gelegten Ebene A mit Σ, und in A sind M, N die Scheitel der Büschel von Complexstrahlen. Wir betrachteten M, N als von B, C verschieden, was noch kurz zu begründen ist. — Zu derselben Fläche Σ als Singularitätenfläche gehören einfach unendlich viele Complexe gleicher Art; wird nebst Σ noch eine beliebige oder eine singuläre Complexlinie gewählt, so ist der Complex (im Allgemeinen mehrdeutig) bestimmt. Man wird also auch in A eine beliebige Linie MEF als zum Complex gehörend wählen dürfen. Zu dem Kegelschnitt a^2 kennt man alsdann den Kegel M^2; eine der Congruenzen a^2M^2 gehört dem Complex an, und letzterer ist somit in diesem Fall zweideutig bestimmt. — Bei dieser Wahl von EF in A kommt es aber allein auf die Lage des Schnittpunktes M mit d an; derselbe kann jeder beliebige Punkt von d sein und fällt im Allgemeinen nicht nach B oder C. Nachdem über M verfügt ist, wird N zweideutig bestimmt sein.

Nachdem nun die Existenz von Congruenzen a^2M^2 des Complexes nachgewiesen ist, wollen wir zeigen, wie man in allen den genannten Fällen die Erzeugung einfach ausführen kann. Wir gehen aus von einer Doppelebene des Complexes. Sollte sie nicht vorhanden sein (wie z. B. in dem einen der beiden dualen Fälle [33]), so ist an Stelle dessen mindestens ein Doppelpunkt vorhanden und die Möglichkeit geboten, die duale Construction anzuwenden.

---

*) Vgl. *Kummer*, Ueber die algebraischen Strahlensysteme, 1866, p. 34.

**) Die duale Betrachtung der bisherigen würde den dualen Satz ergeben, welcher den hier aufgestellten ergänzt.

In einer Doppelebene D des Complexes bilden die Complexgeraden einen Doppelbüschel vom Scheitel S. Die (als gegeben gedachte) Fläche Σ wird von D stets in einem Kegelschnitt c^2 berührt, der durch S geht und d in einem Punkt $D = d\mathrm{D}$ trifft. — Zu jeder Ebene A durch d liefert Σ sofort den Kegelschnitt a^2, welcher die Ebene D, bezüglich die Gerade AD in einem Punkt A auf c^2 berührt. Dann ist SA ein singulärer Complexstrahl, A der zugehörige singuläre Punkt, D die singuläre Ebene. Für A zerfällt der Complexkegel in zwei Ebenen, die sich in SA schneiden müssen, also nur die beiden aus SA an Σ noch möglichen Tangentialebenen sein können. Die Büschel in ihnen vom Scheitel A sind Complexstrahlen; ihre Schnittpunkte mit d seien M, N, so gehören zu der Brenncurve a^2 die Berührungskegel an Σ aus M und N. Nennen wir diese Kegel M^2 und N^2, so gehören von den zerfallenden Congruenzen $a^2\mathrm{M}^2$, $a^2\mathrm{N}^2$ je die beiden (des zweiten Grades) dem Complex an, welche jene bei A gefundenen Büschel enthalten. Indem man A um d dreht, findet man alle Congruenzen eindeutig. (Benutzt man stets gleichzeitig beide Tangentialebenen an Σ aus SA, so findet man den Complex vierfach *)). — Die Erzeugung lässt sich umkehren; dann findet man zu einem gegebenen Berührungskegel M^2 die beiden dazugehörigen Kegelschnitte a^2, b^2 (indem man von den beiden Ebenen von M^2 ausgeht, welche durch S gehen).

II.

Die Complexe [222], [24], [6].

Für jeden dieser Complexe ist die Singularitätenfläche Σ eine irreducible Fläche vierter Ordnung dritter Klasse mit dreifachem Punkt. Die Erniedrigung der Klasse auf drei rührt davon her, dass jeder Complex einen Ausnahmepunkt besitzt. (In den dualen Fällen ist je eine Ausnahmeebene vorhanden, wodurch die Ordnung von Σ auf drei vermindert wird.)

Gehen wir davon aus, dass der Complexausnahmepunkt A ein dreifacher Punkt von Σ ist. Irgend eine Gerade b aus A ist *singuläre* Linie des Complexes. Denn sei B der Schnittpunkt von b mit Σ (abgesehen

*) Man erhält alsdann in *jedem* Punkt auf Σ *beide* Büschel von Complexstrahlen. Da aber eine Gerade die Fläche Σ in vier Punkten trifft, so muss jede Complexgerade viermal erzeugt worden sein. — Würde man je nur den einen der Punkte M, N resp. nur die eine der Tangentialebenen aus SA an Σ benutzen, so erhielte man jede Gerade noch doppelt.

von A), so hat man in B zwei Büschel von Complexstrahlen, wobei b in dem einen dieser Büschel vorkommt. Die Ebene dieses letzteren Büschels enthält A, weil sie durch b geht, und in dieser Ebene ist somit b die Verbindungslinie der Scheitel zweier Büschel von Complexgeraden. Also ist b eine singuläre Linie des Complexes.

In irgend einer Ebene durch b hat man, abgesehen von den durch A gehenden Linien, nur noch einen Büschel von Complexstrahlen, und nur für eine dieser Ebenen durch b fällt dessen Scheitel auf b (und zwar nach dem vorhin genannten Punkt B). Der geometrische Ort jener Büschelscheitel ist also eine Curve zweiter Ordnung b^2, welche b in B schneidet. Hierbei bilden die von irgend einem Punkt P auf b nach b^2 gezogenen Linien den zu P gehörenden Complexkegel. Ferner hat man in irgend einem Punkt Q auf b^2 einen Büschel von Complexgeraden, dessen Ebene nach b gerichtet ist. Natürlich kommt neben diesem Büschel für Q noch ein zweiter vor (dessen Ebene jedoch den Punkt A nicht enthalten darf). Diese Punkte Q auf b^2 sind also singuläre Punkte des Complexes, also auf Σ gelegen, d. h.: *Unsere Complexe, die einen Ausnahmepunkt besitzen, bestehen aus Congruenzen erster Ordnung zweiter Klasse, deren Brenncurven je eine Gerade durch den Ausnahmepunkt und ein jene schneidender Kegelschnitt auf der Singularitätenfläche sind.*

Der Complex und damit die Fläche Σ besitzen nun immer mindestens eine Doppelebene (im dualen Fall einen Doppelpunkt, dann wende man die dualen Constructionen an). Die Doppelebene D berühre Σ längs dem Kegelschnitt d^2, auf welchem wir den zugehörigen Complexdoppelpunkt S annehmen wollen. Durch Σ und S ist der Complex eindeutig bestimmt.

Es ist nöthig, über die Flächen Σ der drei Complexe Folgendes zu bemerken. Durch den dreifachen Punkt A gehen drei Doppellinien d_1, d_2, d_3, welche beim Complex [222] verschieden sind. (Σ ist alsdann die *Steiner*sche Fläche.) Bei [24] rücken zwei davon, d_1 und d_2, unendlich nahe zusammen; bei [6] sind d_1, d_2, d_3 als drei consecutive Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung zu betrachten. — Die Tangentialebenen von Σ schneiden bei [222] Kegelschnittpaare heraus, die sich auf d_1, d_2, d_3 und im Berührungspunkt ihrer Ebene mit Σ schneiden. Im Fall [24] berühren sich diese Kegelschnitte an $d_1 = d_2$ und schneiden sich auf d_3 und im Berührungspunkt. Bei [6] osculiren diese Kegelschnitte an $d_1 = d_2 = d_3$, und der letzte gemeinsame Punkt ist der Berührungspunkt ihrer Ebene. — Immer schneiden

die doppelt unendlich vielen Kegel zweiter Ordnung, welche man durch d_1, d_2, d_3 legen kann, die Fläche Σ in Kegelschnitten. Die zerfallenden unter diesen Kegeln ergeben diejenigen Kegelschnitte, deren Ebenen durch d_1, d_2 oder d_3 gehen. — Endlich wird in jedem Fall die Fläche Σ aus ihrem dreifachen Punkt A auf die Doppelebene D so (perspectivisch) projicirt, dass Gerade aus A als Punkte und Kegelschnitte auf Σ wieder als Kegelschnitte abgebildet werden. Sind dabei D_1, D_2, D_3 die Schnittpunkte von d_1, d_2, d_3 mit D, so muss stets das Bild b_1^2 eines Kegelschnitts b^2 auf Σ durch D_1, D_2, D_3 hindurchgehen (so dass z. B. bei [6] alle Kegelschnitte b_1^2 dreipunktig osculiren). Die Abbildung der Fläche auf D ist eine eindeutige.

Es soll nunmehr der Complex erzeugt werden. Irgend eine Gerade b durch A treffe Σ in B, wobei sich b und B gleichzeitig in den Punkt B_1 projiciren. Die Linie SB_1 ist ein singulärer Complexstrahl, D ihre singuläre Ebene und ihr zweiter Schnittpunkt B_2 mit d^2 der zugehörige singuläre Punkt. Für B_2 zerfällt der Complexkegel in zwei Büschel, welche den Strahl B_2S gemein haben. Da aber B_2A ebenfalls Complexstrahl ist, so ist $SB_2A = B_2b$ die Ebene des einen Büschels. Also geht für diesen Punkt B_2 auf Σ der eine Büschel von Complexstrahlen durch b, und es muss daher B_2 dem zu b gehörenden Kegelschnitt b^2 selbst angehören *). Dasselbe gilt für B, und das Bild b_1^2 von b^2 ist der durch die fünf Punkte D_1, D_2, D_3, B_1, B_2 gehende Kegelschnitt. Zu dem Bild b_1^2 gehört aber nur ein Kegelschnitt b^2 auf Σ. Diese Congruenz bb^2 gehört dem Complex an. — In ebenso einfacher Weise findet man zu einem gegebenen Kegelschnitt b^2 auf Σ die zugehörige Brennlinie b. — Indem man nun zu einfach unendlich vielen Geraden b (durch A) die Kegelschnitte b^2 ermittelt, erhält man unendlich viele Congruenzen des Complexes, also den Complex selbst (und zwar im Allgemeinen vierfach).

Wenn speciell b einen Büschel in einer Tangentialebene in A, z. B. den Büschel d_1d_2 beschreibt, so sind stets D_1, D_2, B_1 in einer Geraden. Der Kegelschnitt b_1^2 zerfällt je in die Linien D_1D_2 und D_3B_2, wobei die erstere fest bleibt. Die letztere dreht sich um D_3 und beschreibt offenbar einen zu SB_1 projectivischen Büschel. Denn die Strahlen SB_1 und D_3B_2 drehen sich um zwei

*) B_2 ist hier Original und Bild zugleich, und der gesuchte Kegelschnitt b^2 muss D in B_2 berühren.

Punkte auf d^2 und schneiden sich stets auf diesem Kegelschnitt. Fällt B_1 nach D_1, D_2, so rückt bezüglich B_2 auch nach D_1, D_2, d. h.:

Man bringe bei einer allgemeinen oder durch Zusammenrücken der Doppelgeraden specialisirten Steinerschen Fläche den Strahlbüschel aus dem dreifachen Punkt, der zwei von den drei Doppelstrahlen, d_1 und d_2, enthält, und den Ebenenbüschel durch die dritte Doppelgerade d_3 so in projectivische Zuordnung, dass den Strahlen d_1, d_2 die nach ihnen gehenden Ebenen d_3d_1, d_3d_2 direct entsprechen. Jene Büschelstrahlen und die in den entsprechenden Ebenen liegenden Kegelschnitte auf der Fläche sind alsdann stets die Brenncurven von Congruenzen erster Ordnung zweiter Klasse eines Complexes zweiten Grades. — Es mag noch bemerkt werden, dass nunmehr ein Strahl b und der zugehörende Kegelschnitt b^2 sich im dreifachen Punkt der Fläche treffen.

Der hier mitgetheilte Satz lässt sich in folgender Weise verallgemeinern. Wenn oben der Punkt B_1 (in D) irgend eine Gerade g durchläuft, so bilden die zugehörigen Kegelschnitte b_1^2 einen Büschel, dessen vierter Grundpunkt auf g liegt. Geht speciell g durch D_1, so sind in D_1 zwei Grundpunkte des Büschels vereinigt, d. h. die Kegelschnitte des Büschels gehen durch D_2, D_3 und berühren sich in D_1.

Hottingen bei Zürich, December 1881.

Ueber eine ein-dreideutige ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung.

(Von Herrn *S. Kantor* in Prag.)

Indem eine Fläche dritter Ordnung auf ein gewisses Tripelsystem der Ebene abgebildet wird, das an sich interessante Eigenschaften besitzt, gelingt es, in rein geometrischer Weise die Eigenschaften und gegenseitige Lage gewisser Punktegruppen auf Curven dritter Ordnung ($p = 1$) genau zu studiren, auf welche bisher immer nur von fern hingewiesen wurde.

I.

1. Ist ein Tripel ABC bezüglich eines Tripels $A'B'C'$ sich selbst conjugirt, d. h. sind BC, CA, AB die geraden Polaren von A, B, C nach der dreiseitigen Curve $A'B'C'$ genommen, so giebt es drei Kegelschnitte welche A', B', C' enthalten und je zwei Seiten von ABC in den Endpunkten derselben berühren.

Da BC die gerade Polare von A ist, so geht die conische Polare von B durch A, die gerade Polare von B ist aber AC, daher berührt die conische Polare des B die AB in A und CB in C.

Ferner bilden die conischen Polaren der Punkte von BC das Büschel $AA'B'C'$; B, C sind die Doppelpunkte der von ihnen auf BC ausgeschnittenen Involution, somit (*Clebsch*, Vorlesungen p. 222) die *Hesse*sche Covariante des auf BC durch $A'B'C'$ bestimmten Tripels. Ebenso*) werden die von A nach A', B', C' gehenden Geraden durch die Strahlen AB, AC cyklisch-projectiv getrennt. Werden diese fünf Strahlen durch $B'C'$ geschnitten, so sind die Treffpunkte mit AB, AC die *Hesse*sche Covariante zu B', C' und dem zum Punkte ($B'C'$, BC) bezüglich B', C' harmonischen Punkte,

*) Ist nämlich α die gerade Polare von a nach der dreiseitigen Curve dritter Ordnung $A'B'C'$, so ist auch a der Pol von α nach der dreipunktigen Curve dritter Klasse $A'B'C'$.

woraus folgt*), dass auch das Paar B', C' die *Hesse*sche Covariante der Treffpunkte von $B'C'$ und BC, CA, AB vorstellt. Daher:

Ist ein Tripel ABC zu einem anderen $A'B'C'$ conjugirt, so schneiden die Geraden des einen auf jeder Geraden des andern drei Punkte aus, die bezüglich der in ihr liegenden Ecken cyklisch-projectiv sind.

Ist ABC bezüglich $A'B'C'$ sich selbst conjugirt, so ist auch $A'B'C'$ bezüglich ABC sich selbst conjugirt. Es giebt daher auch drei Kegelschnitte durch ABC, die je zwei Seiten von $A'B'C'$ in ihren Endpunkten berühren.

Es lassen sich in sechserlei Art drei projective Punktreihen auf $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ angeben, die zu zweien perspectiv sind, und in denen je drei Punkte, die auf einer Geraden von ABC liegen, sich entsprechen. So folgt:

Zwei Tripel, von denen jedes nach dem andern sich selbst conjugirt ist, sind in sechsfach perspectiver Lage.

2. Wird in ein Dreieck ein anderes $a'b'c'$ und in dieses ein drittes $a''b''c''$ eingeschrieben, so dass $b''c''$, $c''a''$, $a''b''$ durch a, b, c gehen (vgl. *Staudt*, Geom. d. Lage, 113), so geben diese neun Punkte eine derartige Gruppe, dass neunmal drei Punkte allineirt sind und neunmal drei dieser Geraden convergiren. Die drei Punktetripel $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$ treten aus dieser Figur derart hervor, dass keines davon eine der Geraden der Configuration enthält. Die Betrachtung der Figur lehrt: Je zwei dieser Tripel sind in dreifach perspectiver Lage und das dritte Tripel enthält die Centra der Perspectivität.

Ebenso gestatten die Geraden der Figur dreierlei Anordnungen in Dreiseite, von denen keines einen Punkt der Figur enthält. Je zwei sind dreifach perspectiv, die drei Axen bilden das dritte Dreiseit**).

3. Diese Dreiseite bilden Curven dritter Ordnung, und die Configuration (A) ist sonach die Basis eines Büschels von C_3. Die Wendepunkte derselben liegen in einer Curve zwölfter Ordnung***), von welcher sich die neun Geraden der Configuration absondern. Die übrige Curve dritter Ordnung hat in den drei übrigen Doppelpunkten des Büschels Doppel-

---

*) Es besteht der folgende Satz über cubische binäre Formen: Ist das Paar $\delta_1\delta_2$ die *Hesse*sche Covariante des Punktetripels $a_1a_2a_3$ ist und a_1' der zu a_1 harmonisch conjugirte Punkt bezüglich $\delta_1\delta_2$, so ist das Paar a_2a_3 die *Hesse*sche Covariante des Punktetripels $\delta_1\delta_2a_1'$.

**) Vgl. *Schröter*, Math. Ann. II, p. 553, sowie die analytische Arbeit des Herrn *Rosanes*.

***) *Clebsch*, Ueber Curven vierter Ordnung, dieses Journ. Bd. 59.

punkte, zerfällt in drei Gerade. Deren Schnittpunkte mit einer Büschel-C_3 sind die Wendepunkte der C_3:

Alle Curven des Büschels besitzen ein gemeinsames Wendepunktsdreieck tuv.

Die gerade Polare von t ist für alle C_3 dieselbe (*Cremona,* Curve piane 89), daher uv (die Verbindungslinie der zwei anderen Doppelpunkte):

Das Wendepunktsdreieck ist bezüglich $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$ sich selbst conjugirt. Daher: Die Tripel $aa'a''$, $bb'b''$, $cc'c''$ sind bezüglich tuv conjugirte Tripel.

4. Hiervon ausgehend gelangt man zu folgender Reihe von Sätzen über diese Tripel. Sie sind ihrer Ableitung entsprechend angeordnet.

a) Die in Bezug auf ein Tripel tuv sich selbst conjugirten Tripel bilden ein involutorisches System in der Ebene.

b) Je zwei solche Tripel sind auf dreifache Art perspectiv, die Centra bilden ein neues Tripel. Alle drei Tripel geben zusammen eine Configuration (A).

c) Enthält eine C_3, die das Wendepunktsdreieck tuv besitzt, einen Punkt p, so enthält sie auch die ihn zu einem nach tuv conjugirten Tripel ergänzenden zwei Punkte.

Alle C_3 mit einem gegebenen Wendepunktsdreiecke bilden ein lineares ∞^3-System. Auf jeder C_3-Curve lassen sich vier von einander geschiedene Reihen conjugirter Tripel construiren.

d) Irgend zwei C_3 mit demselben Wendepunktsdreiecke schneiden sich in neun Punkten einer Configuration (A).

Dabei ist zu bemerken, dass bei jedem solchen conjugirten Tripel ein gewisser Drehungssinn zu beobachten ist, welcher dadurch festgestellt wird, dass die drei Seiten auf tuv die Tripel einer cyklisch-projectiven Punktreihe ausschneiden, in welchen ebenfalls ein bestimmter Drehungssinn herrscht Weist man zwei Punkte zweier Tripel einander zu, so sind dadurch die zwei übrigen Paare in bestimmter Weise auf einander bezogen. Dies vorausgesetzt, gilt der Satz:

Die Geraden, welche die einander cyklisch zugeordneten Punkte zweier conjugirten Tripel verbinden, bilden ein conjugirtes Tripel. Speciell: Die Tangenten der C_3 in den Punkten eines Tripels bilden selbst ein Tripel, also auch die Wendetangenten in drei allineirten Wendepunkten.

e) Von den vier Wendepunktsdreiecken einer C_3 ist jedes in Bezug auf die drei übrigen sich selbst conjugirt, daher: Die drei übrigen Wende-

punktsdreiecke jeder C_3 des zu *tuv* gehörigen Systems bilden ebenfalls eine Configuration (A), die jedoch dadurch noch specieller ist, dass je zwei der Tripel zu einander conjugirt sind. Diese Configuration entsteht auch so:

Drei bezüglich *tu*, *tv* und drei bezüglich *uv*, *ut* cyklisch-projective Strahlen schneiden sich in neun Punkten, durch welche auch drei bezüglich *vt*, *vu* cyklisch-projective Strahlen gehen, und welche eine specielle (A) bilden. Wir wollen sie eine cyklische Configuration nennen.

Die C_3 des durch sie bestimmten Büschels sind äquianharmonisch und haben tuv zur Hesseschen Curve.

Denn jeder Strahl von *t* trifft sie in drei durch *t* und *uv* cyklisch getrennten Punkten, die Wendetangenten gehen somit zu dreien durch *t*, *u*, *v*. Die Tangenten aus einem Inflexionspunkte *i* von *uv* berühren aber in drei Punkten eines Strahles von *t*, und daher sind die vier Tangenten aus *i* äquianharmonisch.

f) Die drei Wendepunkte auf *tu*, *uv*, *vt* bilden je ein conjugirtes Tripel. Kommt dieses in einer (A) vor, so liegen die beiden anderen Tripel in einem Kegelschnitt. Alle so möglichen Kegelschnitte theilen sich in drei Schaaren, die einander (in *t*, *u*; *u*, *v*; *v*, *t*) doppelt berühren*).

g) Aus *c*) und *d*) folgt: Die Tangenten in den Punkten eines conjugirten Tripels treffen die C_3 auf den gegenüberliegenden Geraden, und die Tangentialpunkte bilden ein neues Tripel. Ferner: Projicirt man ein Tripel aus einem Punkte auf die Curve, so ergiebt sich neuerdings ein Tripel. So kann man alle Tripel aus einem erhalten. Demnach:

Projicirt man aus einem Punkte der Curve alle neun Wendepunkte, so erhält man neun neue Punkte, die zwölf Tripel zusammensetzen, von denen je drei zu einem Wendepunktsdreiecke gehören.

Diese neunpunktigen Gruppen verhalten sich also ganz symmetrisch gegen alle vier Wendepunktsdreiecke, ich will sie „*Neutralgruppen*“ nennen**).

II.

1. Soll nun eine Fläche auf das zu einem festen Dreiecke *tuv* gehörige System conjugirter Tripel so abgebildet sein, dass ihren ebenen

*) Aus den acht Geraden solcher Configuration (A) lassen sich drei Tripel formen, von denen je zwei vierfach perspectiv sind. Das vierte Centrum ist *t*. Die obigen Lagenbeziehungen gelten immer bei zwei vierfach perspectiven Dreiecken.

**) Sie werden durch jede Substitution β) des Herrn *Halphen*, Math. Ann. Bd. XV in sich selbst übergeführt.

Schnitten die Γ_3 entsprechen, für welche *tuv* ein Wendepunktsdreieck ist, so müssen die drei Tripel, in denen sich zwei Γ_3 treffen, den Schnittpunkten der Fläche mit der Schnittgeraden jener Ebenen entsprechen:

Die abgebildete Fläche ist von der dritten Ordnung. Drei Punkte von F_3 in gerader Linie bilden sich als die Tripel einer Configuration (A) ab.

2. Eine Berührungsebene von F_3 schneidet sie in einer Curve C_3^4 mit Doppelpunkt, deren Abbild eine Γ_3 mit drei Doppelpunkten, ein bezüglich *tuv* conjugirtes Geradentripel sein muss. Durch eine Configuration (A) gehen drei solche Tripel, daher durch eine Raumgerade drei Berührungsebenen von F_3:

Die F_3 ist von der dritten Klasse.

3. Unter den Curven Γ_3' sind folgende specielle hervorzuheben:

α) Ein Netz von äquianharmonischen Curven, welche *tuv* zur *Hesse*schen Curve haben.

β) In jedem Punkte *t, u, v* die Strahlentripel $\alpha'\alpha''\alpha'''$, welche zu den anstossenden Seiten von *tuv* cyklisch-projectiv sind.

γ) Jede Seite von *tuv* dreimal gezählt.

δ) Jede Seite von *tuv* mit einem der Kegelschnitte $\mathfrak{t}^2$, $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{v}^2$, welche in ihren Ecken die beiden anderen Seiten berühren.

ε) Das Dreieck *tuv* selbst.

ζ) C_3^4, die in *t, u, v* einen Doppelpunkt und die dortigen Seiten von *tuv* zu Doppelpunktstangenten haben.

4. Den Curven γ) werden auf F_3 drei Gerade entsprechen, die in einer Ebene liegen und die sich in drei Punkten *T, U, V* schneiden mögen. *T, U, V* bilden sich als die dreimal gezählten Punkte *t, u, v* ab.

Längs der Geraden *UV, VT, TU* muss die F_3 von drei Ebenen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ osculirt werden: ***In T, U, V hat die F_3 biplanare Doppelpunkte.*** Die Punkte der Geraden *UV, VT, TU* bilden sich als die cyklisch-projectiven Tripel auf *uv, vt, tu* ab.

Jede Ebene durch *UV* trifft F_3 noch in einem Kegelschnitte, der sich auf die Ebene in einen $\mathfrak{t}^2$ aus δ) abbildet. Der Schnitt der Ebene *TUV* mit F_3 bildet sich als das Dreiseit *tuv* aus ε) ab.

5. Treffen sich die Ebenen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ in *O*, so trifft jede Ebene durch *OT* die F_3 in einer Curve, die *T* zur Spitze mit *TO* als Spitzentangente hat. Ihre Abbildung ist eines der Strahlentripel $\alpha'\alpha''\alpha'''$ durch *t* aus β). Hieraus folgt nach I *e*), dass die Ebenen durch *O* die F_3 in Curven treffen, deren Bilder die äquianharmonischen Curven des Systemes Γ_3' sind und:

Je drei Punkte der F_3, die auf einem Strahle durch O liegen, bilden sich als eine cyklische Configuration ab.

Die Ebenen durch T treffen F_3 in Curven, für welche T ein Doppelpunkt mit den Tangenten in den Ebenen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ ist. Ihre Bilder sind die C_3^4 aus 3, ε).

6. F_3 wird von einer beliebigen Ebene Σ in einer K_3 durchsetzt, welche in $i_1 i_2 i_3$ auf UV, VT, TU Wendepunkte hat und dort die Schnittlinien mit $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ berührt. Die Bilder von $i_1 i_2 i_3$ sind die Wendepunkte von Γ_3 auf uv, vt, tu. Daher:

Den Ebenenbüscheln, welche auf $J \equiv TUV$ ihre Axe haben, entsprechen in der Abbildung die syzygetischen Büschel des Systemes Γ_3.

Das Wendepunktsdreieck von K_3, an welchem $i_1 i_2 i_3$ participirt, ist (Art. 4, c)) bezüglichd es Wendetangententripels $\Sigma(\mathfrak{T}, \mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ conjugirt. Die Polargerade K von $i_1 i_2 i_3$ bezüglich des Dreikantes $O(TUV)$ geht durch O und trifft die Σ in der gegenüberliegenden Ecke $\mathfrak{k}$ des Wendepunktsdreieckes; δ_1, δ_2 seien die *Hesse*sche Covariante von $i_1 i_2 i_3$.

7. Jeder Tangente der F_3 entspricht ein Büschel von Γ_3, die sich in drei Tripelpunkten berühren und in einem jenem eingeschriebenen Tripel schneiden. Den beiden Inflexionstangenten eines Punktes P von F_3 entsprechen zwei Büschel, deren Curven sich in den Punkten des entsprechenden Tripels osculiren und die Geraden dieses Tripels berühren. Daher: Hat die K_3 einen Wendepunkt in p, so hat die Γ_3 das entsprechende Tripel zu einem ein- und umgeschriebenen Dreieck.

Liegen zwei Punkte der F_3 auf einer Geraden über UV, VT, TU, so liegen die entsprechenden Tripel in einem der Kegelschnitte $\mathfrak{t}^2$, $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{v}^2$.

8. Zu dem Wendepunktsdreiecke $\delta_1 \delta_2 \mathfrak{k}$ der K_3 gehört auf dieser in derselben Weise eine ∞^1-Reihe conjugirter Tripel, wie auf der Γ_3 zu tuv. Ein solches Tripel $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3$ bildet mit $i_1 i_2 i_3$ (Art. 4, f)) eine Configuration (A); es sei $\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \mathfrak{q}_3$ das dritte Tripel derselben und es gehe $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{p}_2 \mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{p}_3 \mathfrak{q}_3$ bezüglich durch i_1, i_2, i_3. Dann folgt: Die den $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ entsprechenden Tripel der Γ_3' liegen mit dem dem $\mathfrak{q}_1$ entsprechenden Tripel in drei Kegelschnitten $\mathfrak{t}^2$, $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{v}^2$, entstehen daher aus $\mathfrak{q}_1'$, $\mathfrak{q}_1''$ oder $\mathfrak{q}_1'''$ durch Projection aller neun Wendepunkte; drei solche conjugirte Tripel constituiren eine Neutralgruppe, somit:

Die Neutralgruppen auf Γ_3' entsprechen den zu $\delta_1 \delta_2 \mathfrak{k}$ conjugirten Tripeln der K_3.

Für die Neutralgruppen selbst folgt: Ein Kegelschnitt $\mathfrak{t}^2$, $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{v}^2$, der

durch ein Tripel einer Neutralgruppe geht und mit ihm zum selben Wendepunktsdreiecke gehört, schneidet Γ_3 in einem neuen Tripel. So entstehen zwölf Tripel, die zusammen nur eine Neutralgruppe bilden. Zwei solche Neutralgruppen sind *„verbundene"* Neutralgruppen. — Wenn drei Tripel $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ der K_3 eine Configuration (A) bilden, so zeigt die Abbildung:

Hat man auf Γ_3 irgend zwei Neutralgruppen, so schneiden sich die 81 Verbindungslinien je zweier Punkte neunmal zu je neun in einem Punkte von Γ_3. Diese neun Punkte bilden wieder eine Neutralgruppe. So entsteht eine Configuration (3, 9) von 81 Geraden und 27 Punkten, die in sich *homogen* ist. Speciell: Die Tangentialpunkte der Punkte einer Neutralgruppe bilden wieder eine Neutralgruppe*).

Ist unter den drei Neutralgruppen der vorigen Configuration die Wendepunktsgruppe, so sind die beiden anderen „verbundene" Gruppen**).

9. Die Γ_3, das Bild von K_3, hat selbst drei weitere Wendepunktsdreiecke, die conjugirte Tripel des Systemes sind. Welches sind ihre Originale $w_1w_2w_3$? Da die Bilder noch eine cyklische Configuration bilden, so müssen $w_1w_2w_3$ mit O allineirt sein. Sie sind überdies die Berührungspunkte der aus $i_1i_2i_3$ an die F_3 gesandten drei Berührungsebenen und sind in ihnen die Pole von $i_1i_2i_3$ bezüglich $\Sigma(\mathfrak{TUV})$. Daher:

Die drei übrigen Wendepunktsdreiecke des dem Ebenenbüschel $i_1i_2i_3$ entsprechenden Büschels syzygetischer Γ_3 sind die Treffpunkte der F_3 und der Polargeraden von $i_1i_2i_3$ bezüglich $O(TUV)$.

10. Ist p_1 der Tangentialpunkt von p einer C_3, p_2 der von p_1, etc. und ist p_n der n^{te} Tangentialpunkt, so kann eine Coincidenz von p und p_n eintreten. Dann geben $p_1 \ldots p_n$ ein der C_3 ein- und umgeschriebenes n-Eck, jeder Punkt desselben ist sein eigener n^{ter} Tangentialpunkt. Ich will sagen, sie bilden einen *n-punktigen Tangentialcyklus.*

Die K_3 hat über $i_1i_2i_3$ sechs Wendepunkte, die sich auf zwei gerade Tripel $\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}_3$, $\mathfrak{j}'_1\mathfrak{j}'_2\mathfrak{j}'_3$ mit dem Schnittpunkte $\mathfrak{k}$ verteilen. Je zwei $\mathfrak{j}\mathfrak{j}'$ sind mit

*) Die von Herrn *Halphen* Math. Ann. XV. Bd. („Recherches sur les courbes du 3e degré") discutirte Substitution A weist eben auf jeder C_3 eines syzygetischen Büschels einer Neutralgruppe jenen Punkt zu, welcher die Tangentialgruppe in die mit der gegebenen Gruppe verbundene Neutralgruppe projicirt.

**) Dass durch Projection der Wendepunkte auf die C_3 symmetrische Gruppen zu Stande kommen, hat schon Herr *Küpper* gefunden. Die hieraus ableitbaren Eigenschaften s. in *Durèges*: Die ebenen Curven dritter Ordnung. Teubner 1871.

einem i allineirt. Da nun nach Art. 7 den $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}'$ sechs der Γ_3 ein- und umgeschriebene Tripel entsprechen, so hat man:

Auf einer Curve dritter Ordnung ($p = 1$) giebt es 24 der Curve ein- und umgeschriebene Dreiecke. Dieselben theilen sich in vier den Wendepunktsdreiecken zugeordnete Sextupel. Jedes Dreieck eines solchen Sextupels ist nach dem zugehörigen Wendepunktsdreiecke sich selbst conjugirt. Das Sextupel theilt sich in zwei Ternen. Die Dreiecke einer Terne bilden eine Neutralgruppe und bilden überdies eine Configuration (A) [sind zu zweien dreifach perspectiv]. Jedes Dreieck der einen Terne liegt mit jedem Dreiecke der anderen Terne auf einem von neun Kegelschnitten $\mathfrak{t}^2$, $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{v}^2$.

Dies lehrt aber auch: Unter den Neutralgruppen giebt es nur acht, die überdies eine Configuration (A) bilden. Sie mögen $(A)'$ heissen. Für je zwei, die „verbundene" Gruppen sind, tritt ein Wendepunktsdreieck *tuv* hervor, und jene drei ihrer Tripel, die zu *tuv* gehören, bilden die $(A)'$.

11. Nachdem das zu *tuv* gehörige Sextupel von 3p. Tg. C. die Wendepunkte von K_3 abbildet, fragt es sich noch, was den übrigen 18 Tg.-Cykl'en auf der K_3 entspricht. Da sie sich in 3.2 Neutralgruppen sondern, so müssen ihnen auf K_3 3.2 zu $\delta_1\delta_2\mathfrak{t}$ conjugirte Tripel entsprechen. Jedes dieser Tripel wird sein eigenes Tangentialtripel sein. Die drei Punkten eines solchen Tripels entsprechenden Tripel auf Γ_3 sind einander eingeschrieben. Hienach:

Die sechs 3p. Tg. C. der K_3, die zu $\delta_1\delta_2\mathfrak{t}$ conjugirt sind, bilden sich als die 18 übrigen 3p. Tg. C. der Γ_3 ab.

Und ferner:

Jede der acht speciellen Neutralgruppen $(A)'$ setzt sich in vierfacher Art aus drei zum selben Wendepunktsdreiecke gehörigen conjugirten Tripeln zusammen. Die drei Tripel, welche zu dem für $(A)'$ ausgezeichneten Wendepunktsdreiecke gehören, sind dreifach perspectiv, die drei bezüglich eines anderen Wendepunktsdreieckes conjugirten Tripel sind successive einander eingeschrieben.

12. Zur Erleichterung des Ueberblickes über alle 24 3p. Tg. C. können folgende Betrachtungen dienen. Aus $\mathfrak{j}_1$ wird irgend ein 3p. Tg. C. von K_3 in einen anderen projicirt. Demnach: *Verbindet man die Punkte zweier 3p. Tg. C. von Γ', die nicht zum selben Wendepunktsdreiecke gehören, in cyklischer Reihenfolge, so begegnen die Verbindungslinien der C_3 in Punkten*

eines neuen Tg.-Cyklus). Da die Verbindung auf drei Arten stattfinden kann, so sind drei Tg.-Cyklen erhältlich. Sie bilden eine Terne bezüglich eines dritten Wendepunktsdreieckes.*

Bezeichnen wir mit $a'a''a'''$, $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}''\mathfrak{a}'''$ die 2.3 3p. Tg. C. auf K_3, die zu $\delta_1\delta_2\mathfrak{k}$ conjugirt sind, so seien durch Projection verbunden

mit dem Tripel $i_1 i_2 i_3$		mit $j_1 j_2 j_3$		mit $j_1' j_2' j_3'$	
a'	$\mathfrak{a}'$	a'	$\mathfrak{a}''$	a'	$\mathfrak{a}'''$
a''	$\mathfrak{a}''$	a''	$\mathfrak{a}'''$	a''	$\mathfrak{a}'$
a'''	$\mathfrak{a}'''$	a'''	$\mathfrak{a}'$	a'''	$\mathfrak{a}''$.

Sind $\mathrm{I'I''I'''}$, $\mathrm{II'II''II'''}$ die den sechs Tripeln entsprechenden Ternen $(A)'$ auf Γ_3, entsprechen aber den Tripeln von $\delta_1\mathfrak{k}$, $\delta_2\mathfrak{k}$ die Ternen III, so sind III, $\mathrm{I'II'}$, $\mathrm{I''II''}$, $\mathrm{I'''II'''}$ die zu den Wendepunktsdreiecken gehörigen Sextupel. Es entsteht nun folgende Gruppirung:

$$\begin{array}{lll} \mathrm{I\,I'\,II''}, & \mathrm{II\,I'\,II'''}, & \mathrm{I'\,I''\,I'''}, \\ \mathrm{I\,I''\,II'''}, & \mathrm{II\,I''\,II'}, & \mathrm{II'II''III'''}. \\ \mathrm{I\,I'''II'}, & \mathrm{II\,I'''II''}, & \end{array}$$

Je drei Ternen einer solchen Gruppe haben die Beziehung, dass irgend ein Tripel der einen Terne mit einem Tripel der zweiten Terne verbunden als Schnittpunktsdreiecke die drei Tripel der dritten Terne aus derselben Gruppe liefert. Daher:

Die acht Ternen stellen sich auf achtfache Art zu dreien so zusammen, dass die in drei solchen Ternen enthaltenen Tripel eine Configuration (3, 12) von 27 Punkten und 108 Geraden bilden.

Die acht Ternen verhalten sich wie acht Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung. Dem neunten Wendepunkte analog ist die Wendepunktsgruppe auf I_3'.

Alle 3p. Tg. C. geben zusammen eine Configuration (3, 30) von 72 Punkten und 648 Geraden, die wegen ihres homogenen Verhaltens bezüglich aller ihrer Punkte von topologischem Interesse ist. Jeder Punkt ist nur mit den Punkten der zur seinigen „verbundenen" Terne nicht allineirt.

13. Die von j_1 an die K_3 gelegten Tangenten haben ihre Berührungspunkte auf der harmonischen Polaren; demnach der Satz: „Die Berührungspunkte der neun aus den Punkten eines 3p. Tg. C. an die Γ_3 gehenden

*) Dass dies eintritt, folgt auch direct.

Tangenten bilden eine Configuration (*A*)." Und zwar sind die drei unverbundenen Tripel in ihr die, welche aus drei den Punkten des Tg. C. in derselben involutorischen Correspondenz zugeordneten Punkten bestehen.

14. An der K_3 giebt es ferner 3.6 3p. Tg. C., die nicht zum Wendepunktsdreiecke $\delta_1\delta_2\mathfrak{k}$ conjugirt sind. Jeder solche Cyklus überträgt sich nach I'_3 in drei einander successive eingeschriebene Tripel nach *tuv*. Diese neun Punkte müssen auch ihre eigenen Tangentialpunkte enthalten, und da eine Theilung in 3p. Tg. C. nicht mehr statthaben kann, so folgt:

Jeder nicht bezüglich $\delta_1\delta_2\mathfrak{k}$ conjugirte 3p. Tg. C. von K_3 überträgt sich nach I'_3 in einen 9p. Tg. C. Die 9p. Tg. C. der I'_3 sondern sich in vier Gruppen, die den Wendepunktsdreiecken zugewiesen sind. In jeder Gruppe giebt es 18.

Dieses Resultat kann sofort auf die K_3 angewendet werden. Sie besitzt 18 9p. Tg. C., die aus je drei bezüglich $\delta_1\delta_2\mathfrak{k}$ sich selbst conjugirten Tripeln bestehen. Jeder dieser Cyklen überträgt sich nach I'_3 in eine Gruppe von 27 Punkten, die aus neun successive einander eingeschriebenen Dreiecken besteht. Da ferner der 9p. Tg. C. von K_3 drei nach $\delta_1\delta_2\mathfrak{k}$ conjugirte Tripel enthält, so zerlegt sich die Gruppe in drei Neutralgruppen. Der Tangentialpunkt eines Neuneckpunktes springt aus dem zweiten Tripel in das dritte Tripel und wieder in das erste Tripel zurück. In der Gruppe auf I'_3 springt folglich der Tangentialpunkt aus der zweiten in die dritte Neutralgruppe und wieder zurück, und da beim 9p. C. der dritte und siebente Tangentialpunkt mit dem Ausgangspunkt allineirt sind, so muss das auch in der Gruppe der Fall sein. Daher: *Jeder 9p. Tg. C. von K_3, der zu $\delta_1\delta_2\mathfrak{k}$ gehört, überträgt sich nach I'_3 in drei 9p. Tg. C., welche zusammen eine Configuration von 27 Punkten, 108 Geraden und der Art (3, 12) bilden.* Die für die 18 3p. Tg. C. auf K_3 geltenden Beziehungen übertragen sich nun so:

Die 18 9p. Tg. C., die zum selben Wendepunktsdreiecke gehören, theilen sich in zwei Gruppen zu neun, und jede wieder in drei Ternen. Jede Terne von Cyklen bildet eine Configuration (3, 12) von 27 Punkten und 108 Geraden, die auch aus drei Neutralgruppen besteht. Die neun Neutralgruppen der einen Gruppe sind „verbunden" mit den neun der anderen. Jede Terne lässt sich auf neunerlei Art in Configurationen (*A*) zerlegen. Die neun Cyklen einer Gruppe bilden zusammen eine Configuration (3, 36) von 81 Punkten und 972 Geraden.

15. Ein 3p. Tg. C. lässt sich mit den Punkten eines 9p. Tg. C.

durch 27 Gerade verbinden. Nimmt man auf K_3 einen Punkt j und einen dem $\delta_1\delta_2$f fremden 3p. Tg. C., so ergiebt sich durch die Projection ein neuer Cyklus, daher:

Ein 3p. und ein 9p. Tg. C., die zum selben Wendepunktsdreiecke gehören, werden durch 27 Gerade verbunden, die sich zu dreien in neun Punkten eines neuen Cyklus schneiden, der zum selben Wendepunktsdreieck, aber nicht zur selben Neunergruppe (14. a. E.) gehört.

Vereinigt man auf K_3 einen 3p. C. von $\delta_1\delta_2$f und einen diesem fremden Cyklus, so folgt:

Gehören ein 3p. und ein 9p. Tg. C. verschiedenen Wendepunktsdreiecken an, so liefern die Verbindungslinien 27 Schnittpunkte, und es gilt der Satz:

Werden die 3p. Tg. C. einer Terne (Art. 10.) mit einem 9p. Tg. C., der mit der Terne nicht zum selben Wendepunktsdreiecke gehört, verbunden, so theilen sich die 27 Schnittpunkte in drei 9p. Tg. C., die zu einem dritten Wendepunktsdreiecke gehören und eine Terne bilden (Art. 19). In jedem der 27 Punkte kreuzen sich aber drei Verbindungslinien.

Dieser interessante Zusammenhang gilt, wie sich zeigen wird, auch bei höheren Cyklen.

16. Ein 9p. Tg. C. giebt als Complex dreier successive einander eingeschriebener Tripel für sich schon eine Configuration (3, 3). Dieselbe ist aber nicht mit der Configuration (A) dreier dreifach perspectiver Tripel identisch. Während beim 9p. Tg. C. die conjugirten Tripel mit Punkten und Geraden in die Configuration eintreten, erscheinen in (A) von den drei Tripeln nur die Punkte. Es lässt sich hier *allgemein* sagen: Man nehme auf den Seiten von ABC drei Punkte $A_1B_1C_1$, auf deren Geraden drei weitere $A_2B_2C_2$, u. s. w. bis zu $A_{\alpha-1}B_{\alpha-1}C_{\alpha-1}$ und wähle $A_{\alpha-1}B_{\alpha-1}C_{\alpha-1}$ so, dass die Verbindungslinien durch A, B, C gehen. Dann hat man einen Cyklus von α einander successive eingeschriebenen Dreiecken. Liegt nun stets A_i, B_i, C_i auf $B_{i-1}C_{i-1}$, $C_{i-1}A_{i-1}$, $A_{i-1}B_{i-1}$ $(i=1$ bis $\alpha-1)$, so können drei Fälle eintreten: A, B, C liegen in $B_{\alpha-1}C_{\alpha-1}$, $C_{\alpha-1}A_{\alpha-1}$, $A_{\alpha-1}B_{\alpha-1}$ oder $B_{\alpha-1}C_{\alpha-1}$, $A_{\alpha-1}B_{\alpha-1}$, $C_{\alpha-1}A_{\alpha-1}$ oder $C_{\alpha-1}A_{\alpha-1}$, $A_{\alpha-1}B_{\alpha-1}$, $B_{\alpha-1}C_{\alpha-1}$. Diesem entsprechen drei wesentlich verschiedene Configurationen (3, 3) der 3α Punkte, die mit $A_{3\alpha}$, $B_{3\alpha}$, $C_{3\alpha}$ bezeichnet werden mögen. $B_{3\alpha}$ kommt nicht vor, der 9p. C. ist $C_{3,3}$.

17. Bildet man nun die 3.18 9p. Tg. C. der K_3 ab, die nicht zu

$\delta_1\delta_2\mathfrak{k}$ gehören, so übertragen sie sich nach Γ_3 in 27p. Tg. C., die zum Wendepunktsdreiecke *tuv* gehören. Es giebt daher 8.27 solcher Cyklen auf Γ_3, die 6.27 dem *tuv* fremden Cyklen haben zu Originalen auf F_3 die 2.27 ebenfalls 27p. Tg. C. von K_3, die zum Wendepunktsdreiecke $\delta_1\delta_2\mathfrak{k}$ gehören, jeder von K_3 setzt sich in drei Cyklen von Γ_3 um.

Ich will hier die Beschreibung der Cyklen, ihre gegenseitigen Beziehungen, das Verhalten der Tangentialpunkte unter einander, die Eintheilung der sämmtlichen 216 Cyklen in Gruppen, Ternen u. s. w., das Zusammentreten zu neuen Configurationen nicht weiter verfolgen und gehe zu den allgemeinen Resultaten über.

18. Setzt man den eingeschlagenen Process der Entwickelung von Tangentialcyklen auf Γ_3, Aufsuchung ihnen gleichartiger Cyklen auf K_3 und Rückübertragung mittelst der Abbildung auf die Γ_3 fort, so kommt man zu den 3^np. Tg. C. einer Curve dritter Ordnung.

Es gelten hierüber die folgenden Sätze:

I. 3^np. Tg. C. giebt es auf jeder Curve dritter Ordnung ($p = 1$) 8.3^n. Sie theilen sich in vier Gruppen von je 2.3^n, jede Gruppe ordnet sich einem Wendepunktsdreiecke zu.

II. Jeder Cyklus besteht aus 3^{n-1} Tripeln, welche nach dem Wendepunktsdreiecke, zu dem er gehört, sich selbst conjugirt sind. Sie sind überdies successive einander eingeschrieben. Die Art der Einschreibung ist die von $C_{3.3^{n-1}}$ (Art. 16).

III. Es ist jedes Tripel das Tangentialtripel seines Nachfolgers, und Eckpunkte eines Tripels sind immer ein Punkt und sein 3^{n-1}. und 2.3^{n-1}. Tangentialpunkt. Auf einer Geraden eines solchen Tripels ist daher immer ein Punkt mit seinem 3^{n-1}. und $(2.3^{n-1}+1)$. Tangentialpunkte enthalten.

Die drei durch einen Cykluspunkt gehenden Tripelgeraden enthalten demnach seinen

3^{n-1}. und $(2.3^{n-1}+1)$., $(3^{n-1}+1)$. und 2.3^{n-1}., $(3^{n-1}-1)$. und $(2.3^{n-1}-1)$. Tangentialpunkt.

IV. Durch successive Anwendung des vorigen Satzes folgt nun: Jedes conjugirte Tripel des Cyklus bildet mit einem anderen desselben Cyklus ausser seinen beiden Nachbartripeln eine Configuration (A), deren drittes Tripel ebenfalls dem Cyklus angehört. So giebt es $3^{n-1}.\frac{3^{n-1}-1}{2}$ Configurationen (A) im Cyklus. *Der ganze Cyklus bildet eine Configuration von*

3^n *Punkten und* $3^n \cdot \frac{3^{n-1}-1}{2}$ *Geraden und von der Art* $\left(3, \frac{3^n-3}{2}\right)$*). *Jeder Punkt dieser Configuration ist also nur mit zwei anderen Punkten derselben nicht verbunden, nämlich seinem Vorgänger und seinem Nachfolger im Tangentialcyklus. Die Configuration ist eine sehr concentrirte.*

V. Zunächst folgt: Jedes Tripel bildet mit seinem

3^{n-1}. und $(2.3^{n-1}+1)$., $(3^{n-1}+1)$. und 2.3^{n-1}., $(3^{n-1}-1)$. und $(2.3^{n-1}-1)$.

Tangentialtripel eine Configuration (A).

Um allgemein bestimmen zu können: *a*) Im wievielten Tangentialpunkte trifft die Verbindungslinie eines Punktes mit seinem x. Tangentialpunkte die Curve? *b*) Die Stellung der Tripelpaare im Cyklus der Tangentialtripel, die mit einem gegebenen Tripel des Cyklus eine Configuration (A) bilden, dient der folgende Vorgang:

Im 9p. Tg. C. ist ein Punkt allineirt mit seinem 2. und 5., 3. und 7., 4. und 6. Tangentialpunkt, folglich in jedem höheren Cyklus ein Tripel mit seinen ebensovielten Tangentialtripeln. In den höheren Cyklen ist dann wieder 0 mit $2+3^2$ und $5+3^2$ etc. allineirt, so dass allgemein gilt: In jedem Cyklus ist 0 allineirt mit den Tangentialpunkten

$$2+\alpha.3^2+\beta.3^3+\gamma.3^4+\cdots = 2+\sigma_1,$$
$$5+\alpha.3^2+\beta.3^3+\gamma.3^4+\cdots = 5+\sigma_1,$$

wo die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ nur die Werthe 0, 1, 2 annehmen können. Die Coefficienten im ersten und zweiten Ausdruck müssen dieselben sein. Ebenso sind nun 0, $3+\sigma_1$, $7+\sigma_1$ und 0, $4+\sigma_1$, $6+\sigma_1$ allineirt. Der Zuschlag σ_1 kann, wenn er bis 3^{n-1} geht, 3^{n-2} verschiedene Werthe annehmen.

Stellt man nun die Werthepaare 3^{n-1}, $2.3^{n-1}+1$; $3^{n-1}+1$, 2.3^{n-1}; $3^{n-1}-1$, $2.3^{n-1}-1$ für 27 her, d. i. 9, 19; 10, 18; 8, 17, so ergiebt sich wieder

$$\begin{aligned} 9+\alpha.3^3+\beta.3^4+\gamma.3^5+\cdots &= 9+\sigma_2, \\ 19+\alpha.3^3+\beta.3^4+\gamma.3^5+\cdots &= 19+\sigma_2, \end{aligned} \qquad (\alpha, \beta, \ldots = 0, 1, 2)$$

ebenso $10+\sigma_2$, $18+\sigma_2$; $8+\sigma_2$, $17+\sigma_2$ sind mit 0 allineirt. Beginnt man dann mit den drei Tripelgeraden von Null in 81 und schreitet so fort, so gelangt man zu allen möglichen Allineationen im 3^n-punktigen Cyklus. Im Allgemeinen möchte ich noch feststellen: Ist ein Punkt mit seinem x. und

---

*) Eine Configuration ist von der Art (m, n), wenn m Punkte derselben in einer Geraden liegen und n Gerade durch einen Punkt gehen.

y. Tangentialpunkt in einem 3^m-punktigen Cyklus allineirt, so ist er auch in einem 3^np. Tg. C. mit den ebensovielten Tangentialpunkten allineirt. Jede Zahl x kann aber unter einer der obigen Formen dargestellt werden.

VI. Ist 0, x, y allineirt, so ist auch jedes Tripel mit seinem x. und y. Tangentialtripel zu einer Configuration (A) vereinigt.

VII. Jeder dem $\delta_1\delta_2\mathfrak{k}$ fremde 3^np. C. der K_3 bildet sich auf die Γ_3 in einen 3^{n+1}p. C. ab, dessen Tripel bezüglich *tuv* conjugirt sind. Ferner: Jeder 3^{n+1}p. Tg. C. von K_3, dessen Tripel nach $\delta_1\delta_2\mathfrak{k}$ conjugirt sind, überträgt sich auf Γ_3 in eine Terne von 3^{n+1}p. Tg. C., die nicht zu *tuv* gehören. Diese drei Cyklen zerlegen sich in 3^{n+1} Neutralgruppen, so dass in jeder Neutralgruppe von jedem Cyklus der Terne ein Punkt mit seinem 3^n. und 2.3^n. Tangentialpunkte enthalten ist.

Die Terne lässt sich andererseits in 3^{n+1} nach *tuv* conjugirte Tripel zerlegen, die successive einander eingeschrieben sind, und zwar ist diese Einschreibung die von $A_{3^{n+1}}$. So entstehen nun

$$6.3^n + 2.3^{n+1}.3 = 8.3^{n+1}$$

d. i. alle 3^{n+1}p. Tg. C. auf Γ_3.

VIII. Die Tangentialcyklen, die zu *tuv* gehören, theilen sich in zwei Gruppen von je 3^n Cyklen, die zusammen eine Configuration $(3, 3+3^2+3^3+\cdots+3^n)$ von 3^{2n} Punkten und $3^{2n}\cdot\frac{3^n-1}{2}$ Geraden bilden. Diese Configuration besteht andererseits aus 3^{n-2} Neutralgruppen. Die Neutralgruppen der beiden Gruppen sind „verbunden". Diese Configuration sei $C_{3^{2n}}$.

Jede dieser Gruppen zerfällt in drei Unterabtheilungen von je 3^{n-1} Cyklen, die für sich Configurationen $(3, 3+3^2+\cdots+3^{n-1})$ von 3^{2n-1} Punkten und $3^{2n-2}\cdot\frac{3^{n-1}-1}{2}$ Geraden sind. Diese Configuration sei mit $C_{3^{2n-1}}$ bezeichnet.

Jede $C_{3^{2n-1}}$ spaltet sich wieder in drei Untergruppen von 3^{n-2} Cyklen der Art $(3, 3+3^2+\cdots+3^{n-2})$ mit 3^{2n-2} Punkten und $3^{2n-6}\cdot\frac{3^{n-3}-1}{2}$ Configurationsgeraden, $C_{3^{2n-2}}$. Diese successive Spaltung giebt, weiter verfolgt, Ternen von Cyklen (Art. VII), welche Configurationen $A_{3^{n+1}}$ sind, während schliesslich der Cyklus selbst eine Configuration $C_{3^{n+1}}$ ist (Art. 16). Folglich:

Die 3^np. Tg. C. eines Wendepunktsdreieckes lassen sich in zwei Gruppen $C_{3^{2n}}$, in 6 $C_{3^{2n-1}}$, in 18 $C_{3^{2n-2}}$, in $2.3^i C_{3^{2n-i}}$, in $2.3^{n-1}C_{3^{n+2}}$, (d. i.

A_{3^n+1}) zerlegen. Die $C_{3^{2n-i}}$ bildet eine Configuration $\left(3, \frac{3^{n-i+1}-3}{2}\right)$ von 3^{2n-i} Punkten und $3^{2n-2i}\cdot\frac{3^{n-i}-1}{2}$ Geraden.

IX. Aber auch die 3^np. Tg. C., die verschiedenen Wendepunktsdreiecken zugehören, haben Beziehungen, die sich durch Abbildung der Beziehungen zwischen den 3^np. C., die zu $\delta_1\delta_2\mathfrak{k}$ auf K_3 gehören, ergeben. Speciell hebe ich hervor: Die acht Gruppen $C_{3^{2n}}$ ordnen sich auf achtfache Art zu dreien so zusammen, dass sie eine Configuration $\left(3, \frac{3^{n+1}+2.3^{2n}-3}{2}\right)$ bilden.

Verbindet man die Punkte eines 3^mp. C. mit denen eines 3^np. C., so erhält man in den weiteren Begegnungspunkten mit der C_3 wiederum Punkte gewisser Tg. C. Insbesondere: ***Gehören ein 3p. und ein 3^np. Tg. C. zum selben Wendepunktsdreiecke, so liefern die Verbindungslinien neuerdings einen 3^np. Tg. C. desselben Wendepunktsdreieckes.*** Gehören sie verschiedenen Wendepunktsdreiecken an, so bilden die Schnittpunkte keinen vollständigen Cyklus, sondern erst die Schnittpunkte, die aus dem 3^np. Tg. C. und der ganzen Terne 3p. C. hervorgehen, bilden drei vollständige 3^np. C.

Es ergiebt sich auch eine ganze Reihe von Sätzen über rationale C_3, und ich hebe nur diese zwei hervor: Drei zu den Doppelpunktstangenten einer C_3^4 cyklisch-projective Strahlen treffen die C_3^4 in drei Punkten eines zum Dreiecke der Inflexionsgeraden und der Doppelpunktstangenten sechsfach perspectiven Tripels.

Hat die C_3^4 in t einen Doppelpunkt, so trifft sie ein $\mathfrak{u}^2$, $\mathfrak{v}^2$ noch in drei Punkten eines Tripels, die nur gleichzeitig nach t rücken können. Daher: Die beiden die C_3^4 in t fünfpunktig berührenden Kegelschnitte berühren die Inflexionsgerade in den Schnittpunkten mit den Doppelpunktstangenten.

III.

1. Ist die Γ_3 äquianharmonisch, so sind O, Σ incident, $j_1j_2j_3$, $j_1'j_2'j_3'$ gehen durch O, so dass jede zu tuv gehörende Terne 3p. C. eine cyklische Configuration bildet. Dies gilt ebenso für K_3; damit für Γ_3:

Auf einer äquianharmonischen Curve dritter Ordnung bilden alle acht Ternen aus 3p. Tg. C. cyklische Configurationen bezüglich des *Hesse*schen Dreieckes tuv. Die Ausdehnung auf 3^np. C. ist evident.

2. Den Dreikanten, die sich nach O (TUV) selbst conjugirt sind, entsprechen in der Abbildung drei äquianharmonische Curven von eigenthümlicher gegenseitiger Lage. Nämlich: Jede Curve hat die cyklischen

Configurationen, in denen sie die beiden anderen trifft, zu Ternen 3p. Tg. C., während die dritte Configuration ihre Wendepunktsdreiecke enthält (Art. 9).

3. Dreht sich die Ebene Σ um $i_1 i_2 i_3$ in J, so durchläuft $\mathfrak{k}$ die Gerade $O\mathfrak{k}$. Die Punkte $j_1 j_2 j_3$, $j_1' j_2' j_3'$ durchlaufen zwei äquianharmonische Curven, deren Ebenen $O\delta_1\mathfrak{k}$, $O\delta_2\mathfrak{k}$ sind. Die Abbildung deutet daraus:

Die zu tuv conjugirten Tangentialtripel aller Curven eines syzygetischen Büschels von I_3 unseres Systemes erfüllen zwei äquianharmonische Curven. Diese beiden bilden mit jener äquianharmonischen Curve des Büschels, die tuv zum Hesseschen Dreiecke hat, drei Curven der oben erwähnten Lage.

4. Die eine Ortscurve enthält demnach ∞^1 Ternen conjugirter Tripel der Büschelcurven. Jede Terne ist aber gleichzeitig eine Neutralgruppe und besteht (Art. 4. I.) aus conjugirten Tripeln bezüglich jedes anderen Wendepunktsdreieckes, und diese Wendepunktsdreiecke sind nach 2. und 3. die zu *tuv* gehörigen 3p. Tg. C. der Ortscurve, demnach der eigenthümliche Satz:

Auf einer äquianharmonischen Curve giebt es sechs weitere Reihen conjugirter Tripel, die bezüglich je eines der dreipunktigen zum Hesseschen gehörigen Tg. C. sich selbst conjugirt sind *).

So giebt es auf jeder äquianharmonischen Curve drei Reihen symmetrischer Gruppen. Jede enthält in 9 Punkten 12 Tripel, die zu dreien bezüglich der vier Wendepunktsdreiecke oder bezüglich des Hesseschen Dreieckes und einer Terne 3p. Tg. C. conjugirt sind. Auf K_3 sind sie dargestellt durch die mit δ_1, δ_2 allineirten Punktetripel und die nach $\delta_1\delta_2 O$ conjugirten Tripel; nämlich so, dass je drei Punkte, die mit δ_1 oder δ_2 allineirt sind, in I_3 Punktetripel zu Bildern haben, welche zu der $\delta_2\mathfrak{k}$ oder $\delta_1\mathfrak{k}$ abbildenden Tangential-(A) deren Tripeln nach conjugirt sind.

Oder so ausgedrückt: Das *Hesse*sche Dreieck bildet mit den drei Wendepunktsdreiecken oder mit einer der beiden zugehörigen Tangential-(A) drei Dreiecksquadrupel $(3,4)_3$. In der C_3 giebt es nun drei Reihen von je ∞^1 Neunergruppen, von denen jede sich gegen ein bestimmtes der Dreiecksquadrupel so verhält, wie die Reihe der Neutralgruppen hinsichtlich der Theilung in conjugirte Tripel gegen die Wendepunktsconfiguration.

Alle drei Neunerreihen haben die Wendepunktsgruppe gemeinsam. Die zwei Punkte, welche einen Wendepunkt zu einem Tripel ergänzen, das bezüglich eines der sechs speciellen 3p. Tg. C. conjugirt ist, sind wieder

*) Ich habe diese Tripelreihen schon bei anderer Gelegenheit bemerkt in: „Ueber successive quadratische Transformationen". Sitzungsberichte der Wiener Akad. Bd. 82.

Wendepunkte. So tritt eine neuerliche Theilung der Wendepunkte in 18 Tripel und dieser wiederum in 6 Tripelternen ein, auf welche ich an anderem Orte zurückkomme. Dieselbe ist von Wichtigkeit für die mit der Wendepunktsconfiguration verbundenen periodischen Transformationen, scheint aber auch von besonderem substitutionen-theoretischem Interesse zu sein.

Für die beiden neuen Neunergruppen besteht die Zusammenordnung zu Paaren „verbundener" Gruppen wie bei den Neutralgruppen nicht. Dagegen kann man 27-punktige Gruppen bilden die sich sowohl in drei Gruppen der einen als der anderen und auch der Neutralreihe sondern lassen und welche ausserdem noch eine Theilung in drei cyklische Configurationen (Art. 4. I.) gestatten.

Es ist wichtig zu bemerken, dass die nach 3p. Tg. C. conjugirten Tripel im Allgemeinen nicht mehr durch ein Projectionsverfahren erhalten werden können.

Nur die drei Punkte des Tangentialcyklus selbst haben die Eigenschaft, dass sie ein jedes der zugehörigen Tripel wieder in ein Tripel projiciren. Demnach: Zieht man aus einem Punkte eines 3p. Tg. C. *tuv* die drei weiteren Tangenten, so bilden die Berührungspunkte ein nach *tuv* conjugirtes Tripel etc.

5. Zu den in 2. II. erwähnten besonderen Curven des Systemes Γ_3 tritt eine andere Klasse von Curven, die *tuv* zu einem 3p. Tg. C. im einen oder anderen Sinne haben und deren *Hesse*sches Dreieck dem Tripelsystem angehört. Sie bilden sich auf der F_3 als Raumcurven dritter Ordnung ab, die *TUV* enthalten. Von *O* geht an dieselbe eine Sehne; deren Stützpunkte bilden sich auf die Γ_3 als die mit *tuv* zu einer Terne vereinigten Tangentialtripel ab. Der dritte Treffpunkt der Sehne auf F_3 ist das *Hesse*sche Dreieck der äquianharmonischen Curve Γ_3'. Die Tangenten der Raumcurve in jenen Stützpunkten sind Inflexionstangenten der F_3. —

6. Es ist ersichtlich, dass diese Methode, die hier zum ersten Male angewandt sein dürfte, zu einem einmal construirten ∞^2-Systeme von *eindeutig verbundenen n-punktigen Gruppen* in der Ebene eine Fläche hinzu zu construiren, welche — Punkt auf Gruppe — auf die so getheilte Ebene abbildbar ist, für das tiefere Studium dieser Gruppenmannigfaltigkeit von wichtigen Erfolgen begleitet sein kann. Die grosse Variabilität in den Annahmen vermehrt ihre Anwendbarkeit.

Prag, December 1881.

Nachtrag. Für die in II. 10. gefundene Tangential-(A), welche von drei 3p. Tg. C. gebildet wird, bin ich bei Gelegenheit einer Untersuchung über periodische Transformationen, deren Theorie mit diesen Dingen auf das Engste zusammenhängt, u. A. auf folgende eigenthümliche Sätze gestossen:

Je zwei der 3p. Tg. C. besitzen drei Perspectivitätsaxen, welche den drei Perspectivitätscentren, das ist den Punkten des dritten Tg. C. in bestimmtem Sinne umschrieben sind. Die beiden entgegengesetzten Umschreibungssinne vertheilen sich auf die beiden zum selben Wendepunktsdreiecke gehörigen Tangential-(A). Für zwei zu verschiedenen Wendepunktsdreiecken gehörige Tangential-(A) verschwindet der Unterschied im Sinne der Umschreibung.

Die Curve dritter Ordnung, welche durch zwei 3p. Tg. C. einer beliebigen Curve C_3 und durch die drei Seitenschnitte in einer von deren Perspectivitätsaxen bestimmt ist, ist immer äquianharmonisch.

In einer äquianharmonischen C_3 wird jeder Tangentialcyklus von einer Ecke des *Hesse*schen Dreiseits aus wieder in zwei Tangentialcyklen derselben Art auf die C_3 projicirt.

Der Beweis dieser Sätze ergiebt sich durch einen langwierigen und vielfach verschlungenen und an andere Untersuchungen anknüpfenden Gedankengang, den ich an anderem Orte darlegen werde.

September 1883.

Bemerkung über die Aequivalentsubstitutionen binärer quadratischer Formen.

(Von Herrn *J. Hermes* in Königsberg i. Pr.)

Geht die Form $(a_0; b_0; a_1)$, die mit φ_0 bezeichnet werde, durch eine Aequivalentsubstitution $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{smallmatrix}\right)$ in Φ_0 d. i. $(A_0; B_0; A_1)$ über, so sind Γ und A (und ebenso auch Δ und B) Zähler und Nenner eines Kettenbruches*), dessen Elemente aus den abwechselnd positiv und negativ genommenen vierten Substitutionscoefficienten zweier Formenketten und einer eingeschalteten Null bestehen.

I. Die Form φ_0 möge durch die Elemente $x_1, \ldots x_n$ in eine der Periode angehörige Form φ_n übergehen, die Form Φ_0, von derselben pos. Det. D, durch die Elemente $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ in *dieselbe* Form φ_n übergeführt werden können, so wird

$$\frac{\Gamma}{A} = (x_1, \ldots x_{n-1}, 0, \mp\lambda_{m-1}, \ldots \mp\lambda_1),$$

wobei die oberen oder unteren Zeichen zu wählen sind, je nachdem die Gesammtanzahl der Elemente dieses Kettenbruches ungerade oder gerade ist,

$$A \text{ also } = \pm[x_2, \ldots \mp\lambda_1], \quad B = \pm[x_2, \ldots \mp\lambda_1, h],$$
$$\Gamma \quad\quad = \pm[x_1, \ldots \mp\lambda_1], \quad \Delta = \pm[x_1, \ldots \mp\lambda_1, h].$$

Zwischen x_{n-1} und Null können noch beliebig oft die zur Periode gehörigen Elemente $\pi_1, \pi_2, \ldots$ oder zwischen Null und $\mp\lambda_{m-1}$ die der inversen Periode mit erforderlichem Zeichen eingefügt werden.

Beweis. 1. Geht nämlich von einer Kette benachbarter quadratischer

*) Verallgemeinerung des bekannten Satzes bei der *Pell*schen Gleichung. Vergleiche: *Dirichlet*, Zahlentheorie, herausgegeben von *Dedekind*, dritte Auflage, pag. 153, Anmerkung.

Formen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_n$ jede in die folgende resp. durch die Aequivalentsubstitution $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta_1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta_2 \end{smallmatrix}\right), \ldots \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta_n \end{smallmatrix}\right)$ über, so geht auch die erste in die letzte über durch die zusammengesetzte Aequivalentsubstitution $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$, worin:

$$\alpha = \pm[x_2, \ldots x_{n-1}], \quad \beta = \pm[x_2, \ldots x_n],$$
$$\gamma = \pm[x_1, \ldots x_{n-1}], \quad \delta = \pm[x_1, \ldots x_n].$$

Hierbei sind die Elemente x mit ungeradem resp. geradem Index gleich den positiv resp. negativ genommenen entsprechenden δ. Die Zeichen sind:

bei $n \equiv 0 (\text{mod}.4)$, $\equiv 2 (\text{mod}.4)$; $\equiv 1 (\text{mod}.4)$, $\equiv 3 (\text{mod}.4)$,

resp. $\left(\begin{smallmatrix} + & + \\ + & + \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} - & - \\ - & - \end{smallmatrix}\right)$; $\left(\begin{smallmatrix} - & + \\ - & + \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} + & - \\ + & - \end{smallmatrix}\right)$.

2. Werden die $\delta_1, \delta_2, \ldots$ *normal**) bestimmt, d. h. so, dass für pos. Det. die Bedingung $\sqrt{D} - (a_n) < b_n \gtrless [\sqrt{D}]$ gilt, so kommt man auf die Periode von reducirten Formen**), deren δ dann abwechselnd positiv und negativ sind.

3. Nun hängt $a_n = a_0\alpha^2 + b_0 . 2\alpha\gamma + a_1\gamma^2$ nur von α und γ ab, gehört also zum Bruche $\frac{\gamma}{\alpha} = (x_1, \ldots x_{n-1})$, wobei γ und α stets relativ prim zu einander sind, also:

$$\gamma = \tau . [x_1, \ldots x_{n-1}],$$
$$\alpha = \tau . [x_2, \ldots x_{n-1}], \qquad \tau = +1.$$

Wird daher $\frac{\gamma}{\alpha}$ auf irgend eine Art in einen Kettenbruch verwandelt $= (x'_1, \ldots x'_{p-1})$, so müssen sich mit Benutzung der diesen Elementen $x'_1, \ldots x'_{p-1}$ in angegebener Weise entsprechenden nicht normalen $\delta'_p, \ldots \delta'_{p-1}$ (und dem in normaler Weise zu bestimmenden δ'_p) zunächst wieder die Form φ_n und somit auch die übrigen Glieder der Periode wie vorhin ergeben.

Ist noch ausserdem $(x_1, \ldots x_{n-2}) = (x'_1, \ldots x'_{p-2})$ (woraus sich dann auch wegen des von der Elementenzahl abhängigen Zeichens der Differenz zweier auf

---

*) *Lejeune Dirichlet:* Vereinfachung der Theorie der binären quadratischen Formen von positiver Determinante (Berliner Akad. 1854). Pag. 100 wird ein Kettenbruch mit nur positiven Elementen „normal" genannt, während die jetzt gebräuchliche Bezeichnung dafür „regelmässig" zugleich gestattet, für die bekannte Entwickelung quadratischer Formen durch benachbarte zu reducirten den Ausdruck normal zu verwenden.

**) vgl. a. a. O. § 4 und 5, pag. 106 ff. und *Hermes:* Gleichungen ersten und zweiten Grades, (B. G. Teubner's Verlag) pag. 76, No. 170.

einander folgender Näherungswerthe und $\tau = +1$ die Congruenz $n \equiv p \pmod 2$ ergiebt), so muss $\delta'_p = \delta_n$ werden, weil schon die vorhergehende Form φ_{n-1} unverändert erhalten wird und es nur eine normale Fortentwickelung, durch $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta_n \end{smallmatrix}\right)$ giebt.

4. Um ferner für die erste Wurzel ω_0 der Form φ_0 einen regelmässigen Kettenbruch zu erhalten, müssen, je nachdem das zu einer beliebigen Form schon der ersten oder doch einer der im *Endlichen* folgenden Perioden gehörende δ_n positiv oder negativ ist, die Elemente des Bruches $\frac{\gamma}{\alpha} = (x'_1, \ldots x'_{p-1})$ in gerader oder ungerader Anzahl entwickelt werden und abgesehen vom ersten sämmtlich positiv sein. Bei genügend grossem n ist es dann stets zu erreichen, dass das normal hinzutretende $\delta'_p = \delta_n$ wird*). Somit ist der Kettenbruch regelmässig und bleibt also die Periode unverändert, sie gehört zu der Form φ_0 und zu deren erster Wurzel ω_0, denn diese kann nur auf *eine* Art in einen regelmässigen Kettenbruch verwandelt werden.

5. Ist $\frac{\gamma}{\alpha} = (x_1, \ldots x_{n-1})$, so ist nach dem Satze über Kettenbruchelemente

$$(\ldots, q, 0, r, \ldots) = (\ldots, q+r, \ldots),$$

$$\frac{\gamma}{\alpha} = (x_1, \ldots x_{n-1}),$$

---

*) Dies folgt durch Anwendung der fünf Sätze in § 1 der citirten Abhandlung *Dirichlets* oder auch durch folgende Schlussweise:

Zieht man bei einer Reihe auf einander folgender Näherungswerthe eines Kettenbruches, welcher von einer gewissen Stelle ab nur positive Elemente enthält: $\pi_1, \pi_2, \ldots$ zwei auf einander folgende Zähler z_1 und z_2 an dieser Stelle in Betracht, so können dieselben *A*) gleichnamig sein; dann sind es auch die folgenden Zähler, und es kann, wie beim regelmässigen Kettenbruche, ein nachfolgender Zähler nie numerisch kleiner als der vorhergehende werden; oder *B*) ungleichnamig, etwa z_1 negativ, z_2 positiv, so wird $z_3 = z_1 + z_2\pi_2$ nun vielleicht positiv (Fall *A*) oder, wenn es noch negativ bliebe, wäre es numerisch kleiner als z_1. Dann könnte $z_4 = z_2 + z_3\pi_3$ wieder negativ ausfallen (Fall *A*), oder wenn es positiv bliebe, so wird $z_5 = z_3 + z_4\pi_4$ jetzt positiv oder im anderen Falle numerisch kleiner als z_3 und um so mehr kleiner als z_1 etc. Mithin muss nach einer endlichen Anzahl von Operationen immer zuletzt Fall *A*) eintreten, und dasselbe gilt auch für die Nenner. Dies hat zur Folge, dass sich, falls $n \equiv p \pmod 2$ angenommen wird, aus

$(x_1, \ldots x_{n-1}) = (x'_1, \ldots x'_{p-1})$, $\tau = +1$ auch $(x_1, \ldots x_{n-2}) = (x'_1, \ldots x'_{p-2})$, $\tau = +1$

ergiebt und somit $\delta'_p = \delta_n$ wird; falls aber $n \equiv p-1 \pmod 2$ ist, bilden die $x_1, x_2, \ldots$ einen Kettenbruch, der von einer gewissen Stelle an nur negative Elemente hat. In analoger Schlussweise erkennt man, dass hier immer zuletzt der Fall ungleichnamiger auf einander folgender Zähler (Nenner) eintritt, woher denn in Verbindung mit $n \equiv p-1 \pmod 2$ auch wieder $(x'_1, \ldots x'_{p-2}) = (x_1, \ldots x_{n-2})$, *aber für* $\tau = -1$ folgt und gerade desshalb $\delta'_p = \delta_n$ wird.

auch

$$= (x_1, \ldots x_{n-1}, 0, \mp\lambda_{m-1}, \cdots \mp\lambda_1, 0, \pm\lambda_1, \cdots \pm\lambda_{m-1})$$

und zugleich, da

$$(\ldots, q, r, 0) = (\ldots, q)$$

ist,

$$(x_1, \ldots x_{n-2}) = (x_1, \ldots x_{n-1}, 0, \mp\lambda_{m-1}, \cdots \mp\lambda_1, 0, \pm\lambda_1, \cdots \pm\lambda_{m-2}).$$

Also gelangt man von φ_0 ausgehend (vgl. 3.) mit Benutzung der diesen sämmtlichen Elementen entsprechenden δ (und δ_n) wiederum zu der Form φ_n und somit zu den übrigen Gliedern der Periode.

6. Benutzt man aber nur diejenigen δ, die den Elementen des Bruches

$$\frac{\Gamma}{A} = (x_1, \ldots x_{n-1}, 0, \mp\lambda_{m-1}, \cdots \mp\lambda_1)$$

entsprechen (und 0), und gelangte man so zu einer Form $(P'_0; Q'_0; P'_1)$, so müsste diese weiter entwickelt in beiden Fällen, sei es, dass die Anzahl der vorhergehenden Elemente $x_1, \ldots x_{n-1}, 0, \mp\lambda_{m-1}, \cdots \mp\lambda_1, 0$ gerade, sei es, dass sie ungerade wäre, nach 5. durch die den Elementen $+\lambda_1, \cdots +\lambda_{m-1}$ entsprechenden δ (und δ_n) zu φ_n führen. Da nun aber Φ_0 durch die den Elementen $\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}$ (und λ_m) entsprechenden δ nach Voraussetzung auf φ_n führt und $\lambda_m = \delta_n$ ist, weil φ_n bereits der Periode angehört, so ist $(P'_0; Q'_0; P'_1)$ identisch mit Φ_0.

So geht z. B. die Form $(13; -12; 7)$ v. d. Det. 53 durch die Aequivalentsubstitutionen $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -14 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, also durch die Elemente $1, -3, -14$ (und -3) in die der Periode angehörige Form $(-4; 5; 7)$ über; andererseits die Form $(47; 10; 1)$ durch $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -17 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$, also durch die Elemente -17 (und -3) in dieselbe Form $(-4; 5; 7)$. Mithin wird die Aequivalentsubstitution:

$$\alpha = - \quad [-3, -14, 0, 17], \quad \beta = - \quad [-3, -14, 0, 17, 0] + h\alpha,$$
$$\gamma = -[1, -3, -14, 0, 17], \quad \delta = -[1, -3, -14, 0, 17, 0] + h\gamma,$$

d. i. weil $h = 0$ aus $10 = 10 + h.47$ folgt,

$$\left(\begin{smallmatrix} +8 & +3 \\ +5 & +2 \end{smallmatrix}\right); \quad \left|\begin{smallmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{smallmatrix}\right| = +1.$$

II. Beweis, dass zwei Formen derselben Determinante, die in verschiedene Perioden führen, nicht äquivalent sein können.

7. Die Voraussetzung ist hiebei also die, dass φ_0 durch die Elemente $\varkappa_1, \ldots \varkappa_{n-1} |\varkappa_n|$ oder nach 4. durch $\varkappa'_1, \ldots \varkappa'_{p-1} |\pm\varkappa_n|$ auf die der Periode π angehörige Form φ_n führt und Φ_0 durch $\mu_1, \ldots \mu_{q-1}$ auf eine Form Φ_q, die einer anderen Periode Π angehört; diese Periode Π bleibt also nach 4. unverändert, wenn statt der Elemente μ andere oder auch die regelmässigen μ' eingeführt werden. Φ_0 sei jetzt: $(P_0; Q_0; P_1)$.

Behauptet wird aber, dass es keine Aequivalentsubstitution giebt, durch die φ_0 in Φ_0 übergeht.

Gäbe es nämlich eine solche $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{smallmatrix}\right)$; $A > 0$, und ginge also durch dieselbe φ_0 in Φ_0 über, so denke man sich $\frac{\Gamma}{A}$ nach 3. unregelmässig in die Elemente des Kettenbruches $(\varkappa'_1, \ldots \varkappa'_{p-1}, 0, -\lambda_{m-1}, \cdots -\lambda_1)$ verwandelt und zwar so, dass $\varkappa'_1, \ldots \varkappa'_{p-1}, 0$ dabei als *gegeben* zu betrachten sind, $-\lambda_{m-1}, \cdots -\lambda_1$ aber *ermittelt* werden könnten durch Weiterentwickelung des Bruches und zwar in solcher Anzahl, dass $p-1$ wie $m-1$ gerade, wenn δ_n positiv; ungerade, wenn δ_n negativ ist. Durch Anwendung der Aequivalentsubstitution (eigentlich)

$$A = \pm[\varkappa'_2, \cdots -\lambda_1], \quad B_1 = \pm[\varkappa'_2, \cdots -\lambda_1, 0],$$
$$\Gamma = \pm[\varkappa'_1, \cdots -\lambda_1], \quad \Delta_1 = \pm[\varkappa'_1, \cdots -\lambda_1, 0],$$

wobei

$$B_1 = B \mp hA, \quad \Delta_1 = \Delta \mp h\Gamma$$

sein muss, ginge dann also φ_0 in $(P_0; Q_0 \mp hP_0; P'_1)$ über, in eine Form, welche abgesehen von den Anfangselementen $0, \mp h$ einer normalen Entwickelung der Form Φ_0 mit dieser dieselbe Fortentwickelung, also auch dieselbe Periode hat.

Da nun aber nach 5. φ_0 durch die den Elementen $\varkappa'_1, \ldots \varkappa'_{p-1}, 0, -\lambda_{m-1}, \cdots -\lambda_1, 0, \lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}$ entsprechenden δ (und δ_n) in φ_n und die anderen Formen der Periode π übergeht, so müsste auch $(P_0; Q_0 \mp hP_0; P'_1)$ durch $\lambda_1, \ldots \lambda_{m-1}$ (und $\lambda_m = \delta_n$) auf φ_n und π führen und behielte diese Periode π, wenn nach 4. die Elemente $\lambda_1, \ldots \lambda_m$ durch die regelmässigen ersetzt würden. Φ hat aber dieselbe Periode wie $(P_0; Q_0 \mp hP_0; P'_1)$, müsste also ebenfalls in die Periode π führen, was gegen die Voraussetzung wäre.

Daher kann es keine Aequivalentsubstitution und somit auch keine darstellenden Zahlen der Gleichung

$$a_0 x^2 + b_0 . 2xy + a_1 y^2 = P$$

geben, die zu dem in Φ_0 befindlichen Q_0 gehörten.

Das Vorstehende muss auch für Formen mit neg. Det. gelten, wenn nur das Analogon der Periode daselbst mit Berücksichtigung der Spaltung (vgl. *Dirichlet:* Zahlentheorie, herausgegeben von *Dedekind* § 62) bei Formen v. d. Det. -1 und -3 richtig interpretirt wird.

Die Elemente $\varkappa$ erhält man durch den Algorithmus der quadratischen Kettendivision mit dem geringsten Aufwande von Rechnung.

Königsberg i. Pr., November 1882.

Eigenschaften irreductibler Functionen.

(Von Herrn *Leo Königsberger* in Wien.)

Die Einführung des Begriffes der Irreductibilität algebraischer Functionen ermöglicht dieselben eindeutig zu definiren, insofern eine algebraische Function, welche die Lösung einer irreductibeln Gleichung m^{ten} Grades ist, nicht die Lösung einer gleichartigen irreductibeln Gleichung höheren Grades sein kann, weil sie die Lösung einer Gleichung m^{ten} Grades ist, und ebenso auch nicht einer gleichartigen Gleichung niederen Grades genügen kann, weil jene Gleichung m^{ten} Grades irreductibel sein sollte; ***eine irreductible algebraische Gleichung definirt also eine jede ihrer Lösungen in völlig eindeutiger Weise, indem keine derselben einer anderen gleichartigen irreductibeln Gleichung angehören kann.***

Ganz ähnlich verhält es sich für beliebige algebraische Differentialgleichungen. Sei y_1 irgend ein particuläres Integral der irreductibeln Differentialgleichung m^{ter} Ordnung

$$\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^x + f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^{x-1} + \cdots + f_x\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right) = 0,$$

in welcher $f_1, f_2, \ldots f_x$ rationale Functionen bedeuten, und welche somit der von mir gegebenen Definition gemäss*) eine in $\frac{d^m y}{dx^m}$ algebraisch irreductible Gleichung x^{ten} Grades ist und kein Integral mit einer Differentialgleichung niederer Ordnung als der m^{ten} gemein hat, so ist einerseits unmittelbar zu sehen, dass das particuläre Integral y_1 nicht einer gleichartigen irreductibeln Gleichung höherer Ordnung genügen kann, weil es (1.) befriedigt, und ebensowenig einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung, da (1.) irreductibel sein sollte; andererseits folgt aber auch, dass y_1 nicht etwa das Integral einer gleichartigen irreductibeln Differentialgleichung m^{ter} Ord-

*) s. „Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen". Teubner, 1882.

nung, aber von höherem oder niedrigerem Grade als vom $\varkappa^{\text{ten}}$ sein kann, weil a. a. O. bewiesen worden, dass eine im angegebenen Sinne irreductible Differentialgleichung mit keiner anderen gleichartigen Differentialgleichung derselben Ordnung, welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten von niederem Grade ist, ein Integral gemein haben kann; endlich würde die Annahme, dass y_1 zugleich noch einer anderen gleichartigen Differentialgleichung derselben Ordnung und desselben Grades genügt, durch Elimination von $\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^{\varkappa}$ entweder zu einer Differentialgleichung m^{ter} Ordnung und $(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Grades führen oder eine Gleichheit der Coefficienten beider Differentialgleichungen, welche rationale Differentialausdrücke $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind, für $y = y_1$ nach sich ziehen, was in beiden Fällen der Annahme der Irreductibilität widerspricht. Wir erhalten somit den folgenden, dem oben bewiesenen analogen Satz:

Eine irreductible Differentialgleichung definirt ein jedes ihrer particulären Integrale völlig eindeutig, insofern keines derselben einer anderen gleichartigen irreductibeln Differentialgleichung angehören kann.

Ich habe schon in der oben angeführten Arbeit hervorgehoben, dass der Eigenschaft *irreductibler algebraischer Gleichungen, mit einer Gleichung höheren Grades alle Lösungen gemein zu haben, wenn eine der Lösungen den beiden Gleichungen gemeinschaftlich ist,* die analoge Eigenschaft für beliebige irreductible Differentialgleichungen entspricht, dass, *wenn eine solche mit einer gleichartigen Differentialgleichung ein particuläres Integral gemein hat, alle ihre Integrale jener Differentialgleichung genügen müssen,* dass aber die Eigenschaft algebraischer Gleichungen, *dass, wenn eine ihrer Lösungen einer gleichartigen Gleichung niederen Grades angehört, jede ihrer Wurzeln die Lösung einer gleichartigen Gleichung niederen Grades sein muss,* kein Analogon bei Differentialgleichungen findet, die in ihren Integralen algebraische Functionen und Transcendenten aller Ordnungen enthalten können. Doch mag in Rücksicht auf den letzteren Umstand noch ausdrücklich hervorgehoben werden, dass sowohl für algebraische Functionen als auch für Differentialgleichungen ein wesentlicher Satz gemeinsam bleibt, welcher die Beziehungen zu den Lösungen anderer Gleichungen feststellt, indem für algebraische Gleichungen der oben ausgesprochene Satz in die Form gebracht werden kann, dass, *wenn eine algebraische Gleichung m^{ten} Grades mit einer anderen höheren Grades eine Lösung gemein hat, die nicht schon einer gleichartigen Gleichung von*

niedrigerem Grade als dem m^{ten} Genüge leistet, die erste alle Lösungen mit der zweiten gemeinsam haben muss, während für Differentialgleichungen (s. S. 5 meiner „Untersuchungen etc.") der Satz gilt, dass, ***wenn eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung, welche in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten im algebraischen Sinne irreductibel ist, mit einer Differentialgleichung höherer Ordnung ein Integral gemein hat, welches keiner Differentialgleichung von niederer Ordnung als der m^{ten} genügt, sämmtliche Integrale der ersten Differentialgleichung auch die zweite befriedigen müssen****).

Wir sehen also, dass, während der eben ausgesprochene Satz für algebraische Gleichungen noch mit der Eigenschaft der Irreductibilität fest verknüpft ist, wir für Differentialgleichungen, ohne die allgemeine Gültigkeit des Satzes zu ändern, schon von der Irreductibilitätseigenschaft abstrahiren dürfen, wenn wir nur das gemeinsame Integral der Bedingung unterwerfen, nicht eine Transcendente noch niederer Ordnung zu sein. Es ist aber weiter leicht zu erkennen, dass für algebraische Gleichungen dieser Satz von der ohne Rest ausführbaren Division zweier Polynome in einander sich in einfachster Form folgendermassen aussprechen lässt: ***Wenn eine algebraische Gleichung mit einer anderen eine Lösung gemein hat, und es gelingt mit Hülfe von rationalen Transformationen der ersten Gleichung, welche für alle Lösungen derselben gültig sind, die zweite Gleichung derartig umzuformen, dass aus irgend welchen Gründen für die transformirte zweite Gleichung geschlossen werden kann, dass dieselbe identisch verschwindet, so werden alle Lösungen der ersten Gleichung auch die zweite befriedigen.*** Denn da für jede andere Lösung der ersten Gleichung dieselben Transformationen ausführbar sind, also das Polynom der zweiten Gleichung genau in das frühere transformirte Polynom

---

*) Ich will hinzufügen, dass auch, ***wenn eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung und x^{ten} Grades in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten, hinsichtlich dessen sie in algebraischem Sinne irreductibel ist, mit einer Differentialgleichung derselben Ordnung aber höheren oder desselben Grades in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten ein Integral gemein hat, welches nicht schon einer Differentialgleichung niedrigerer Ordnung oder derselben Ordnung m und niedrigeren Grades als x Genüge leistet, nothwendig alle Integrale der ersteren Differentialgleichung die zweite befriedigen müssen;*** denn verfährt man mit den beiden Differentialgleichungen, als Polynome in $\frac{d^m y}{dx^m}$ aufgefasst, nach der Methode des grössten gemeinschaftlichen Theilers, so bleibt als solcher entweder ein Differentialausdruck $(m-1)^{ter}$ Ordnung oder einer m^{ter} Ordnung und niedrigeren Grades als x, und da der Annahme gemäss das gemeinsame Integral diesen Rest nicht zu Null machen darf, so folgt, dass das eine Polynom ohne Rest in dem anderen enthalten sein muss.

übergeht, dieses aber der Annahme gemäss identisch verschwindet, so wird offenbar auch jede andere Lösung der ersten Gleichung dieses letztere Polynom zu Null machen; so haben z. B. die beiden Gleichungen

$$x^4-x^2-2=0 \quad \text{und} \quad x^5-x^4-x^3+x^2-2x+2=0$$

die Lösung $x=\sqrt{2}$ gemein, ferner liefern aber die für jede Lösung der ersteren Gleichung gültigen Ausdrücke

$$x^2=x^4-2 \quad \text{und} \quad x^3=x^5-2x$$

in das Polynom der zweiten Gleichung eingesetzt den für jedes x identisch verschwindenden Ausdruck

$$x^5-x^4-x^5+2x+x^4-2-2x+2,$$

es werden somit alle Lösungen der ersten Gleichung auch der zweiten Genüge leisten, wiewohl die erste Gleichung mit Adjunction rationaler Zahlen nicht irreductibel ist. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass auch ein analoger Satz für algebraische Differentialgleichungen besteht, nämlich, ***wenn zwei Differentialgleichungen ein gemeinsames particuläres Integral besitzen, und es gelingt mit Hülfe von Differentiationen und rationalen Transformationen der ersten Gleichung, welche für alle Integrale derselben gültig sind, die zweite Differentialgleichung derart umzuformen, dass aus irgend welchen Gründen für die transformirte zweite Gleichung geschlossen werden kann, dass dieselbe identisch verschwindet, so werden alle Integrale der ersten Differentialgleichung auch die zweite befriedigen.***

In dieser Form sind die Sätze auch auf transcendente Gleichungen ausdehnbar, und die Bedingungen dafür analytisch leicht aufzustellen. Sei z. B. $f(x)$ ein ganzes Polynom von x, und $\varphi(x)$ eine nach positiven ganzen Potenzen von x fortschreitende unendliche Reihe, so wird, wenn

$$f(x) = x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned}
x^n &= f(x)-a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-\cdots-a_{n-1}x-a_n,\\
x^{n+1} &= x\,f(x)-a_1f(x)-b_1x^{n-1}-b_2x^{n-2}-\cdots-b_n,\\
x^{n+2} &= x^2f(x)-a_1xf(x)-b_1f(x)-c_1x^{n-1}-\cdots-c_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

sein, und somit, wenn diese für alle x identischen Gleichungen zur Transformation der unendlichen Reihe $\varphi(x)$ benutzt werden, dieselbe in

$$\varphi(x) = A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots+A_{n-1}x^{n-1}+f(x)[B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots]$$

übergehen. Haben nun $f(x)$ und $\varphi(x)$ eine im Convergenzbereiche liegende gemeinsame Lösung, so wird offenbar für eben dieselbe auch

$$\psi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-1} x^{n-1}$$

verschwinden müssen, und wenn umgekehrt $f(x)$ und $\psi(x)$ für ein gemeinsames x Null werden, so wird ebendasselbe auch $\varphi(x)$ verschwinden lassen. Soll nun $f(x)$ alle seine Lösungen, die im Convergenzbereiche der Reihe liegen müssen, mit $\varphi(x)$ gemein haben, so wird das Polynom $\psi(x)$, da es vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, identisch verschwinden müssen, und daher werden

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad \ldots \quad A_{n-1} = 0$$

die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sein; da aber wegen

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_{n-1}x^{n-1} + A_{n-2}x^{n-2} + \cdots + A_1 x + A_0}{x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n} + B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots,$$

wie unmittelbar zu sehen, das Verschwinden der Grössen A_{n-1}, A_{n-2}, $\ldots$ A_0 als nothwendig und hinreichend in bekannten Bezeichnungen die Bedingungen nach sich zieht *)

$$(A.) \quad \left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x^{-2}} = 0, \quad \ldots \quad \left[\frac{\varphi(x)}{f(x)}\right]_{x^{-n}} = 0,$$

so werden diese letzteren nothwendig und hinreichend dafür sein, dass beide Gleichungen alle Lösungen der einen gemeinsam haben. Ist $\varphi(x)$ selbst ein ganzes Polynom, und die Gleichung $f(x) = 0$ ist eine irreductible, dann sind die Coefficienten des Polynoms $\psi(x)$ gleichartig mit denen von $f(x)$ und $\varphi(x)$, und es werden daher die Bedingungen $(A.)$ von selbst erfüllt sein müssen; im Allgemeinen sind die Grössen A_{n-1}, A_{n-2}, $\ldots$ A_0, also auch die linken Seiten der Bedingungen $(A.)$ unendliche Reihen, deren Glieder rationale Verbindungen der Coefficienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ sind, und wenn man aus irgend welchen Gründen auf das Verschwinden derselben schliessen kann **), so wird die algebraische Gleichung $f(x)$ alle

---

*) Vergl. *Weierstrass*, Theorie der *Abel*schen Functionen, d. Journal Bd. 52, S. 295 und 296.

**) Ist z. B. die algebraische Gleichung $f(x) = 0$ mit rationalen Coefficienten irreductibel, und kann man beweisen, dass die in Form von unendlichen Zahlenreihen auftretenden Grössen $(A.)$ rationale Zahlen sind, so werden, weil dann die Grössen $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ ebenfalls rationale Zahlen sein müssen, diese wegen der Annahme der Irreductibilität der Gleichung $f(x) = 0$, welche mit der Gleichung $\varphi(x) = 0$ eine Lösung gemein haben sollte, sämmtlich verschwinden müssen, und daher alle Wurzeln von $f(x) = 0$ auch $\varphi(x)$ zu Null machen. Zur Herstellung der Bedingungsgleichungen $(A.)$

ihre Lösungen mit denen der unendlichen Reihe $\varphi(x)$ gemein haben. Die Ausdehnung dieser Betrachtungen auf die entsprechenden, aus Functionen und deren Differentialquotienten gebildeten Ausdrücke ist unmittelbar ersichtlich.

Nachdem die Frage erörtert worden, unter welchen Bedingungen eine algebraische Gleichung oder eine Differentialgleichung mit einem gleichartigen Grössenausdrucke alle Lösungen gemein hat, wenn *eine* solche ihnen gemeinsam ist, wird es sich darum handeln, aus einem solchen Gebilde alle diejenigen Lösungen heraus zu schaffen, welche dasselbe mit einem gleichartigen niederer Art gemein hat, und es ist die Frage nur für Differentialgleichungen zu behandeln, da für algebraische Gleichungen die Division der einen Gleichung durch die andere das Verlangte leistet. Habe die irreductible Differentialgleichung

$$(1.)\quad \begin{cases} \left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^x + f_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^{x-1} + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + f_x\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right) = 0 \end{cases}$$

mit einer Differentialgleichung derselben Ordnung, aber höheren oder desselben Grades in Bezug auf $\frac{d^m y}{dx^m}$ alle Integrale gemein, so braucht man nur mit der ersten in die zweite zu dividiren, es wird dann im Allgemeinen ein Rest bleiben, der in Bezug auf $\frac{d^m y}{dx^m}$ nur vom $(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Grade ist; da nun aber jedes gemeinsame Integral des Divisors und des Dividendus auch ein Integral des Restes sein muss, so würde ein Integral der irreductibeln Differentialgleichung einer gleichartigen Differentialgleichung derselben Ordnung und niedrigeren Grades in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten genügen, was nicht angeht; also muss die linke Seite der irreductibeln

---

mag noch bemerkt werden, dass

$$\frac{1}{x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n} = \frac{x^{-n}}{1 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + \cdots + a_{n-1}x^{-(n-1)} + a_n x^{-n}}$$
$$= C_0 x^{-n} + C_1 x^{-n-1} + C_2 x^{-n-2} + \cdots$$

ist, worin

$$C_r = \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n} (-1)^{\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n} \frac{(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)!}{\lambda_1!\lambda_2!\ldots\lambda_n!} a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ldots a_n^{\lambda_n}, \qquad (\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\cdots+n\lambda_n = r)$$

und dass somit jene Entwickelungscoefficienten (*A.*) in leicht übersichtlicher Form dargestellt werden können; ich unterlasse es, hier auf specielle Anwendungen dieser Betrachtungen einzugehen.

Differentialgleichung als Polynom $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten aufgefasst in der linken Seite der Differentialgleichung derselben Ordnung, aber höheren oder desselben Grades enthalten sein, und wird somit der Quotient, welcher selbst wieder eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung definirt, im Allgemeinen die von den Integralen der irreductibeln Differentialgleichung befreite Differentialgleichung liefern. Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, dass die erstere Differentialgleichung nicht grade irreductibel zu sein braucht, sondern dass es genügt, wenn dieselbe mit der zweiten Differentialgleichung ein Integral gemein hat, welches nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung niederer Ordnung oder derselben Ordnung aber niedrigeren als des $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades genügt. Sollte der Quotient noch Integrale mit der irreductibeln Gleichung gemein haben, so würde dieselbe Operation nochmals zu vollziehen sein, bis man zu einer Gleichung m^{ter} Ordnung gelangt, die kein Integral mehr mit der irreductibeln Differentialgleichung gemeinsam hat. Ist die zweite Differentialgleichung dagegen von einer höheren Ordnung μ

$$(2.)\quad \begin{cases} \left(\frac{d^\mu y}{dx^\mu}\right)^\lambda + \varphi_1\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{\mu-1}y}{dx^{\mu-1}}\right)\left(\frac{d^\mu y}{dx^\mu}\right)^{\lambda-1} + \cdots \\ \qquad \cdots + \varphi_\lambda\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{\mu-1}y}{dx^{\mu-1}}\right) = 0, \end{cases}$$

so leite man durch Differentiation aus der irreductibeln Differentialgleichung (1.) die Beziehungen her

$$(3.)\quad \begin{cases} \frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}\left(\varkappa\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^{\varkappa-1} + (\varkappa-1)f_1\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^{\varkappa-2} + \cdots + f_{\varkappa-1}\right) \\ \qquad + \psi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0, \end{cases}$$

$$(4.)\quad \begin{cases} \frac{d^{m+2}y}{dx^{m+2}}\left(\varkappa\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^{\varkappa-1} + (\varkappa-1)f_1\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^{\varkappa-2} + \cdots + f_{\varkappa-1}\right) \\ \qquad + \chi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0, \end{cases}$$

. . . . . .

$$(5.)\quad \begin{cases} \frac{d^\mu y}{dx^\mu}\left(\varkappa\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^{\varkappa-1} + (\varkappa-1)f_1\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^{\varkappa-2} + \cdots + f_{\varkappa-1}\right) \\ \qquad + \omega\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0, \end{cases}$$

worin $\psi,\ \chi,\ \ldots\ \omega$ rationale Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen bedeuten, und dividire mit dem durch (5.) definirten Werthe von $\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$ in

die gegebene Differentialgleichung (2.), beide als Polynome von $\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$ aufgefasst, man wird sodann einen Quotienten erhalten, der in $\frac{d^\mu y}{dx^\mu}$ vom $(\lambda-1)^{\text{ten}}$ Grade ist, und einen Rest von der Ordnung $\mu-1$, der im Allgemeinen ebenfalls von dem den beiden Differentialgleichungen gemeinsamen Integrale befriedigt sein wird; dividirt man den Rest durch das dem Polynome (5.) vorhergehende Polynom $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, so ist der Quotient dieser Division wieder ein Differentialausdruck $(\mu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und um eine Einheit niedrigeren Grades, während der Rest ein Polynom $(\mu-2)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, das wieder im Allgemeinen durch das gemeinsame Integral zu Null gemacht wird. Schliesst man so weiter, so kommt man endlich zu einem Restpolynom m^{ter} Ordnung, und wenn man dies durch die linke Seite der Gleichung (1.) dividirt — es muss jedenfalls von gleichem oder höherem Grade als x sein —, so ergiebt sich als Quotient ein Differentialausdruck m^{ter} Ordnung, und der Rest muss, da er von dem gemeinsamen Integrale befriedigt wird, die Differentialgleichung (1.) aber irreductibel sein sollte — oder wenigstens mit (2.) ein Integral gemein haben sollte, welches nicht schon einer Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung als der m^{ten} oder derselben Ordnung und niedrigeren Grades als des x^{ten} genügt — verschwinden; bezeichnet man also die linke Seite der Differentialgleichung (1.) mit $D_m^{(x)}$, die linke Seite von (2.) mit $D_\mu^{(\lambda)}$, und allgemein rationale Differentialausdrücke der ϱ^{ten} Ordnung und des σ^{ten} Grades in Bezug auf den ϱ^{ten} Differentialquotienten durch

$$d_\varrho^{(\sigma)},$$

so ergiebt sich nach der obigen Auseinandersetzung unter den gemachten Voraussetzungen die Darstellung

$$(6.)\qquad D_\mu^{(\lambda)} = d_\mu^{(\lambda-1)}\cdot\frac{d^{\mu-m}D_m^{(x)}}{dx^{\mu-m}} + d_{\mu-1}^{(\sigma)}\cdot\frac{d^{\mu-m-1}D_m^{(x)}}{dx^{\mu-m-1}} + \cdots + d_{m+1}^{(\tau)}\frac{dD_m^{(x)}}{dx} + d_m^{(\nu)}D_m^{(x)};$$

man sieht aus dieser Form unmittelbar, dass alle Integrale von $D_m^{(x)} = 0$ der Differentialgleichung $D_\mu^{(\lambda)} = 0$ genügen, und dass somit im Allgemeinen alle Integrale der Differentialgleichung

$$(7.)\qquad d_\mu^{(\lambda-1)}\cdot\frac{d^{\mu-m}D_m^{(x)}}{dx^{\mu-m}} + d_{\mu-1}^{(\sigma)}\cdot\frac{d^{\mu-m-1}D_m^{(x)}}{dx^{\mu-m-1}} + \cdots + d_{m+1}^{(\tau)}\cdot\frac{dD_m^{(x)}}{dx} + d_m^{(\nu)}D_m^{(x)} = 0,$$

welche nicht die zweiten Factoren sämmtlicher Posten zu Null machen, diejenigen Integrale der Differentialgleichung (2.) liefern, welche dieselbe nicht mit (1.) gemeinsam hat. Sind die Gleichungen (1.) und (2.) lineare

mit algebraischen Coefficienten, so sieht man sofort, dass die Grössen

$$d_\mu^{(\lambda-1)},\quad d_\mu^{(\sigma)},\quad \ldots\quad d_{m+1}^{(\tau)},\quad d_m^{(\nu)}$$

algebraische Functionen von x sind, und dass die Formel (7.) die Darstellung*) einer linearen Differentialgleichung, welche alle Integrale einer anderen linearen Differentialgleichung $D_m = 0$ enthält, in der Form liefert

$$(8.)\qquad \frac{d^{\mu-m}D_m}{dx^{\mu-m}} + F_1(x)\frac{d^{\mu-m-1}D_m}{dx^{\mu-m-1}} + \cdots + F_{\mu-m-1}(x)\frac{dD_m}{dx} + F_{\mu-m}(x)D_m = 0,$$

so dass, D_m als abhängige Variable betrachtet, die ursprüngliche Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung mit Hülfe der Differentialgleichung m^{ter} Ordnung in eine homogene lineare der $(\mu-m)^{\text{ten}}$ Ordnung verwandelt ist; es braucht kaum erwähnt zu werden, dass die Coefficienten der linearen Differentialgleichung nicht algebraische Functionen von x sein müssen, um eben diese Schlussfolgerungen zu gestatten. Gehen wir nun wieder zu dem allgemeinen Falle zurück, so kann die Gleichung (7.) weiter transformirt werden, indem die Differentialausdrücke, welche die Coefficienten von (7.) bilden, wieder vermöge der Gleichungen (3.), (4.), ... (5.) in ähnlicher Weise reducirt werden können, so dass

$$d_\mu^{(\lambda-1)} = e_\mu^{(\lambda-2)}\frac{d^{\mu-m}D_m^{(\varkappa)}}{dx^{\mu-m}} + e_{\mu-1}^{(\cdot)}\frac{d^{\mu-m-1}D_m^{(\varkappa)}}{dx^{\mu-m-1}} + \cdots + e_{m+1}^{(\tau)}\frac{dD_m^{(\varkappa)}}{dx} + e_m^{(\nu)}D_m^{(\varkappa)} + e_m^{(\varkappa-1)}$$

. . . . . .

wird, worin $e_p^{(q)}$ wieder ein Differentialausdruck p^{ter} Ordnung und q^{ten} Grades in Bezug auf den p^{ten} Differentialquotienten ist, und $\varkappa-1$ auch Null, also $e_m^{(\varkappa-1)}$ ein Differentialausdruck $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sein kann. Denken wir uns ebendiese Operation für alle successive entstehenden Differentialausdrücke durchgeführt, so erhalten wir

$$(9.)\qquad D_\mu^{(\lambda)} = \sum_{\varrho_0,\varrho_1,\ldots\varrho_{\mu-m}} E_m^{(r)}(D_m^{(\varkappa)})^{\varrho_0}\left(\frac{dD_m^{(\varkappa)}}{dx}\right)^{\varrho_1}\cdots\left(\frac{d^{\mu-m}D_m^{(\varkappa)}}{dx^{\mu-m}}\right)^{\varrho_{\mu-m}} + F_m^{(\varkappa-1)},$$

worin sich die Summe auf die Grössen $\varrho_0, \varrho_1, \ldots \varrho_{\mu-m}$ bezieht, $E_m^{(r)}$, welches ein Differentialausdruck m^{ter} Ordnung und r^{ten} Grades $(<\varkappa)$ in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten ist, von eben diesen ϱ-Grössen abhängt, und $F_m^{(\varkappa-1)}$ einen Differentialausdruck m^{ter} Ordnung und $(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Grades be-

*) vgl. *Frobenius*, d. Journal Bd. 76; es ist aus der obigen Herleitung ersichtlich, dass wir zur Herstellung dieser Reduction der linearen Differentialgleichungen nicht ihre Irreductibilität im allgemeinen Sinne vorauszusetzen brauchen, sondern nur die Annahme, dass die lineare Differentialgleichung das gemeinsame Integral nicht noch mit einer *linearen* Differentialgleichung niederer Ordnung gemein haben darf.

deutet. Da aber alle Integrale von $D_m^{(x)} = 0$ auch $D_\mu^{(\lambda)} = 0$ befriedigen sollen, ausserdem eines der gemeinsamen Integrale nicht einer gleichartigen Differentialgleichung m^{ter} Ordnung und niedrigeren Grades als x, auch nicht einer von niedrigerer Ordnung als der m^{ten} genügen soll, so muss $F_m^{(x-1)}$ identisch Null sein, und wir erhalten im Allgemeinen *die gesuchte Transformation der Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung in der Form*

$$(10.) \qquad D_\mu^{(\lambda)} = \sum_{\varrho_0 \varrho_1 \cdots \varrho_{\mu-m}} E_m^{(r)} (D_m^{(x)})^{\varrho_0} \left(\frac{dD_m^{(x)}}{dx}\right)^{\varrho_1} \cdots \left(\frac{d^{\mu-m} D_m^{(x)}}{dx^{\mu-m}}\right)^{\varrho_{\mu-m}} = 0,$$

worin nicht alle ϱ zugleich Null sein dürfen, wenn die Differentialgleichung $D_m^{(x)} = 0$ mit der gleichartigen Differentialgleichung $D_\mu^{(\lambda)} = 0$ ein Integral gemein haben soll, welches nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung als der m^{ten} oder einer solchen m^{ter} Ordnung und von niedrigerem Grade als dem x^{ten} genügen soll.

Nachdem oben für algebraische Gleichungen und Differentialgleichungen die Bedingungen und Eigenschaften für den Fall entwickelt worden, dass eine Lösung einer irreductibeln Gleichung einer anderen Gleichung angehört, gehen wir nunmehr dazu über, die Form der algebraischen Beziehungen zwischen den Lösungen irreductibler Gleichungen unter einander festzustellen, und wollen zuerst wieder zur Erläuterung des Folgenden einige Worte über irreductible algebraische Gleichungen vorausschicken.

Sei

$$(11.) \qquad y^m + f_1(x) y^{m-1} + \cdots + f_{m-1}(x) y + f_m(x) = 0$$

eine irreductible algebraische Gleichung mit rationalen Coefficienten, und eine andere eben solche irreductible Gleichung

$$(12.) \qquad Y^\mu + F_1(x) Y^{\mu-1} + \cdots + F_{\mu-1}(x) Y + F_\mu(x) = 0,$$

so ist es selbstverständlich, dass zwischen den Lösungen beider eine algebraische Beziehung besteht; sei die zwischen den Lösungen y_1 und Y_1 bestehende algebraische Beziehung, welche in Y_1 mit Adjunction von x und y_1 als irreductibel vorausgesetzt wird,

$$(13.) \qquad Y_1^\varrho + g_1(x, y_1) Y_1^{\varrho-1} + \cdots + g_{\varrho-1}(x, y_1) Y_1 + g_\varrho(x, y_1) = 0,$$

so ist einerseits unmittelbar einzusehen, dass alle Lösungen der Gleichung

$$(14.) \qquad Y^\varrho + g_1(x, y_1) Y^{\varrho-1} + \cdots + g_{\varrho-1}(x, y_1) Y + g_\varrho(x, y_1) = 0$$

ebenfalls Wurzeln der Gleichung (12.) sein müssen, da, wenn man die Gleichung (12.) in ihre mit Adjunction von x und y_1 irreductibeln Factoren zerlegt,

derjenige Factor, welcher die Lösung Y_1 hat, sich von (13.) nicht unterscheiden kann, weil nach dem oben ausgesprochenen Satze eine algebraische Function stets nur *einer* irreductibeln Gleichung angehört *), andererseits wird aber auch, wenn in (14.) y_1 durch irgend eine andere Lösung y_δ der Gleichung (11.) ersetzt wird, die Gleichung

$$(15.) \qquad Y^\varrho + g_1(x, y_\delta) Y^{\varrho-1} + \cdots + g_{\varrho-1}(x, y_\delta) Y + g_\varrho(x, y_\delta) = 0$$

immer wieder zu einer ihrer Lösungen, also auch, wie eben gezeigt worden, zu allen ihren Lösungen nur Wurzeln der Gleichung (12.) haben, weil eine algebraische Beziehung zwischen Lösungen zweier algebraischen Gleichungen, von denen mindestens eine irreductibel ist, erhalten bleibt, wenn man statt der Lösung der irreductibeln Gleichung eine willkürliche andere Lösung derselben und für die Lösung der zweiten Gleichung eine passende Lösung substituirt — wie man wieder leicht erkennt, wenn man x solche geschlossenen Umläufe machen lässt, dass y_1 in y_δ übergeht. Stellen wir nun die Gleichung (11.) mit der Gleichung

$$(16.) \qquad Y^\varrho + g_1(x, y) Y^{\varrho-1} + \cdots + g_{\varrho-1}(x, y) Y + g_\varrho(x, y) = 0$$

zusammen und eliminiren die Grösse y aus diesen beiden Gleichungen, so lautet das Eliminationsresultat

$$(17.) \qquad \begin{cases} \prod_1^m{}_\delta (Y^\varrho + g_1(x, y_\delta) Y^{\varrho-1} + \cdots + g_\varrho(x, y_\delta)) \\ \quad = Y^{\varrho m} + G_1(x) Y^{\varrho m-1} + \cdots + G_{\varrho m}(x) = 0, \end{cases}$$

worin $G_1(x), \ldots G_{\varrho m}(x)$ rationale Functionen von x bedeuten, und, wie oben gezeigt worden, sämmtliche ϱm Lösungen den Lösungen der Gleichung (12.) angehören werden; da nun aber die Gleichung (12.) eine irreductible war, so wird $\varrho m \geqq \mu$ sein müssen, und da sie ferner mit (17.) alle ihre Lösungen gemein hat, so wird der Quotient wieder ein Polynom mit rationalen Coefficienten sein, der wieder nur Lösungen der Gleichung (12.) zu Wurzeln haben darf, und es führt die Fortsetzung dieser Operation zu dem Schlusse, dass ϱm ein ganzes Vielfaches von μ, also

$$(18.) \qquad \varrho m = t\mu$$

*) Man kann es auch daraus schliessen, dass die Lösungen von (14.) durch die Umläufe von x erhalten werden, welche y_1 in den ursprünglichen Werth zurückführen, während die Lösungen von (12.) allen geschlossenen Umläufen des x entsprechen, oder auch daraus, dass, wenn eine irreductible Gleichung eine Lösung mit einer anderen gleichartigen gemein hat, sie alle ihre Lösungen mit jener gemeinsam haben muss.

sein muss, worin t eine ganze Zahl bedeutet, und das Polynom (17.) die t^{te} Potenz des Polynomes (12.) darstellt.

Werde nun jetzt die Beziehung

$$(19.) \quad Y_1^{\varrho}+g_1(x,\ y)Y_1^{\varrho-1}+\cdots+g_{\varrho-1}(x,\ y)Y_1+g_{\varrho}(x,\ y) = 0$$

nach Potenzen von y geordnet, und der mit Adjunction von x und Y_1 irreductible Factor, welcher y_1 zur Lösung hat, als Gleichung in der Form abgesondert

$$(20.) \quad y^{\sigma}+h_1(x,\ Y_1)y^{\sigma-1}+\cdots+h_{\sigma-1}(x,\ Y_1)y+h_{\sigma}(x,\ Y_1) = 0,$$

so wird genau wie oben durch Zusammenstellung der Gleichungen (12.) und (20.) sich die Beziehung ergeben

$$(21.) \quad \sigma\mu = \tau m,$$

worin τ wiederum eine ganze Zahl ist.

Soll nun die Elimination von y zwischen den Gleichungen (11.) und (16.) wieder eine Gleichung m^{ten} Grades in Y liefern, so muss $\varrho m = m$, also $\varrho = 1$ sein, d. h. Y sich rational durch y ausdrücken lassen, und soll diese Gleichung ferner eine irreductible, also $m = \mu$ sein, so muss offenbar auch y rational durch Y ausgedrückt werden können; denn wäre $\sigma > 1$, so würden einem Y mehrere verschiedene y entsprechen, oder verschiedenen y gleiche Y zugehören, d. h. es würde die Gleichung (17.) — für $\varrho = 1$ — gleiche Lösungen enthalten, also nicht, wie verlangt worden, irreductibel sein; damit also die durch Einführung einer neuen Variabeln Y vermöge der Gleichung (16.) transformirte Gleichung in Y eine irreductible Gleichung vom Grade m ist, müssen die Variabeln der beiden Gleichungen sich gegenseitig rational durch einander ausdrücken lassen — aber auch umgekehrt, wenn sie sich gegenseitig rational durch einander ausdrücken lassen, also $\varrho = \sigma = 1$ ist, wird nach (18.) und (21.) $m = t\mu$ und $\mu = \tau m$, d. h. $\mu = m$ sein, d. h. die beiden die Grössen y und Y definirenden irreductibeln Gleichungen sind von demselben Grade, und wir erhalten somit den Satz, ***dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die durch Einführung einer neuen Variabeln durch algebraische Verbindung mit der früheren Variabeln aus einer irreductibeln algebraischen Gleichung hergeleitete Transformationsgleichung wiederum eine irreductible Gleichung desselben Grades sei, die ist, dass die Variabeln sich gegenseitig durch einander rational ausdrücken lassen.***

Bekanntlich beruht auf diesem Satze die Eintheilung der algebraischen Functionen in Klassen nach ihrem Geschlechte, indem alle diese algebraischen Functionen dasselbe Geschlecht besitzen.

Seien nun zwei irreductible algebraische Differentialgleichungen

$$(22.)\quad \begin{cases} \left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^{\varkappa} + f_1\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \dots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^{\varkappa-1} + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + f_m\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \dots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right) = 0 \end{cases}$$

und

$$(23.)\quad \begin{cases} \left(\frac{d^\mu Y}{dx^\mu}\right)^{\lambda} + F_1\left(x,\ Y,\ \frac{dY}{dx},\ \dots\ \frac{d^{\mu-1}Y}{dx^{\mu-1}}\right)\left(\frac{d^\mu Y}{dx^\mu}\right)^{\lambda-1} + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + F_\mu\left(x,\ Y,\ \frac{dY}{dx},\ \dots\ \frac{d^{\mu-1}Y}{dx^{\mu-1}}\right) = 0 \end{cases}$$

gegeben, und bestehe zwischen zwei particulären Integralen derselben y_1 und Y_1 eine algebraische Differentialrelation:

$$(24.)\quad \Phi\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \frac{d^2y_1}{dx^2},\ \dots\ \frac{d^m y_1}{dx^m},\ Y_1,\ \frac{dY_1}{dx},\ \dots\ \frac{d^\varrho Y_1}{dx^\varrho}\right) = 0,$$

von der wir gleich voraussetzen wollen, dass sie mit Adjunction von x, des Integrales y_1 und von dessen Ableitungen bis zu der m^{ten} Ordnung und höchstens dem $(\varkappa-1)^{\text{ten}}$ Grade — die Ableitungen höherer Ordnung und höheren Grades sind an sich vermöge der Differentialgleichung (22.) durch die niedrigerer Ordnung und niedrigeren Grades rational ausdrückbar — eine irreductible Differentialgleichung für das Integral Y_1 der Gleichung (23.) sei. Dann ist unmittelbar einzusehen, dass alle Integrale der Differentialgleichung

$$(25.)\quad \Phi\left(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \dots\ \frac{d^m y_1}{dx^m},\ Y,\ \frac{dY}{dx},\ \dots\ \frac{d^\varrho Y}{dx^\varrho}\right) = 0$$

unter den Integralen der Gleichung (23.) enthalten sein werden*), weil, wie oben gezeigt worden, wenn eine irreductible Differentialgleichung mit einer anderen gleichartigen ein Integral gemein hat, alle ihre Integrale jener Differentialgleichung genügen müssen — und um dies zu schliessen, ist nicht einmal nothwendig, die Irreductibilität der Differentialgleichung (24.) mit Adjunction von y_1 und dessen Ableitungen vorauszusetzen, sondern nur anzunehmen, dass Y_1 nicht das Integral einer gleichartigen Differentialgleichung von niederer Ordnung oder von derselben Ordnung und niederem Grade sei. Ferner wird aber auch, wenn in (25.) y_1 durch irgend ein anderes Integral y_ϑ der Differentialgleichung (22.) ersetzt wird, die Diffe-

*) Da die Differentialgleichung (24.) mit Adjunction von x, y_1 und dessen Ableitungen irreductibel sein sollte, so ist klar, dass entweder, wenn $\varrho = \mu$ ist, die höchste Potenz des μ^{ten} Differentialquotienten in der Gleichung (24.) $\leqq \lambda$, oder dass $\varrho < \mu$ sein muss, da (23.) selbst schon ohne Adjunction jener Grössen irreductibel sein sollte.

rentialgleichung

$$(26.) \quad \Phi\left(x,\ y_\delta,\ \frac{dy_\delta}{dx},\ \cdots\ \frac{d^m y_\delta}{dx^m},\ Y,\ \frac{dY}{dx},\ \cdots\ \frac{d^\varrho Y}{dx^\varrho}\right) = 0$$

immer wieder zu einem ihrer Integrale, also auch, wie eben gezeigt wurde, zu allen ihren Integralen nur Lösungen der Differentialgleichung (23.) haben, weil nach dem Satze *) von der Erhaltung der algebraischen Beziehung die Gleichung (24.) bestehen bleibt, wenn man für die Lösung y_1 der irreductibeln Differentialgleichung (22.) eine willkürliche andere setzt, vorausgesetzt, dass für das Integral Y_1 der Differentialgleichung (23.) ein passendes anderes Integral substituirt wird**).

Stellen wir nun die Differentialgleichung (22.) mit der Gleichung

$$(27.) \quad \Phi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^m y}{dx^m},\ Y,\ \frac{dY}{dx},\ \cdots\ \frac{d^\varrho Y}{dx^\varrho}\right) = 0$$

zusammen, und eliminiren die Grösse y zwischen diesen beiden Differentialgleichungen, so können wir uns aus der Gleichung (22.) die Werthe von $\frac{d^m y}{dx^m}$ in der Form dargestellt denken

$$(28.) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = \varphi_1\left(x,\ y,\ \cdots\ \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right),\quad \cdots\quad \frac{d^m y}{dx^m} = \varphi_\varkappa\left(x,\ y,\ \cdots\ \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right);$$

setzt man diese Werthe in (27.) ein und bildet das Product der so entstehenden Ausdrücke, so erhält man

$$(29.) \quad \prod_1^\varkappa{}_\varepsilon \Phi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}},\ \varphi_\varepsilon,\ Y,\ \frac{dY}{dx},\ \cdots\ \frac{d^\varrho Y}{dx^\varrho}\right) = 0,$$

oder mit Hülfe der Gleichung (22.)

$$(30.) \quad \Psi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}},\ Y,\ \frac{dY}{dx},\ \cdots\ \frac{d^\varrho Y}{dx^\varrho}\right) = 0,$$

worin Ψ eine rationale Function der in ihr enthaltenen Grössen bedeutet, und wofür aus der Productform (29.) und dem oben bewiesenen Satze folgt, dass, wenn y irgend eine Lösung der Differentialgleichung (22.) bedeutet, sämmtliche Y, welche der Gleichung (30.) genügen, den Integralen der Differentialgleichung (23.) angehören müssen***). Differentiirt man die

*) s. S. 40 meiner „Allg. Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen".

**) Es mag auch hier bemerkt werden, dass zur Gültigkeit dieses Satzes nicht die Irreductibilität von (22.) vorausgesetzt zu werden braucht, sondern nur angenommen werden muss, dass y_1 nicht schon einer gleichartigen Differentialgleichung von niedrigerer Ordnung als der m^{ten} oder der m^{ten} Ordnung und niedrigerem Grade als dem $\varkappa^{\text{ten}}$ genügt.

***) Ich möchte an dieser Stelle darauf aufmerksam machen, dass der von mir aufgestellte Satz von der Erhaltung der algebraischen Beziehung zwischen Integralen

Gleichung (30.), setzt wiederum die durch die Gleichungen (28.) definirten Werthe der m^{ten} Ableitung in das Resultat der Differentiation ein und multiplicirt die sich so ergebenden Ausdrücke, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$(31.) \qquad \Psi_1\Big(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},\ Y,\ \frac{dY}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{\varrho+1}Y}{dx^{\varrho+1}}\Big) = 0,$$

in der Ψ_1 wiederum eine rationale Function bedeutet, und welche für jedes y der Gleichung (22.), wie die Gleichung (30.), von den Y der Gleichung (23.) befriedigt wird; differentiirt man noch einmal nach x, so ergiebt sich

$$(32.) \qquad \Psi_2\Big(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},\ Y,\ \frac{dY}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{\varrho+2}Y}{dx^{\varrho+2}}\Big) = 0,$$

und setzt man die Differentiation m-mal nach einander fort, bis man

$$(33.) \qquad \Psi_m\Big(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},\ Y,\ \frac{dY}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{\varrho+m}Y}{dx^{\varrho+m}}\Big) = 0$$

---

von Differentialgleichungen und deren Differentialquotienten für den Fall zweier irreductibler Differentialgleichungen, wie aus der obigen Deduction einleuchtet, noch einen wesentlichen Zusatz gestattet, in der Art, dass, wenn zwischen den Integralen y_1 und Y_1 zweier Differentialgleichungen

$$(\alpha.) \qquad \begin{cases} \Big(\frac{d^m y}{dx^m}\Big)^\varkappa + f_1\Big(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\Big)\Big(\frac{d^m y}{dx^m}\Big)^{\varkappa-1} + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + f_\varkappa\Big(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\Big) = 0, \end{cases}$$

und

$$(\beta.) \qquad \begin{cases} \Big(\frac{d^\mu Y}{dx^\mu}\Big)^\lambda + F_1\Big(x,\ Y,\ \frac{dY}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{\mu-1}Y}{dx^{\mu-1}}\Big)\Big(\frac{d^\mu Y}{dx^\mu}\Big)^{\lambda-1} + \cdots \\ \qquad\qquad \cdots + F_\lambda\Big(x,\ Y,\ \frac{dY}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{\mu-1}Y}{dx^{\mu-1}}\Big) = 0, \end{cases}$$

die entweder als irreductibel vorausgesetzt werden, oder von deren Integralen y_1 und Y_1 angenommen wird, dass sie nicht schon Differentialgleichungen niederer Ordnung oder von derselben Ordnung und niederem Grade genügen, eine algebraische Beziehung von der Form

$$(\gamma.) \qquad \Phi\Big(x,\ y_1,\ \frac{dy_1}{dx},\ \cdots\ \frac{d^\nu y_1}{dx^\nu},\ Y_1,\ \frac{dY_1}{dx},\ \cdots\ \frac{d^\varrho Y_1}{dx^\varrho}\Big) = 0$$

stattfindet, diese nicht nur erhalten bleibt, wenn man statt y_1 irgend ein anderes Integral der Differentialgleichung ($\alpha.$) und für Y_1 ein passendes Integral der Differentialgleichung ($\beta.$) substituirt, sondern dass auch für ein willkürlich gewähltes Integral y_δ der Gleichung ($\alpha.$) die Differentialgleichung

$$(\delta.) \qquad \Phi\Big(x,\ y_\delta,\ \frac{dy_\delta}{dx},\ \cdots\ \frac{d^\nu y_\delta}{dx^\nu},\ Y,\ \frac{dY}{dx},\ \cdots\ \frac{d^\varrho Y}{dx^\varrho}\Big) = 0$$

in Y nur Integrale besitzt, welche der Differentialgleichung ($\beta.$) angehören, wenn vorausgesetzt wird, dass die Beziehung ($\gamma.$) eine mit Adjunction der Grössen y_1, $\frac{dy_1}{dx}$, ... irreductible Differentialgleichung darstellt.

erhält, so werden für jedes y, welches ein Integral der Differentialgleichung (22.) ist, alle Gleichungen (30.), (31.), ... (33.) nur für solche gemeinsamen Y bestehen können, welche Lösungen der Differentialgleichung (23.) sind, da nur (30.) für solche besteht und die folgenden Gleichungen aus (30.) durch Differentiation abgeleitet sind. Eliminirt man aus diesen $m+1$ Gleichungen die Grössen

$$y, \quad \frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \cdots \quad \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},$$

so erhält man als Eliminationsresultat eine Differentialgleichung $(m+\varrho)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(34.) \qquad \Omega\left(x, Y, \frac{dY}{dx}, \cdots \frac{d^{\varrho+m}Y}{dx^{\varrho+m}}\right) = 0,$$

als nothwendige und hinreichende Bedingung für das Zusammenbestehen dieser Differentialgleichungen; es ist nun einerseits aus dem Früheren zu ersehen, dass sämmtliche Lösungen der Gleichungen (23.) auch Integrale der Gleichung (34.) sein werden; andererseits folgt aber, dass die Werthe der Unbekannten $y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, wenn sie sich überhaupt als algebraisch bestimmte Werthe ergeben, in der Form darstellen

$$\begin{aligned} y &= \omega_0\left(x, Y, \frac{dY}{dx}, \cdots \frac{d^{\varrho+m}Y}{dx^{\varrho+m}}\right), \\ \frac{dy}{dx} &= \omega_1\left(x, Y, \frac{dY}{dx}, \cdots \frac{d^{\varrho+m}Y}{dx^{\varrho+m}}\right), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

worin $\omega_0, \omega_1, \ldots$ algebraische Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen bezeichnen, und dass, weil für $y = y_1$

$$\omega_1\left(x, Y_1, \frac{dY_1}{dx}, \cdots \frac{d^{\varrho+m}Y_1}{dx^{\varrho+m}}\right) = \frac{d}{dx}\omega_0\left(x, Y_1, \frac{dY_1}{dx}, \cdots \frac{d^{\varrho+m}Y_1}{dx^{\varrho+m}}\right)$$

ist, diese Differentialgleichung aber mit der irreductibeln Differentialgleichung (23.) alle Integrale dieser gemein haben muss, die auf algebraischem Wege berechneten Unbekannten, wenigstens für alle Y, welche der Differentialgleichung (23.) genügen, auch in der entsprechenden Differentialrelation stehen werden, vorausgesetzt, dass die Differentialgleichungen (30.), ... (33.) überhaupt von einander unabhängig waren, und sich nicht bloss eine algebraische Beziehung zwischen $y, \frac{dy}{dx}, \ldots$ mit Hülfe der bekannten Grössen $Y, \frac{dY}{dx}, \ldots$ ergiebt. Jedenfalls wird, weil (23.) eine irreductible Diffe-

rentialgleichung war, die Ordnung $\varrho + m$ der Differentialgleichung (34.) der Zahl μ gleich sein oder sie überschreiten müssen, und wir erhalten daher

$$(35.) \qquad \varrho + m = \mu + t,$$

worin $t \geqq 0$ ist.

Fasst man die Gleichung (27.)

$$(36.) \qquad \Phi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \ldots\ \frac{d^m y}{dx^m},\ Y_1,\ \frac{dY_1}{dx},\ \ldots\ \frac{d^\varrho Y_1}{dx^\varrho}\right) = 0$$

als eine Differentialgleichung in y auf, und sei die mit Adjunction von x, Y_1 und deren Differentialquotienten bis zur μ^{ten} Ordnung hin irreductible Differentialgleichung, welche das Integral y_1 besitzt,

$$(37.) \qquad \mathfrak{F}\left(x,\ Y_1,\ \frac{dY_1}{dx},\ \ldots\ \frac{d^\mu Y_1}{dx^\mu},\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \ldots\ \frac{d^\sigma y}{dx^\sigma}\right) = 0,$$

so folgert man genau wie oben

$$(38.) \qquad \sigma + \mu = m + \tau,$$

worin auch $\tau \geqq 0$ ist.

Soll nun die Elimination von y zwischen (22.) und (27.) im Allgemeinen wieder eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung liefern, so muss $\varrho + m = m$ oder $\varrho = 0$ sein, d. h. Y sich algebraisch durch y und dessen Differentialquotienten ausdrücken lassen, und soll diese Differentialgleichung zugleich die Ordnung jener irreductibeln haben, d. h. $m = \mu$ sein, so muss, wie jetzt gezeigt werden soll, auch $\sigma = 0$, d. h. auch y algebraisch durch Y und dessen Ableitungen ausdrückbar sein; denn angenommen in der Differentialgleichung (37.) wäre $\sigma > 0$, so würden den Y, welche Integrale des Eliminationsresultates (34.) von der m^{ten} Ordnung sind und somit, da dies zugleich die Ordnung der irreductibeln Y-Gleichung (23.) sein sollte, m willkürliche Constanten enthalten, y-Werthe entsprechen, welche für jedes Y durch eine Differentialgleichung (37.) in y definirt sind, oder es würden durch willkürliche Constanten verschiedenen y gleiche Y-Werthe zugehören; da aber Y wegen $\varrho = 0$ bis auf algebraische Vieldeutigkeiten durch y und dessen Ableitungen bestimmt ist, y aber ebenso wie Y vermöge der sie definirenden irreductibeln Differentialgleichungen m willkürliche Constanten in Wirklichkeit enthalten, so ist dies unmöglich, und so wird daher $\sigma = 0$ sein müssen. Umgekehrt folgt aber sofort aus den Gleichungen (35.) und (38.), dass, wenn $\varrho = 0$ und $\sigma = 0$ ist, auch $\mu = m$ sein muss, weil t und τ positive oder verschwindende Grössen sein mussten, und wir erhalten somit den Satz, *dass die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die*

durch Einführung einer neuen abhängigen Variabeln mit Hülfe algebraischer Verbindungen dieser und deren Ableitungen mit der früheren abhängigen Variabeln und deren Differentialquotienten aus einer irreductibeln Differentialgleichung hergeleitete transformirte Differentialgleichung mit der ursprünglichen von gleicher Ordnung sei, und zwar die Ordnung derjenigen irreductibeln Differentialgleichung besitze, welche die neue Variable eindeutig definirt, die ist, dass sich die abhängigen Variabeln gegenseitig durch die resp. andere und deren Ableitungen algebraisch ausdrücken lassen.

Wir wollen nun aber die Bedingungen aufsuchen, unter denen das Eliminationsresultat nicht bloss der Ordnung nach mit der gegebenen Differentialgleichung (22.) und zugleich mit der irreductibeln Differentialgleichung (23.) übereinstimmt, sondern auch in dem Grade des höchsten Differentialquotienten mit der entsprechenden Grösse dieser beiden Differentialgleichungen übereinkommt, also selbst die irreductible Gleichung vorstellt, welche Y definirt; es ist somit nicht bloss $\mu = m$, sondern auch $\lambda = \varkappa$ vorauszusetzen. Stellen wir also mit der Gleichung (22.) die in Bezug auf Y irreductible Beziehung

$$(39.) \qquad \Phi\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \ldots\ \frac{d^m y}{dx^m},\ Y\right) = 0\ ^*),$$

---

*) Es ist vielleicht nicht überflüssig, in Betreff einer algebraischen Beziehung zwischen zwei particulären Integralen y_1 und Y_1 der irreductibeln Differentialgleichungen (22.) und (23.) das Folgende zu bemerken. Sei diese Beziehung

$$(\alpha.) \qquad F(x,\ y_1,\ Y_1) = 0 \quad \text{oder} \quad y_1 = \varphi(x,\ Y_1),$$

worin F eine rationale, φ eine algebraische Function bedeutet, so mache man auf die Differentialgleichung (23.) für die abhängige Variable die Substitution

$$(\beta.) \qquad t = \varphi(x,\ Y),$$

leite aus dieser durch Differentiation μ Gleichungen in den μ ersten Differentialquotienten von t und Y her und eliminire endlich die $\mu+1$ Grössen

$$Y,\ \frac{dY}{dx},\ \ldots\ \frac{d^\mu Y}{dx^\mu}$$

aus den so entstehenden $\mu+1$ Gleichungen und der Differentialgleichung (23.); es ergiebt sich dann eine Differentialgleichung μ^{ter} Ordnung in t von der Form

$$(\gamma.) \qquad \begin{cases} \left(\frac{d^\mu t}{dx^\mu}\right)^\varrho + \Phi_1\left(x,\ t,\ \frac{dt}{dx},\ \ldots\ \frac{d^{\mu-1}t}{dx^{\mu-1}}\right)\left(\frac{d^\mu t}{dx^\mu}\right)^{\varrho-1} + \cdots \\ \qquad \cdots + \Phi_\varrho\left(x,\ t,\ \frac{dt}{dx},\ \ldots\ \frac{d^{\mu-1}t}{dx^{\mu-1}}\right) = 0, \end{cases}$$

und es ist ersichtlich, dass, wenn

$$t_1 = \varphi(x,\ Y_1)$$

gesetzt wird, vermöge $(\alpha.)$ und $(\beta.)$ $t_1 = y_1$ sein wird, d. h. die Differentialgleichungen (22.) und $(\gamma.)$ ein gemeinsames particuläres Integral besitzen werden. Da aber eine irreductible Differentialgleichung (22.) mit einer gleichartigen Differentialgleichung nur

welche in Y vom r^{ten} Grade sei, zusammen, und setzen wieder für $\frac{d^m y}{dx^m}$ in die letztere Gleichung die durch die Gleichungen (28.) gegebenen Werthe, bilden endlich das Product über die Indices der φ-Functionen genommen von 1 bis $\varkappa$, so erhält man

$$(40.)\quad \left\{\begin{aligned} &\prod_1^{\varkappa}{}_{\varrho}\, \Phi\Big(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},\ \varphi_\varrho,\ Y\Big) \\ &= Y^{r\varkappa} + \mathfrak{F}_1\Big(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\Big) Y^{r\varkappa-1} + \cdots \\ &\qquad \cdots + \mathfrak{F}_{r\varkappa}\Big(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\Big) = 0, \end{aligned}\right.$$

worin die Functionen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots \mathfrak{F}_{r\varkappa}$ rational aus den in ihnen enthaltenen Grössen zusammengesetzt sind; differentiirt man die Gleichung (40.), so ergiebt sich $\frac{dY}{dx}$ als rationale Function von $x, y, \frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}, \frac{d^m y}{dx^m}$ und Y, und eliminirt man $\frac{d^m y}{dx^m}$ mit Hülfe der Gleichungen (28.) und Y mit Hülfe von (40.), so folgt, dass $\frac{dY}{dx}$ einer algebraischen Function vom $(r\varkappa^2)^{\text{ten}}$ Grade von der Form genügt

$$(41.)\quad \left\{\begin{aligned} &\Big(\frac{dY}{dx}\Big)^{r\varkappa^2} + \mathfrak{F}_1^{(1)}\Big(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\Big)\Big(\frac{dY}{dx}\Big)^{r\varkappa^2-1} + \cdots \\ &\qquad \cdots + \mathfrak{F}_{r\varkappa^2}^{(1)}\Big(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\Big) = 0; \end{aligned}\right.$$

fährt man fort zu differentiiren, so kommt man schliesslich zu einer Gleichung der Form

$$(42.)\quad \left\{\begin{aligned} &\Big(\frac{d^m Y}{dx^m}\Big)^{r\varkappa^{m+1}} + \mathfrak{F}_1^{(m)}\Big(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\Big)\Big(\frac{d^m Y}{dx^m}\Big)^{r\varkappa^{m+1}-1} + \cdots \\ &\qquad \cdots \mathfrak{F}_{r\varkappa^{m+1}}^{(m)}\Big(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\Big) = 0, \end{aligned}\right.$$

und es sind nun aus den Gleichungen (40.), ... (42.) die Grössen y, $\frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ zu eliminiren. Hieraus folgt unmittelbar, dass, wenn $\frac{d^m Y}{dx^m}$,

---

dann ein Integral gemein haben kann, wenn sie von niedrigerer Ordnung ist als diese, oder wenn von derselben Ordnung, dann von niedrigerem Grade, so erhalten wir den folgenden, häufig anwendbaren Satz, der auch noch bestehen bleibt, wenn in die algebraische Beziehung (α.) die Ableitungen von Y_1 eintreten:

Das Integral einer irreductibeln Differentialgleichung kann nie mit dem Integral einer anderen gleichartigen Differentialgleichung von niederer Ordnung in algebraischer Beziehung stehen.

wie verlangt worden, höchstens zur $\varkappa^{\text{ten}}$ Potenz vorkommen soll,

$$r\varkappa^{m+1} = \varkappa, \quad \text{d. h.} \quad r\varkappa^m = 1,$$

also $r = 1$ und $\varkappa = 1$ sein muss. Stellt man aber die nunmehr sich ergebenden Gleichungen zusammen:

$$(43.) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y = \mathfrak{F}_1\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right), \\ \frac{dY}{dx} = \mathfrak{F}_1^{(1)}\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}} = \mathfrak{F}_1^{(m-1)}\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right), \end{array} \right.$$

$$(44.) \quad \frac{d^mY}{dx^m} = \mathfrak{F}_1^{(m)}\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right),$$

und eliminirt die Grössen $y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, so ist unmittelbar ersichtlich, dass im Allgemeinen nur, wenn die einzelnen Functionen

$$\mathfrak{F}_1,\quad \mathfrak{F}_1^{(1)},\quad \ldots\quad \mathfrak{F}_1^{(m-1)}$$

lineare Functionen der in ihnen enthaltenen Grössen sind, die Werthe y, $\frac{dy}{dx}, \cdots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ sich aus den m Gleichungen (43.) linear durch $Y,\ \frac{dY}{dx}, \cdots \frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}}$ ausdrücken lassen und somit in (44.) eingesetzt eine algebraische Differentialgleichung in Y von der m^{ten} Ordnung und im höchsten Differentialquotienten vom $(\varkappa = 1)^{\text{ten}}$ Grade liefern, wie es verlangt wurde.

Andererseits sieht man aber auch, dass, wenn

$$Y = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)\frac{dy}{dx} + \cdots + f_m(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

ist, sich durch Differentiation

$$\frac{dY}{dx} = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)y + \varphi_2(x)\frac{dy}{dx} + \cdots + \varphi_m(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + f_m(x)\frac{d^my}{dx^m}$$

ergiebt, und dass somit, da für $\varkappa = 1$

$$\frac{d^my}{dx^m} = f_1\left(x,\ y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)$$

folgt, worin f_1 eine rationale Function bedeutet, $\frac{dY}{dx}$ nur dann im Allgemeinen eine lineare Function, wie es sein musste, von $y,\ \frac{dy}{dx},\ \cdots\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ wird sein können, wenn f_1 selbst eine solche Function darstellt, oder wenn die Differentialgleichung (22.) eine lineare ist. Umgekehrt folgt aber auch

unmittelbar, dass, wenn man die Differentialgleichung

$$(45.) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + F_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + F_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + F_m(x)y = F(x)$$

mit dem Differentialausdrucke

$$(46.) \quad Y = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)\frac{dy}{dx} + \cdots + f_m(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$$

zusammenstellt, wie man durch successive Differentiation von (46.) erkennt, durch Elimination der Grössen y, $\frac{dy}{dx}$, $\cdots$ $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ mit Benutzung der Gleichung (45.) im Allgemeinen eine lineare Differentialgleichung

$$(47.) \quad \frac{d^m Y}{dx^m} + \psi_1(x)\frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}} + \cdots + \psi_{m-1}(x)\frac{dY}{dx} + \psi_m(x)Y = \psi(x)$$

hervorgeht, welche also die Ordnung und den Grad mit der vorgelegten Differentialgleichung (45.) gemein hat; und man sieht weiter leicht ein, dass die Gleichung (47.) eine irreductible sein muss, wenn $\sigma = 0$, d. h. y sich als algebraische, somit als rationale lineare Function von Y, $\frac{dY}{dx}$, $\cdots$ $\frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}}$ in der Form

$$(48.) \quad y = \chi_0(x) + \chi_1(x)Y + \chi_2(x)\frac{dY}{dx} + \cdots + \chi_m(x)\frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}}$$

ergiebt, da man aus dieser Gleichung durch Differentiation die Gleichungen

$$(49.) \quad \frac{dy}{dx} = \chi_0^{(1)}(x) + \chi_1^{(1)}(x)Y + \chi_2^{(1)}(x)\frac{dY}{dx} + \cdots + \chi_m^{(1)}(x)\frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}},$$

$$(50.) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \chi_0^{(2)}(x) + \chi_1^{(2)}(x)Y + \chi_2^{(2)}(x)\frac{dY}{dx} + \cdots + \chi_m^{(2)}(x)\frac{d^{m-1}Y}{dx^{m-1}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ableiten kann, und wenn (47.) nicht irreductibel wäre, sondern die das Integral Y definirende irreductible Differentialgleichung

$$(51.) \quad P\left(x, Y, \frac{dY}{dx}, \cdots \frac{d^{m-\alpha}Y}{dx^{m-\alpha}}\right) = 0^*)$$

---

*) Es mag hier noch bemerkt werden, dass aus der Natur der hier vorausgesetzten Beziehung (46.) leicht geschlossen werden kann, ob die Differentialgleichung (51.) auch eine lineare ist; denn, da das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung (45.), wenn ein System von Fundamentalintegralen der reducirten Differentialgleichung

$$(\alpha.) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + F_1(x)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + F_{m-1}(x)\frac{dy}{dx} + F_m(x)y = 0$$

mit $y_1, y_2, \ldots y_m$ bezeichnet wird, in der Form

$$(\beta.) \quad y = \eta + c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m$$

lautete, aus derselben $\frac{d^{m-\alpha}Y}{dx^{m-\alpha}}$ und die höheren Differentialquotienten von Y durch die niedrigeren algebraisch ausdrückbar wären, und daher schon im Allgemeinen $m-\alpha$ Gleichungen (48.), (49.), (50.), ... genügten, um

$$Y, \quad \frac{dY}{dx}, \quad \ldots \quad \frac{d^{m-\alpha-1}Y}{dx^{m-\alpha-1}}$$

zu eliminiren; es würde sich aber dann eine Differentialgleichung $(m-\alpha)^{\text{ter}}$ Ordnung ergeben, welche mit der als irreductibel vorausgesetzten Differentialgleichung (45.) gleichartig wäre, was nicht möglich ist; also muss die Gleichung (47.) eine irreductible sein. Wir finden somit den folgenden, dem oben für algebraische Functionen bewiesenen analogen Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass im Allgemeinen die durch Einführung einer neuen abhängigen Variabeln vermöge algebraischer Verbindungen dieser und ihrer Ableitungen mit der früheren abhängigen Variabeln und deren Ableitungen aus einer irreductibeln algebraischen Differentialgleichung hergeleitete transformirte Differentialgleichung wiederum eine irreductible Differentialgleichung von derselben Ordnung und demselben Grade in Bezug auf den höchsten Differentialquotienten sei, ist die, dass die ursprüngliche Differentialgleichung eine lineare, und dass die Variabeln sich gegenseitig rational und linear durch die andere Variable und deren Ableitungen ausdrücken lassen.

Man sieht somit, dass jener Satz für algebraische Functionen, auf dem die Gleichheit des Geschlechtes für in einander transformirbare Functionen beruht, für algebraische Differentialgleichungen nur sein Analogon in den

---

darstellbar ist, worin $c_1, c_2, \ldots c_m$ willkürliche Constanten bedeuten, und (46.) gültig bleiben muss, wenn für y irgend ein Integral von (45.) gesetzt wird, vorausgesetzt, dass für Y ein passendes Integral der zugehörigen Differentialgleichung — wir dürfen dafür die irreductible Differentialgleichung, welcher Y genügt, gesetzt denken — substituirt wird, so wird

$$Y = f_0(x)+f_1(x)[\eta+c_1y_1+c_2y_2+\cdots+c_my_m]+\cdots \\ \cdots+f_m(x)[\eta^{(m-1)}+c_1y_1^{(m-1)}+c_2y_2^{(m-1)}+\cdots+c_my_m^{(m-1)}],$$

oder wenn

$$Y_\alpha = f_1(x)y_\alpha+f_2(x)y'_\alpha+\cdots+f_m(x)y_\alpha^{(m-1)}$$

gesetzt wird,

$$Y = \varphi(x)+c_1Y_1+c_2Y_2+\cdots+c_mY_m$$

ein Integral der irreductibeln Y-Gleichung für willkürliche $c_1, c_2, \ldots c_m$ sein, worin die Functionen $Y_1, Y_2, \ldots Y_m$ jedoch nicht homogen linear von einander unabhängige Grössen zu sein brauchen. Dies vorausgesetzt, findet sich die Frage selbst im § 4 meiner „Allg. Untersuchungen etc." erörtert.

linearen Differentialgleichungen findet, und dass zum Bestehen dieses Satzes für diese Gattung von Differentialgleichungen schon diejenige Definition der Irreductibilität ausreicht, welche nur lineare Differentialgleichungen unter einander vergleicht.

Wien, im Januar 1883.

Zusatz.

Es mag hier noch mit Bezug auf die oben erwähnte Zusammenstellung einer unendlichen Potenzreihe mit einer irreductibeln algebraischen Gleichung eine einfache Bemerkung hinzugefügt werden, deren Inhalt der folgende Satz bildet:

Wenn eine in einem bestimmten Kreise convergirende, mit rationalen Coefficienten versehene unendliche Potenzreihe

$$(1.) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

für ein irrationales $x = \alpha$ einen rationalen Werth A annimmt (Null eingeschlossen), und es stehen sämmtliche Werthe von x, welche dieser Reihe den Werth A zuertheilen, in einer solchen Beziehung zu einander, wie dieselbe zwischen Lösungen einer algebraischen irreductibeln Gleichung mit rationalen Coefficienten nicht bestehen kann, so wird der Ausdruck

$$(2.) \quad a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \cdots + a_n \alpha^n$$

von einem bestimmten n an stets irrational sein und nur mit unendlich wachsendem n sich immer mehr und mehr der rationalen Zahl A nähern.

Genügt nämlich α keiner algebraischen Gleichung mit rationalen Coefficienten, so kann überhaupt nicht

$$(3.) \quad a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \cdots + a_n \alpha^n = \eta_n$$

sein, worin η_n eine rationale Zahl bedeutet, und es ist somit der obige Satz nur für den Fall zu beweisen, dass α die Lösung einer algebraischen irreductibeln Gleichung

$$(4.) \quad x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots + p_{m-1} x + p_m = 0$$

mit rationalen Coefficienten ist. Nehmen wir nun an, man könne stets ein hinreichend grosses n angeben von der Beschaffenheit, dass für ein beliebig klein gegebenes rationales δ

$$(5.) \quad a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 + \cdots + a_n \alpha^n = A - \delta,$$

oder dass die mit rationalen Coefficienten versehene Gleichung

$$(6.) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = A - \delta$$

die Lösung $x = \alpha$ besitzt, so wird aus der Irreductibilität der Gleichung (4.) folgen, dass jede Lösung dieser letzteren Gleichung auch der Gleichung (6.) Genüge leistet, wie klein auch das rationale δ und wie gross auch das zugehörige n sein mag, d. h. es werden sämmtliche Wurzeln der Gleichung (4.) denjenigen Werthen von x, welche der Reihe (1.) in ihrem Convergenzbereiche den rationalen Werth A ertheilen, unendlich nahe liegen, oder so nahe gebracht werden können, als man will; mit anderen Worten, sämmtliche Lösungen der Gleichung (4.) gehören zu den Lösungen der Gleichung

$$(7.) \qquad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = A.$$

Wenn daher sämmtliche Lösungen dieser letzten Gleichung (7.) in einer solchen Beziehung zu einander stehen, wie sie zwischen Lösungen einer irreductibeln Gleichung überhaupt nicht existiren kann, so folgt, dass die Reihe (1.), welche für $x = \alpha$ und ein unendlich wachsendes n einem rationalen Werthe A unendlich zustrebt, von einem endlichen n an nur irrationale Werthe wird annehmen können — vorausgesetzt ist dabei selbstverständlich, dass α nicht selbst rational, also die Gleichung (4.) nicht vom ersten Grade ist.

Wissen wir also z. B., dass alle Lösungen der Gleichung (7.), d. h. alle Werthe der Variabeln, welche der unendlichen Potenzreihe den rationalen Werth A ertheilen, durch die eine derselben α in der ganzen linearen Form

$$m_0 + m_1 \alpha$$

ausdrückbar sind, worin m_0 und m_1 rationale Zahlen bedeuten, von denen m_1 nicht die negative Einheit ist, so wird man auf die Gültigkeit des oben ausgesprochenen Satzes schliessen können, weil bekanntlich, wenn zwei Lösungen α und β einer irreductibeln Gleichung in der Beziehung

$$\beta = m_0 + m_1 \alpha$$

stehen, sich m_1 als eine Einheitswurzel ergiebt, welche hier, da die Zahl eine rationale sein soll, nur $+1$ oder -1 sein kann, und andererseits eine Beziehung von der Form

$$\beta = m_0 + \alpha$$

für eine irreductible Gleichung unmöglich ist. So wird also, da die sämmtlichen Nullwerthe der unendlichen Reihe

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

durch

$$0, \quad \pm\pi, \quad \pm 2\pi, \quad \pm 3\pi, \quad \ldots$$

dargestellt werden, den obigen Bedingungen genügt werden, wenn die Annahme, dass π die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl ist, ausgeschlossen wird, und somit, unabhängig von der Kenntniss des allgemeinen Satzes von dem transcendenten Charakter der Zahl π, geschlossen werden können, dass die Reihe

$$\frac{\pi}{1!}-\frac{\pi^3}{3!}+\frac{\pi^5}{5!}-\cdots\pm\frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)!}\mp\cdots$$

von einem bestimmten n ab stets nur irrationale Werthe annehmen und sich so der Null unendlich nähern wird.

Bezüglich der Untersuchung, welcher Art eine rationale Beziehung zwischen zwei Lösungen einer irreductibeln Gleichung überhaupt sein kann, mag bemerkt werden, dass, wenn mit der irreductibeln Gleichung

$$(8.)\qquad x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+\cdots+p_m=0$$

die rationale Beziehung zwischen zwei Lösungen derselben in der Form

$$(9.)\qquad y=r_0+r_1x+r_2x^2+\cdots+r_xx^x$$

zusammengestellt wird, die durch Elimination von x sich ergebende Gleichung m^{ten} Grades

$$(10.)\qquad y^m+P_1y^{m-1}+P_2y^{m-2}+\cdots+P_m=0,$$

weil die Grössen r als rational vorausgesetzt werden, also auch die Grössen P von derselben Beschaffenheit sind, ferner y ebenfalls eine Lösung der Gleichung (8.) ist, welche somit alle ihre Lösungen mit (10.) gemein haben muss, die Gleichung (10.) mit der Gleichung (8.) identisch sein muss; es ergeben sich somit, wenn mit s_0, s_1, s_2, ... die Potenzsummen der Gleichung (8.), mit S_0, S_1, S_2, ... die der Gleichung (10.) bezeichnet werden, die Beziehungen

$$(11.)\qquad S_0=s_0,\quad S_1=s_1,\quad S_2=s_2,\quad \ldots,$$

worin die S in bekannter Weise aus (9.) hervorgehen, indem man diese Beziehung zu den verschiedenen Potenzen erhebt und in jede der so entstehenden Gleichungen alle Lösungen der Gleichung (8.) einsetzt, wobei S_ϱ sich als homogene ganze Function ϱ^{ten} Grades der rationalen Substitutionscoefficienten r_0, r_1, r_2, ... r_x ergiebt; aus den so hervorgehenden Gleichungen (11.) ist zu entscheiden, ob die Coefficienten r_0, r_1, ... r_x sich als rationale Zahlen ergeben können. Nehmen wir z. B. den oben hervorgehobenen Fall der linearen ganzen Transformation

$$(12.)\qquad y=r_0+r_1x,$$

so folgt unmittelbar aus (11.)

$$\begin{aligned} s_1(1-r_1) &= mr_0, \\ s_2(1-r_1)^2(1+r_1) &= mr_0^2(1+r_1), \\ s_3(1-r_1)^3(1+r_1+r_1^2) &= mr_0^3(1+r_1+r_1^2) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

und es ergiebt sich somit, dass entweder einmal

$$1+r_1+r_1^2+\cdots+r_1^\lambda = 0,$$

d. h. r_1 eine Einheitswurzel ist, oder dass, wenn die rationale Zahl

$$\frac{r_0}{1-r_1} = R$$

gesetzt wird,

$$s_1 = mR, \quad s_2 = mR^2, \quad s_3 = mR^3, \quad \ldots$$

ist; da aber die aus (8.) entspringende Gleichung

$$s_m+p_1s_{m-1}+p_2s_{m-2}+\cdots+p_{m-1}s_1+mp_m = 0$$

im letzteren Falle die Beziehung liefern würde

$$R^m+p_1R^{m-1}+\cdots+p_{m-1}R+p_m = 0,$$

also die irreductible Gleichung (8.) eine rationale Lösung R hätte, so bleibt nur die erste Annahme bestehen, dass r_1 eine Einheitswurzel bedeutet und somit, weil diese Grösse eine rationale Zahl sein soll, nur $+1$ oder -1 sein kann; ist nun $r_1 = +1$, so folgt aus $s_1(1-r_1) = mr_0$, dass $r_0 = 0$ sein muss, und es ist somit der oben benutzte Hülfssatz erwiesen, wobei noch bemerkt werden mag, dass die Aufstellung der transformirten Gleichung (10.) mit der Herleitung der iterirten Functionen nach *Abel* übereinkommt.

Wien, Juli 1883.

Ueber Irrationalität von Reihen.

(Von Herrn *Stern* in Göttingen.)

Im 37. Bande dieses Journals p. 95 habe ich gezeigt, dass, wenn z eine positive ganze Zahl bedeutet, die Einheit ausgenommen, und α_1, α_2, α_3, ... eine unendliche Reihe ganzer Zahlen, so beschaffen, dass allgemein die Differenz $\alpha_{m+1}-\alpha_m$ positiv ist und zugleich jede folgende dieser Differenzen grösser als die vorhergehende, alsdann die Reihe

$$\frac{1}{z^{\alpha_1}}+\frac{1}{z^{\alpha_2}}+\frac{1}{z^{\alpha_3}}+\cdots$$

keinen rationalen Werth hat. Diese letzte Bedingung, dass jede folgende Differenz grösser als die vorhergehende ist, kann aber durch die einfachere ersetzt werden, dass die Differenz $\alpha_{m+1}-\alpha_m$ mit wachsendem m jede angebbare endliche Zahl überschreitet, wodurch der Satz eine grössere Anwendbarkeit erhält.

Berücksichtigt man die schon dort angegebene Verallgemeinerung in Beziehung auf die Vorzeichen der einzelnen Glieder der Reihe, so kann man den Satz so aussprechen:

Wenn in der Reihe $\frac{1}{z^{\alpha_1}}\pm\frac{1}{z^{\alpha_2}}\pm\frac{1}{z^{\alpha_3}}\pm\cdots$ unter z eine ganze positive Zahl, die Einheit ausgenommen, verstanden wird, und α_1, α_2, ... eine unendliche Reihe ganzer positiver Zahlen ist, von welcher jede grösser als die ihr unmittelbar vorhergehende ist, zugleich die Differenz $\alpha_{m+1}-\alpha_m$ mit unbegrenzt wachsendem m ebenfalls unbegrenzt wächst, so kann die Reihe keinen rationalen Werth haben, in welcher Ordnung die Vorzeichen der einzelnen Glieder auf einander folgen mögen.

Der Beweis bleibt unverändert derselbe. Hätte die Reihe den Werth $\frac{g}{h}$, wo g und h ganze Zahlen bedeuten, so fände man

$$g z^{\alpha_m} = G+h\Big[\pm\frac{1}{z^{\alpha_{m+1}-\alpha_m}}\pm\frac{1}{z^{\alpha_{m+2}-\alpha_m}}\pm\cdots\Big],$$

wo G eine ganze Zahl ist. Es dürfte also die in Klammern stehende Reihe nicht kleiner als $\frac{1}{h}$ sein, während dieselbe, d. h.

$$\pm\frac{1}{z^{\alpha_{m+1}-\alpha_m}}\left[1\pm\frac{1}{z^{\alpha_{m+2}-\alpha_{m+1}}}\pm\frac{1}{z^{\alpha_{m+3}-\alpha_{m+1}}}\pm\cdots\right]$$

mit wachsendem m unter jeden angebbaren Werth sinkt. Hieraus ergiebt sich z. B. dass die Reihe

$$(1.)\qquad 1-\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^7}+\cdots,$$

welche aus der *Euler*schen Reihe $\Sigma(-1)^m x^{\frac{3m^2\mp m}{2}}$ durch Substitution von $x=\frac{1}{z}$ folgt, keinen rationalen Werth haben kann. Denn hier wird zwar die Differenz zweier unmittelbar auf einander folgenden Glieder der Reihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ nicht fortwährend grösser, aber da diese Differenz entweder $=\frac{3m^2+m}{2}-\frac{3m^2-m}{2}=m$ oder $\frac{3(m+1)^2-(m+1)}{2}-\frac{3m^2+m}{2}=2m+1$ ist, so wächst sie mit m unbegrenzt. Demnach kann auch das gleichgeltende unendliche Product $\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\left(1-\frac{1}{z^3}\right)\cdots$ keinen rationalen Werth haben, wie schon *Eisenstein* im 28. Bande dieses Journals auf einem anderen, weniger elementaren Wege gefunden hat.

In derselben Weise folgt aus der *Jacobi*schen Gleichung *)

$$\Pi[(1+q^{2i+1})(1-q^{2i})] = \Sigma(-1)^{\frac{1}{2}i(i+1)}q^{\frac{3ii+i}{2}},$$

dass die Reihe

$$(2.)\qquad 1+\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^5}\cdots$$

und das Product $\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z^2}\right)\left(1+\frac{1}{z^3}\right)\left(1-\frac{1}{z^4}\right)\cdots$ keinen rationalen Werth haben kann, und dasselbe gilt von der Reihe $1\pm\frac{1}{z}\pm\frac{1}{z^2}\pm\frac{1}{z^5}\cdots$ bei beliebiger Zeichenfolge.

Aus derselben Betrachtung folgt, wenn die Buchstaben z, α_m u. s. w. die frühere Bedeutung behalten, dass die Reihe

$$b_0\pm\frac{b_1}{z^{\alpha_1}}\pm\frac{b_2}{z^{\alpha_2}}\pm\cdots\pm\frac{b_m}{z^{\alpha_m}}\pm\frac{b_{m+1}}{z^{\alpha_{m+1}}}\pm\cdots$$

keinen rationalen Werth hat, wenn $b_0, b_1, \ldots$ ganze Zahlen bedeuten, die

*) Bd. 37 p. 69 dieses Journals.

so beschaffen sind, dass von einem bestimmten m an, $\frac{b_{m+1}}{z^{\alpha_{m+1}-\alpha_m}} \leqq \frac{1}{z^{\varphi(m)}}$ ist, wo $\varphi(m)$ eine mit m unbegrenzt wachsende positive Zahl bedeutet, und zugleich $\frac{b_{m+k}}{z^{\alpha_{m+k}-\alpha_m}} \leqq \frac{1}{z^{\varphi(m)+(k-1)c}}$ ist, wo c eine bestimmte positive Zahl ist. Denn in diesem Falle hätte man, wenn wieder $\frac{g}{h}$ den rationalen Werth der Reihe bedeutete,

$$g z^{\alpha_m} = G + h\left[\pm\frac{b_{m+1}}{z^{\alpha_{m+1}-\alpha_m}} \pm \frac{b_{m+2}}{z^{\alpha_{m+2}-\alpha_m}} \pm \cdots\right],$$

während die in Klammern stehende Reihe in keinem Falle grösser als $\frac{1}{z^{\varphi(m)}}\left[1+\frac{1}{z^c}+\frac{1}{z^{2c}}+\cdots\right]$ ist, was mit wachsendem m unter jeden angebbaren Werth sinkt. Ein Beispiel dieser Art bietet die Reihe

$$(3.) \qquad 1 \pm \frac{3}{z} \pm \frac{5}{z^3} \pm \frac{7}{z^6} \pm \cdots,$$

deren allgemeines Glied (abgesehen vom Zeichen)

$$\frac{b_m}{z^{\alpha_m}} = \frac{2m+1}{z^{\frac{m(m+1)}{2}}}$$

ist, so dass

$$\frac{b_{m+1}}{z^{\alpha_{m+1}-\alpha_m}} = \frac{2m+3}{z^{m+1}}.$$

Nun ist $2m+3 < 2^{\frac{m}{2}}$, wenn $m = 10$; um so mehr ist $b_{m+2} = 2m+5 < 2^{\frac{m+1}{2}}$, da $\frac{2m+5}{2m+3} < 2^{\frac{1}{2}}$, und allgemein $b_{m+k} < 2^{\frac{m+k-1}{2}}$. Hat nun z den Werth 2, also den kleinsten Werth, der hier überhaupt zulässig ist, so wäre, wenn man $m \gtreqless 10$ setzt,

$$\frac{b_{m+1}}{2^{\alpha_{m+1}-\alpha_m}} + \frac{b_{m+2}}{2^{\alpha_{m+2}-\alpha_m}} + \cdots < \frac{2^{\frac{m}{2}}}{2^{m+1}} + \frac{2^{\frac{m+1}{2}}}{2^{m+2}} + \cdots,$$

d. h.

$$< \frac{1}{2^{\frac{m}{2}+1}}\left[1+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}+\cdots\right].$$

Mit dem Obigen verglichen ist hier $\varphi(m) = \frac{m}{2}+1$ und $c = \frac{1}{2}$. Die Reihe $\frac{b_{m+1}}{2^{\alpha_{m+1}-\alpha_m}} + \frac{b_{m+2}}{2^{\alpha_{m+2}-\alpha_m}} + \cdots$ sinkt also unter jeden angebbaren Werth, und dies ist um so mehr der Fall, wenn man statt $z = 2$ zu setzen, einen grösseren Werth für z setzt. Die Reihe (3.) hat also, wie auch die Zeichen der

einzelnen Glieder beschaffen sein mögen, keinen rationalen Werth. Besonders bemerkenswerth ist die in (3.) enthaltene Reihe

$$1-\frac{3}{z}+\frac{5}{z^3}-\frac{7}{z^6}\cdots,$$

welche sich aus der *Jacobi*schen Gleichung *)

$$[(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots]^3 = 1-3q+5q^3-7q^6+\cdots$$

ergiebt, wenn man $q=\frac{1}{z}$ setzt. Denn nach Obigem folgt hieraus, dass nicht bloss die Reihe (1.) und das gleichgeltende Product $\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z^3}\right)\cdots$, sondern auch deren Cubus keinen rationalen Werth hat.

*) Fundam. nov. § 66.

Göttingen, April 1883.

Beweis des Satzes, dass eine einwerthige Function beliebig vieler Variabeln, welche überall als Quotient zweier Potenzreihen dargestellt werden kann, eine rationale Function ihrer Argumente ist.

(Von Herrn *A. Hurwitz* in Göttingen.)

Im Folgenden soll ein kleiner Beitrag zur Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlicher geliefert werden. Wir wollen nämlich den Nachweis erbringen, dass jede Function, die überall den Charakter einer rationalen Function besitzt, nothwendig in rationaler Weise von ihren Argumenten abhängt*).

Unser Beweis verfährt inductiv: Wir werden annehmen, dass der genannte Satz für Functionen von $n-1$ Veränderlichen bewiesen sei, und zeigen, dass er dann auch für n Veränderliche gültig ist. Da er nun für Functionen einer Veränderlichen bekanntermassen gilt, so ist er dann für beliebig viele Argumente bewiesen.

Die Function $f(u_1, u_2, \ldots u_n)$ erfülle die Voraussetzung, dass sie an jeder Stelle

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \quad \ldots \quad u_n = a_n$$

als Quotient zweier, nur Potenzen mit ganzen, positiven Exponenten enthaltenden Potenzreihen von

$$u_1 - a_1, \quad u_2 - a_2, \quad \ldots \quad u_n - a_n$$

dargestellt werden kann. Ferner werde angenommen, dass die Function sich an der Stelle

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \ldots \quad u_n = 0$$

*) Dieses Theorem ist zuerst von Herrn *Weierstrass* (dieses Journal, Bd. 89), aufgestellt worden. Jedoch hat Herr *Weierstrass* seinen Beweis des Satzes bis jetzt nicht veröffentlicht.

regulär verhalte und an dieser Stelle einen von Null verschiedenen Werth besitze, Annahmen, welche die Allgemeinheit nicht beeinträchtigen.

Es sei nun

$$f(u_1, u_2, \ldots u_n) = A_0 + A_1 u_1 + A_2 u_1^2 + \cdots,$$

wo die $A_0, A_1, A_2, \ldots$ Functionen von

$$u_2, \quad u_3, \quad \ldots \quad u_n$$

bedeuten, welche sich in der Umgebung der Stelle

$$u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \ldots \quad u_n = 0$$

regulär verhalten. Jetzt möge die positive Grösse δ so angenommen werden, dass für

$$|u_1| \leqq \delta, \quad |u_2| \leqq \delta, \quad \ldots \quad |u_n| \leqq \delta$$

die obige Entwickelung von $f(u_1, u_2, \ldots u_n)$ gültig sei und für alle durch diese Einschränkungen bestimmten Werthsysteme von $u_1, u_2, \ldots u_n$ die Function $f(u_1, u_2, \ldots u_n)$ einen von Null verschiedenen Werth annimmt. In der Ebene, deren Punkte die Werthe von u_2 geometrisch repräsentiren, werde um den Punkt $u_2 = 0$ mit den Radien δ und $\delta' < \delta$ je ein Kreis beschrieben und das Innere dieser Kreise bezüglich als Gebiet G und G' bezeichnet, so dass also das Gebiet G' ganz in dem Gebiete G enthalten ist.

Geben wir jetzt dem Argumente u_2 einen bestimmten Werth b_2, welcher im Innern des Gebietes G belegen ist, so geht $f(u_1, u_2, \ldots u_n)$ in eine Function $f(u_1, b_2, \ldots u_n)$ der $n-1$ Argumente

$$u_1, \quad u_3, \quad \ldots \quad u_n$$

über, und ich behaupte, dass sie eine rationale Function dieser Argumente ist. In der That haben wir für jede beliebige Stelle

$$u_1 = a_1, \quad u_3 = a_3, \quad \ldots \quad u_n = a_n$$

die Entwickelung:

$$f(u_1, u_2, \ldots u_n) = \frac{C_0 + C_1(u_2 - b_2) + C_2(u_2 - b_2)^2 + \cdots}{C_0' + C_1'(u_2 - b_2) + C_2'(u_2 - b_2)^2 + \cdots},$$

wo $C_0, C_1, \ldots, C_0', C_1', \ldots$ Potenzreihen von

$$u_1 - a_1, \quad u_3 - a_3, \quad \ldots \quad u_n - a_n$$

bedeuten. Daher stellt sich $f(u_1, b_2, \ldots u_n)$ an jeder Stelle

$$u_1 = a_1, \quad u_3 = a_3, \quad \ldots \quad u_n = a_n$$

als Quotient zweier Potenzreihen von

$$u_1 - a_1, \quad u_3 - a_3, \quad \ldots \quad u_n - a_n$$

dar, wenn es sicher ist, dass keine der beiden Potenzreihen C_0 und C_0' identisch verschwindet. Zunächst dürfen wir aber offenbar voraussetzen, dass C_0 und C_0' nicht *gleichzeitig* identisch gleich Null sind. Ferner würde die Annahme $C_0 = 0$, $C_0' \gtrless 0$ zur Folge haben, dass $f(u_1, b_2, \dots u_n)$ unabhängig von

$$u_1, \quad u_3, \quad \dots \quad u_n$$

gleich Null sein würde, und für $C_0 \gtrless 0$, $C_0' = 0$ würde $f(u_1, b_2, \dots u_n)$ unabhängig von den Argumenten unendlich gross werden. Beide Folgerungen widersprechen der Voraussetzung, dass $f(u_1, b_2, \dots u_n)$ für

$$|u_1| \leqq \delta, \quad |u_3| \leqq \delta, \quad \dots \quad |u_n| \leqq \delta$$

endliche von Null verschiedene Werthe hat.

Nunmehr können wir den zu beweisenden Satz auf die Function $f(u_1, b_2, \dots u_n)$ anwenden, da diese nur von $n-1$ Veränderlichen abhängt. Es ergiebt sich daher:

$$f(u_1, b_2, \dots u_n) = \overline{A}_0 + \overline{A}_1 u_1 + \overline{A}_2 u_1^2 + \cdots = \frac{B_0 + B_1 u_1 + \cdots + B_r u_1^r}{B_0' + B_1' u_1 + \cdots + B_r' u_1^r},$$

wo $\overline{A}_i$ bezeichnet, was aus A_i für $u_2 = b_2$ wird, und wo $B_0, B_1, \dots B_0', B_1', \dots$ rationale ganze Functionen von

$$u_3, \quad \dots \quad u_n$$

bezeichnen. Hierbei soll mindestens eine der beiden Functionen B_r, B_r' von Null verschieden sein, so dass r den Grad der rationalen Function in Bezug auf u_1 vorstellt.

Der Vergleich der einzelnen Potenzen von u_1 in der Gleichung

$$(\overline{A}_0 + \overline{A}_1 u_1 + \cdots)(B_0' + B_1' u_1 + \cdots + B_r' u_1^r) = B_0 + B_1 u_1 + \cdots + B_r u_1^r$$

liefert eine Reihe von Beziehungen, aus denen durch Elimination der Grössen

$$B_0, \quad B_1, \quad \dots \quad B_0', \quad B_1', \quad \dots$$

das Verschwinden aller Determinanten $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades gefolgert wird, welche aus den unzählig vielen Reihen

$$\begin{array}{llll} \overline{A}_1, & \overline{A}_2, & \dots & \overline{A}_{r+1}, \\ \overline{A}_2, & \overline{A}_3, & \dots & \overline{A}_{r+2}, \\ \overline{A}_3, & \overline{A}_4, & \dots & \overline{A}_{r+3}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

gebildet werden können.

Es werde nunmehr jeder Stelle b_2 des Gebietes G' die ganze Zahl r, nämlich der Grad der rationalen Function $f(u_1, b_2, u_3, \ldots u_n)$ in Bezug auf u_1 zugeordnet. Dann muss es mindestens *einen* Grad r geben, welchem unzählig viele Stellen von G' zugehören. Wenn nämlich jedem Grade r nur eine endliche Zahl von Werthen b_2 zufallen würden, so müssten die Stellen des Gebietes G' eine abzählbare Mannigfaltigkeit bilden, was nicht der Fall ist*). Hieraus folgern wir, dass es eine Stelle im Innern oder auf dem Rande von G', also jedenfalls im Innern von G, giebt von der Eigenschaft, dass jede noch so kleine Umgebung derselben unzählig viele Stellen b_2 in sich fasst, welchen der Grad r zugehört. Die Determinanten

$$\left|\begin{array}{cccc} A_1, & A_2, & \ldots & A_{r+1} \\ A_2, & A_3, & \ldots & A_{r+2} \\ A_3, & A_4, & \ldots & A_{r+3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right| \quad \text{in inf.}$$

verschwinden also unabhängig von

$$u_3, \quad u_4, \quad \ldots \quad u_n$$

für unzählig viele in der Umgebung jener Stelle liegenden Werthe von u_2. Da diese Determinanten aber Functionen von $u_2, \ldots u_n$ sind, welche sich in der Umgebung der Stelle

$$u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad \ldots \quad u_n = 0$$

regulär verhalten, so folgt, dass dieselben identisch, d. h. unabhängig von $u_2, u_3, \ldots u_n$ verschwinden.

Diese Erkenntniss berechtigt uns zu der Folgerung, dass sich die unzählig vielen Gleichungen

$$\begin{aligned} f_r A_1 + f_{r-1} A_2 + \cdots + f_0 A_{r+1} &= 0, \\ f_r A_2 + f_{r-1} A_3 + \cdots + f_0 A_{r+2} &= 0, \\ f_r A_3 + f_{r-1} A_4 + \cdots + f_0 A_{r+3} &= 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

in inf.

vermöge nicht sämmtlich verschwindender Grössen $f_0, f_1, \ldots f_r$ befriedigen

*) Siehe hierzu *Cantor*, dieses Journal Bd. 77.

lassen. Diese Grössen $f_0, f_1, \ldots f_r$ sind offenbar Functionen von $u_2, \ldots u_n$, welche sich in der Umgebung der Stelle

$$u_2 = 0, \quad \ldots \quad u_n = 0$$

regulär verhalten. Da jetzt

$$f(u_1, u_2, \ldots u_n)|f_0+f_1u_1+\cdots+f_ru_1^r|$$
$$= (A_0+A_1u_1+A_2u_1^2+\cdots)(f_0+f_1u_1+\cdots+f_ru_1^r) = \varphi_0+\varphi_1u_1+\varphi_2u_1^2+\cdots+\varphi_ru_1^r$$

ist, so ergiebt sich:

$$f(u_1, u_2, \ldots u_n) = \frac{\varphi_0+\varphi_1u_1+\varphi_2u_1^2+\cdots+\varphi_ru_1^r}{f_0+f_1u_1+f_2u_1^2+\cdots+f_ru_1^r},$$

wo die Grössen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_r$, wie $f_0, f_1, \ldots f_r$ Functionen von $u_2, \ldots u_n$ sind, welche sich an der Stelle

$$u_2 = 0, \quad \ldots \quad u_n = 0$$

regulär verhalten.

Wie wir oben gezeigt haben, entsteht aus $f(u_1, u_2, \ldots u_n)$ für $u_2 = b_2$ eine rationale Function der übrigen Argumente, wenn b_2 in einer gewissen Umgebung der Stelle $u_2 = 0$ liegt. Ebenso wird für $u_1 = b_1$ unsere Function in eine rationale Function von $u_2, \ldots u_n$ übergehen, wenn b_1 in einer gewissen Umgebung der Stelle $u_1 = 0$ angenommen wird. Es seien

$$b_1^{(1)}, \quad b_1^{(2)}, \quad \ldots \quad b_1^{(2r+1)}$$

$2r+1$ verschiedene, in dieser Umgebung von $u_1 = 0$ liegende Stellen; so haben wir die Gleichungen:

$$[f(u_1, u_2, \ldots u_n)].f_0+[f(u_1, u_2, \ldots u_n).u_1]f_1+\cdots+[f(u_1, u_2, \ldots u_n).u_1^r]f_r$$
$$-\varphi_0-u_1.\varphi_1-u_1^2.\varphi_2-\cdots-u_1^r.\varphi_r = 0,$$

$$[f(b_1^{(i)}, u_2, \ldots u_n)].f_0+[f(b_1^{(i)}, u_2, \ldots u_n).b_1^{(i)}].f_1+\cdots+[f(b_1^{(i)}, u_2, \ldots u_n)(b_1^{(i)})^r]f_r$$
$$-\varphi_0-b_1^{(i)}.\varphi_1-(b_1^{(i)})^2.\varphi_2-\cdots-(b_1^{(i)})^r.\varphi_r = 0,$$
$$(i = 1, 2, \ldots 2r+1).$$

Wenn wir aus diesen $2r+2$ Gleichungen die Grössen

$$f_0, \quad f_1, \quad \ldots \quad f_r, \quad \varphi_0, \quad \varphi_1, \ldots \quad \varphi_r$$

eliminiren, so erhalten wir eine lineare Gleichung für

$$f(u_1, u_2, \ldots u_n),$$

aus welcher sich diese Function als rationale Function der Argumente

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots \quad u_n$$

ergiebt. Diese Betrachtung wird dann illusorisch, wenn für jedes System

$$b_1^{(1)},\quad b_1^{(2)},\quad \ldots\quad b_1^{(2r+1)}$$

die sämmtlichen Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, welche aus den Colonnen:

$$\begin{array}{llll}
f(b_1^{(1)}, u_2, \ldots u_n), & \ldots\ f(b_1^{(1)}, u_2, \ldots u_n)(b_1^{(1)})^r, & 1,\ b_1^{(1)}, & \ldots\ (b_1^{(1)})^r, \\
f(b_1^{(2)}, u_2, \ldots u_n), & \ldots\ f(b_1^{(2)}, u_2, \ldots u_n)(b_1^{(2)})^r, & 1,\ b_1^{(2)}, & \ldots\ (b_1^{(2)})^r, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
f(b_1^{(2r+1)}, u_2, \ldots u_n), & \ldots\ f(b_1^{(2r+1)}, u_2, \ldots u_n)(b_1^{(2r+1)})^r, & 1,\ b_1^{(2r+1)}, & \ldots\ (b_1^{(2r+1)})^r
\end{array}$$

gebildet werden können.

In diesem Falle verschwinden aber für beliebige Werthe von

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots\quad u_n$$

die Determinanten $(2r+1)^{\text{ten}}$ Grades aus den Colonnen:

$$\begin{array}{llll}
f(u_1, u_2, \ldots u_n), & \ldots\ f(u_1, u_2, \ldots u_n)u_1^r, & 1,\ u_1, & \ldots\ u_1^r, \\
f(b_1^{(2)}, u_2, \ldots u_n), & \ldots\ f(b_1^{(2)}, u_2, \ldots u_n)(b_1^{(2)})^r, & 1,\ b_1^{(2)}, & \ldots\ (b_1^{(2)})^r, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
f(b_1^{(2r+1)}, u_2, \ldots u_n), & \ldots\ f(b_1^{(2r+1)}, u_2, \ldots u_n)(b_1^{(2r+1)})^r, & 1,\ b_1^{(2r+1)}, & \ldots\ (b_1^{(2r+1)})^r,
\end{array}$$

welche aus den vorhergehenden entstehen, wenn man $b_1^{(1)}$ durch das unbestimmte Argument u_1 ersetzt.

Es ergiebt sich nunmehr wieder

$$f(u_1,\ u_2,\ \ldots\ u_n)$$

als rationale Function von

$$u_1,\quad u_2,\quad \ldots\quad u_n,$$

wenn nicht sämmtliche Determinanten $2r^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, welche aus den Colonnen

$$\begin{array}{llll}
f(b_1^{(2)}, u_2, \ldots u_n), & \ldots\ f(b_1^{(2)}, u_2, \ldots u_n)(b_1^{(2)})^r, & 1,\ b_1^{(2)}, & \ldots\ (b_1^{(2)})^r, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
f(b_1^{(2r+1)}, u_2, \ldots u_n), & \ldots\ f(b_1^{(2r+1)}, u_2, \ldots u_n)(b_1^{(2r+1)})^r, & 1,\ b_1^{(2r+1)}, & \ldots\ (b_1^{(2r+1)})^r,
\end{array}$$

gebildet werden können. In letzterem Falle ersetzt man wieder eine der Grössen $b_1^{(i)}$ durch das unbestimmte Argument u_1 u. s. f.

Somit ist ersichtlich, dass in allen Fällen $f(u_1, u_2, \ldots u_n)$ als rationale Function ihrer Argumente dargestellt werden kann, was zu beweisen war.

Göttingen, den 30. October 1882.

Zur Theorie der Flächen dritter Ordnung.

(Von Herrn *Friedrich Schur* in Leipzig.)

Nachdem in neuester Zeit das sogenannte desmische System von drei Tetraedern, das sind solche, von denen die Ecken eines jeden Perspectivitätscentra für die beiden anderen sind, die Aufmerksamkeit der Geometer*) auf sich gezogen hat, dürfte vielleicht der Nachweis dieser merkwürdigen Configuration bei einer allgemeinen Fläche dritter Ordnung von einigem Interesse sein, zumal dadurch gleichzeitig die Natur einer Fläche vierter Ordnung, von welcher schon *Steiner***) in seiner berühmten Abhandlung über Flächen dritter Ordnung einige Eigenschaften angegeben hat, in volle Klarheit gesetzt wird. Irgend drei Ebenen nämlich durch drei in derselben Ebene gelegene gerade Linien einer Fläche dritter Ordnung schneiden diese in drei Kegelschnitten, durch welche eine Fläche zweiten Grades geht, so dass zu jedem auf der Fläche dritter Ordnung gelegenen Dreiseit ein Flächensystem zweiten Grades von dreifacher Mächtigkeit gehört. *Steiner* sagt nun a. a. O., dass die Spitzen der Kegel, welche es in diesem Flächensysteme giebt, eine Fläche vierter Ordnung erfüllen. Es ist dies von Herrn *Cremona****) nach der jetzt üblichen Terminologie dadurch bewiesen worden, dass er diese Fläche als Brennfläche eines Strahlensystems zweiter Ordnung darstellt. Weil aber einmal in dieser Ableitung dieser Gesichtspunkt nicht betont ist, so dass Herr *Cremona* auch kaum mehr beweist, als dass diese Fläche von der vierten Ordnung ist, und weil andererseits beim Beweise der Identität beider Flächen so specielle Elemente der Figur verwendet werden, dass

*) *Stephanos*, sur les systèmes desmiques de trois tétraèdres, Bulletin des sciences math. et astr. 2e série, t. III, 1, 1879, p. 424. Veronese, sopra alcune notevoli configurazione, Memorie della R. Accad. dei Lincei 1881, p. 77. *Reye*, die Hexaeder- und Octaeder-Configurationen, Acta mathematica, 1, p. 27.

**) *Steiner*, über die Flächen dritten Grades, ges. Werke, Bd. II, p. 654.

***) *Cremona*, Allgemeine Theorie der Oberflächen, deutsch von *Curtze*, Berlin, 1870. 3 Th. Cap. V.

diese Identität ganz zufällig erscheint, so werde ich in § 2 noch einmal die von *Steiner* betrachtete Fläche als Brennfläche eines Strahlensystems zweiter Ordnung und sechster Klasse nachweisen. Die Strahlen desselben werden hierbei wie bei Herrn *Cremona* als Schnittlinien entsprechender Tangentialebenen zweier collinearen Flächen zweiten Grades erzeugt. Ueber die so erzeugten Strahlensysteme schicke ich desshalb in § 1 einige Erörterungen voraus, um die besondere Natur des in unserem Falle auftretenden ins rechte Licht setzen zu können. Es erweist sich so unsere Fläche als diejenige, welche Herr *Kummer* als die Reciproke der Krümmungsmittelpunktsfläche einer Fläche zweiten Grades erkannt hat. Die zwölf Knotenpunkte derselben bilden nun, wie Herr *Veronese* bemerkt hat, das oben erwähnte desmische System. Diese Knotenpunkte aber erscheinen hier als die Schnittpunkte der zwölf Geradenpaare, in welchen Ebenen durch die drei Seiten des Dreiseits die Fläche dritter Ordnung noch schneiden. Nachdem so zu jedem Dreiseit auf einer Fläche dritter Ordnung eine gewisse Fläche vierter Ordnung als zugehörig gefunden ist, entsteht die Frage, ob umgekehrt zu jeder solchen Fläche vierter Ordnung in demselben Sinne Flächen dritter Ordnung gehören. Diese Frage wird in § 3 dahin beantwortet, dass, nachdem die Fläche vierter Ordnung und irgend eine Ebene als Ebene des Dreiseits gegeben ist, es noch sechs solche Flächen dritter Ordnung giebt. Es ist damit gleichzeitig der von *Steiner* gegebene Satz, dass der Schnittcurve der Fläche vierter Ordnung mit der Ebene des Dreiseits vollständige Fünfseite eingeschrieben werden können, auf jede in der Fläche enthaltene ebene Curve übertragen. Uebrigens zeige ich, dass diese Curve dieselbe ist, in welcher die Ebene des Dreiseits von der *Hesse*schen Fläche der Fläche dritter Ordnung geschnitten wird.

§ 1.

Wir schicken zum besseren Verständniss einige meist bekannte Sätze über das Strahlensystem zweiter Ordnung und sechster Klasse von der ersten Art*) voraus. ***Die Strahlen desselben werden erzeugt als Schnittlinien entsprechender Tangentialebenen zweier collinearen Flächen zweiten Grades*****).

*) S. *Kummer*, über die algebraischen Strahlensysteme, aus den Abhand. der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866, § 11.

**) S. *Lie*, über die Reciprocitätsverhältnisse des *Reye*schen Complexes, Göttinger Nachrichten 1870, p. 65; und *Reye*, über das Strahlensystem zweiter Classe sechster Ordnung von der ersten Art, dieses Journal, Bd. 93, p. 81 ff.

Dies Strahlensystem besitzt vier singuläre Punkte (4a) in den vier sich selbst entsprechenden Punkten der räumlichen Collineation, welche durch die beiden collinearen Flächen zweiten Grades H_{a_1} und H_{a_2} definirt ist; und zwar geht durch jeden derselben ein Strahlenkegel vierter Ordnung. Ist ferner $[b_1]$ die eine geradlinige Erzeugung von H_{a_1} und $[b_2]$ die entsprechende, so giebt es vier Geraden in $[b_1]$, welche von ihren entsprechenden geschnitten werden, und in diesen vier Schnittpunkten (4c) besitzt das Strahlensystem vier weitere singuläre Punkte mit Strahlenkegeln zweiten Grades. Ebenso besitzt es noch vier andere singuläre Punkte (4b) mit Strahlenkegeln zweiten Grades in den vier Punkten, in denen Geraden der zweiten Erzeugung $[c_1]$ von H_{a_1} von den entsprechenden aus $[c_2]$ geschnitten werden. Jedes Tangentialebenenbüschel (b_1) resp. (c_1) erzeugt mit dem ihm entsprechenden (b_2) resp. (c_2) eine geradlinige Fläche zweiten Grades H_c resp. H_b, welche durch die Punkte (4a) und (4b) resp. (4c) geht. So kann also das Strahlensystem zweimal durch die geradlinigen Erzeugungen von Flächen zweiten Grades beschrieben werden. Die zweiten Erzeugungen dieser bilden zwei andere Strahlensysteme zweiter Ordnung und sechster Klasse, welche in (4b) resp. (4c) singuläre Punkte mit Strahlenkegeln vierter Ordnung und in (4a) und (4c) resp. (4b) singuläre Punkte mit Strahlenkegeln zweiten Grades haben. Die beiden einander collinearen räumlichen Systeme, welchen H_{a_1} und H_{a_2} angehören, bestimmen ein Büschel von collinearen Systemen, von denen je zwei denselben *Reye*schen Complex erzeugen. Der H_{a_1} entsprechen hierbei successive die Flächen H_a einer Schaar, welche alle durch (4b) und (4c) gehen, und es erzeugen die entsprechenden Tangentialebenen je zweier derselben dasselbe Strahlensystem wie die von H_{a_1} und H_{a_2}. Ferner beschreiben hierbei die Erzeugungen $[b]$ und $[c]$ die zweiten beiden Strahlensysteme zweiter Ordnung und sechster Klasse. Diese Strahlensysteme, welche also ganz symmetrisch bezüglich der Quadrupel (4a), (4b) und (4c) vertheilt sind, besitzen dieselbe Brennfläche vierter Ordnung, welche in den zwölf singulären Punkten conische Knotenpunkte hat.

Die nähere Begründung der vorstehenden Eigenschaften des Strahlensystems zweiter Ordnung und sechster Klasse möge man in der oben citirten Abhandlung von Herrn *Reye* nachlesen. Uebrigens aber ist über dieselbe Folgendes zu bemerken. Wenn Herr *Reye* p. 83 die Identität der durch collineare Flächen zweiten Grades erzeugten Strahlensysteme zweiter Ordnung und sechster Klasse mit den von Herrn *Kummer* l. c. beschriebenen daraus

folgern will, dass beide dieselbe Anzahl von Constanten enthalten, so ist ein solcher Schluss nicht ganz streng. Denn wenn eine Mannigfaltigkeit in einer andern nicht linearen Mannigfaltigkeit enthalten ist, so kann man von ihrer gleichen Mächtigkeit nur dann auf ihre Identität schliessen, wenn man weiss, dass die zweite irreductibel ist. Ebenso etwa wie die Strahlensysteme zweiter Ordnung und sechster Klasse überhaupt sich in zwei Arten von derselben Mächtigkeit theilen, könnten sich die der ersten Art wieder in zwei Gattungen theilen, von denen die einen sich collinear erzeugen lassen, die andern aber nicht. Dass dem freilich nicht so ist, lässt sich aus den *Kummer*schen Gleichungen leicht ersehen. Denn die Gleichung (24.) in § 11 der citirten Abhandlung, welches eine der beiden Gleichungen des Strahlensystems ist, ist nichts anderes als die eines *Reye*schen Strahlencomplexes. Sobald aber bekannt ist, dass ein Strahlensystem zweiter Ordnung in einem solchen Complexe enthalten ist, folgt sofort, dass ihm im Ebenenraum eine Fläche zweiten Grades entspricht*).

Ich will im Anschluss hieran die Frage beantworten, wie sich das specielle a. a. O. von Herrn *Kummer* erwähnte Strahlensystem zweiter Ordnung und sechster Klasse, welches dem Normalensystem einer Fläche zweiten Grades reciprok ist, unter die allgemeinen dieser Art vom Gesichtspunkte ihrer collinearen Erzeugung aus einreiht. Nun hat bereits Herr *Veronese* a. a. O. erwähnt, dass eine von ihm untersuchte Fläche vierter Ordnung mit 12 Knotenpunkten, welche zu je drei in 16 in der Fläche enthaltenen geraden Linien liegen, mit der Reciproken der Krümmungsmittelpunktsfläche der Flächen zweiten Grades identisch ist. Es werden mit anderen Worten dann die dreimal vier Punkte (4a), (4b), (4c) die Ecken von drei Tetraedern eines sogenannten desmischen Systems, von drei Tetraedern also, von denen die Ecken eines jeden Perspectivitätscentra für die beiden anderen sind. Daraus folgt aber leicht, dass das Tetraeder (4a) für die beiden Flächen H_{a_1} und H_{a_2} und somit auch für die ganze daraus abgeleitete Schaar das sich selbst conjugirte Tetraeder ist. Denn es gehen dann von jedem der Punkte (4a) mehr als zwei, nämlich vier Secanten an die Schnittcurve von H_{a_1} und H_{a_2}. Ist umgekehrt das Tetraeder (4a) das sich selbst conjugirte Tetraeder für H_{a_1} und H_{a_2}, so sind seine Ecken Perspectivitätscentra für die beiden Tetraeder (4b) und (4c). Denn verbinden wir einen Punkt a mit einem

*) S. die p. 1 citirte Abh. von Herrn *Lie*.

Punkte $\mathfrak{b} = (c_1, c_2)$, so trifft $\overline{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}$ die Schnittcurve von H_{a_1} und H_{a_2} noch in einem dritten Punkte $\mathfrak{c}$. Ist nun b_1 die durch $\mathfrak{c}$ gehende Gerade der Erzeugung $[b_1]$, so liegt dieselbe mit c_1 in einer Ebene, und es entspricht der Ebene $[c_1, c_2]$ die Ebene durch $\mathfrak{a}$ und c_2, welche also die b_1 entsprechende Gerade b_2 enthalten muss. Da nun $\mathfrak{c}$ ein Punkt von H_{a_2} sowohl als von der Ebene $[b_1, b_2]$ ist, so geht auch b_2 durch $\mathfrak{c}$, d. h. $\mathfrak{c}$ ist einer der Punkte $(4\mathfrak{c})$. Nennen wir nun diese Fläche vierter Ordnung, welche der Krümmungsmittelpunktsfläche einer Fläche zweiten Grades reciprok ist, wegen ihrer Beziehungen, ja ihrer Entstehung aus einem desmischen System von drei Tetraedern kurz *die desmische Fläche vierter Ordnung*, so können wir folgendes Resultat aussprechen:

Soll die Brennfläche eines durch die Tangentialebenen zweier collinearen Flächen zweiten Grades erzeugten Strahlensystems zweiter Ordnung und sechster Klasse eine desmische Fläche vierter Ordnung sein, so müssen die sich selbst entsprechenden Punkte der beiden collinearen räumlichen Systeme mit den Ecken des sich selbst conjugirten Tetraeders der beiden Flächen zweiten Grades zusammenfallen; und umgekehrt.

Die Anzahl der Constanten dieses Strahlensystems ergiebt sich als sechzehn. Nachdem nämlich das Tetraeder $(4\mathfrak{a})$ festgelegt ist, was zwölf Constanten involvirt, sind noch je drei nothwendig, um einerseits H_{a_1} und andrerseits die Collineation zu fixiren, so dass zunächst 18 Constanten resultiren. Da aber das Strahlensystem ∞^2-mal in dieser Weise erzeugt werden kann, so bleiben nur 16 Constanten übrig. In der That hat Herr *Kummer*, um dies specielle System zu erhalten, 6 Constanten des allgemeinen verschwinden lassen.

§ 2.

Durch die drei Kegelschnitte k_a, k_b, k_c, in welchen irgend drei Ebenen α, β, γ durch drei in einer Ebene liegende Geraden a, b, c einer Fläche dritter Ordnung F^3 diese noch schneiden, geht bekanntlich stets eine Fläche zweiten Grades. Offenbar bilden diese Flächen zweiten Grades, wenn a, b, c auf F^3 festgehalten werden, eine dreifache Mannigfaltigkeit, so dass es unter denselben doppelt unendlich viel Kegel giebt. Es lässt sich nun zeigen, dass der Ort dieser Kegelspitzen die Brennfläche von drei Strahlensystemen zweiter Ordnung und sechster Klasse ist.

Halten wir nämlich zwei der Kegelschnitte, k_a und k_b, fest, so giebt es

unter den Flächen zweiten Grades des durch sie bestimmten Büschels zwei Kegel, und es liegen deren Spitzen auf der reciproken Polare s_c von (α, β) für alle Flächen des Büschels. Lassen wir jetzt (α, β) alle Strahlen des Bündels durch den Punkt (a, b) durchlaufen, so beschreibt s_c ein Strahlensystem, dessen Brennfläche, wie wir später sehen werden, der gesuchte Ort der Kegelspitzen ist. Untersuchen wir aber zunächst das System der Strahlen s_c. Sind γ_1 und γ_2 zwei feste Ebenen durch c, so ist s_c jedesmal der Durchschnitt der Polarebenen π_1 und π_2 der Punkte $(\alpha, \beta, \gamma_1)$ und $(\alpha, \beta, \gamma_2)$ in Bezug auf die Flächen zweiten Grades durch k_a, k_b und k_{c_1} resp. k_{c_2}. Die Polarebenen π_1 und π_2 umhüllen aber zwei geradlinige Flächen zweiten Grades H_{c_1} und H_{c_2}. Die beiden Erzeugungen der von den Ebenen π_1 z. B. umhüllten Fläche werden nämlich gebildet von den Geraden s_{a_1} und s_{b_1}, welche den Strahlen der Büschel (β, γ_1) und (α, γ_1) als reciproke Polaren für alle Flächen zweiten Grades der durch k_b und k_{c_1}, k_a und k_{c_2} resp. bestimmten Büschel entsprechen. Dass die Geraden s_{a_1} und s_{b_1} die Geraden der beiden Erzeugungen einer Fläche zweiten Grades bilden, folgt leicht daraus, dass jede s_{a_1} mit jeder s_{b_1} in der Polarebene des Schnittpunktes der ihnen entsprechenden Geraden (β, γ_1) und (α, γ_1) liegt. Beschreibt ferner der Punkt $(\alpha, \beta, \gamma_1)$ bei festgehaltenem β die Gerade (β, γ_1), so beschreibt offenbar π_1 ein dazu projectives Ebenenbüschel um s_{a_1}. Es beschreibt also auch, wenn π_1 ein Ebenenbüschel um einen Strahl s_{a_1} oder s_{b_1} beschreibt, die entsprechende Ebene π_2 ein dazu projectives Ebenenbüschel um s_{a_2} und s_{b_2}, wo die Bedeutung dieser letzten Strahlen aus ihrer Bezeichnung erhellt. Hieraus geht hervor, dass die Ebenen π_1 und π_2 einander in einer räumlichen Collineation entsprechen, dass also, weil sie je eine Fläche zweiten Grades umhüllen, ihre Schnittgeraden s_c ein Strahlensystem zweiter Ordnung und sechster Klasse erfüllen. Ferner ist nach § 1 leicht zu sehen, dass die Strahlen s_a und s_b zwei andere Strahlensysteme zweiter Ordnung und sechster Klasse erfüllen, welche mit dem der s_c die Brennfläche F^4 gemein haben; wir wollen diese drei Strahlensysteme Σ_a, Σ_b, Σ_c nennen.

Nun beschreiben die Strahlen s_a und s_b, wenn die ihnen entsprechenden Strahlen (β, γ) und (α, γ) bei festgehaltenem β und α Strahlenbüschel beschreiben, zwei Hyperboloide H_a und H_b, und es ist ihrer Definition gemäss F^4 die Einhüllende dieser Hyperboloide, es berührt jedes derselben die F^4 längs einer Raumcurve vierter Ordnung von der ersten Species. Offenbar haben H_a und H_b den Strahl s_c gemein, welcher der Geraden (α, β) ent-

spricht; sie werden sich also ausserdem in einer Raumcurve dritter Ordnung schneiden, welche daher s_c in zwei Punkten $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ trifft, in denen H_a und H_b sich berühren. Da nun die beiden Hyperboloide H_a und H_b sich nur in den beiden Brennpunkten des Strahles s_c auf s_c berühren können, so sind $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ diese beiden Brennpunkte. Wie entstehen nun diese Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$? Die Strahlen s_a, s_b und s_c sind ja jedesmal die reciproken Polaren der Geraden (β, γ), (γ, α) und (α, β) für die Fläche zweiten Grades durch k_a, k_b und k_c, liegen also in derselben Ebene. Werden nun α und β festgehalten und γ bewegt, so beschreiben s_a und s_b die Hyperboloide H_a und H_b und ihr Schnittpunkt die Raumcurve dritter Ordnung, in welcher sie sich schneiden. Rückt dieser nach s_c, also nach $\mathfrak{p}_1$ oder $\mathfrak{p}_2$, so gehen s_a, s_b, s_c auch durch denselben Punkt, folglich muss die Fläche zweiten Grades durch k_a, k_b, k_c ein Kegel mit der Spitze in diesem Punkte sein; und umgekehrt, wenn diese Fläche ein Kegel mit der Spitze auf s_c ist, müssen s_a und s_b auch durch diesen Punkt gehen. Hiermit ist also gezeigt, ***dass die Brennfläche F^4 der Strahlensysteme Σ_a, Σ_b, Σ_c mit der gesuchten Fläche der Kegelspitzen identisch ist.***

Die Strahlen s_a des Hyperboloides H_a sind diejenigen, welche den Geraden (β, γ) bei festgehaltenem β entsprechen. Lassen wir also β variiren, so erhalten wir die ganze Schaar dieser Hyperboloide H_a. Ist nun β eine solche Ebene, welche F^3 noch in zwei Geraden schneidet, so müssen offenbar die s_a, welche den Geraden (β, γ) als reciproke Polaren in Beziehung auf eine Fläche zweiten Grades durch diese beiden Geraden entsprechen, alle durch deren Schnittpunkt gehen, das Hyperboloid H_a wird also ein Kegel mit der Spitze in diesem Schnittpunkte. Hieraus folgt: ***Die 3.4 Schnittpunkte der Geradenpaare, in welchen Ebenen durch a, b und c die F^3 noch schneiden, sind die 12 singulären Punkte der Brennfläche F^4.***

Bezeichnen wir diese Punkte wie oben mit (4a), (4b) und (4c), so ist klar, dass jede Verbindungslinie eines Punktes a mit einem Punkte b die F^3 in einem Punkte c schneidet. Denn sind a_1, a_2 die beiden Geraden der F^3 durch a und b_1, b_2 diejenigen durch b, so muss a_1 eine der beiden Geraden b_1 oder b_2 schneiden, weil sie b nicht schneiden darf; sei b_1 diese Gerade, so muss also a_2 die b_2 schneiden. Dann schneiden offenbar die Ebenen $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ die F^3 noch in zwei Geraden c_1, c_2, welche mit c in derselben Ebene liegen, so dass in der That in der Geraden $\overline{ab}$ der Schnittpunkt c von c_1 und c_2 liegt. Hieraus folgt also, dass ***die drei Tetraeder***

(4a), (4b), (4c) *ein desmisches System bilden, dass also die Brennfläche* F^4 *eine desmische Fläche vierter Ordnung ist.*

Wir können leicht finden, in welchen Punkten die F^4 die Fläche dritter Ordnung schneidet. Von den Spitzen der vier Kegel, welche ein Flächenbüschel zweiten Grades i. A. besitzt, fallen für das Büschel durch k_b und k_c offenbar zwei in die Schnittpunkte von k_b und k_c. Fallen diese nun in einen Punkt zusammen, so rückt noch eine dritte Kegelspitze in diesen Punkt hinein, und es giebt nur einen eigentlichen Kegel im Büschel. Berührt also die Gerade (β, γ) die F^3, so fällt in den Berührungspunkt eine Spitze der beiden Kegel des Büschels durch k_b und k_c, dieser Berührungspunkt ist also ein Punkt von F^4. *Es schneidet also die* F^4 *die* F^3 *in denjenigen drei Raumcurven vierter Ordnung von der ersten Species, in welchen die ersten Polarflächen der drei Eckpunkte des Dreiseits abc die* F^3 *ausser in a, b, c noch schneiden.* Es geht offenbar die Polarfläche von (a, b) durch (4a) und (4b), so dass sich vermuthen lässt, dass sie zu den Hyperboloiden H_c gehört. Nun wird dieselbe umhüllt durch die Polarebenen π von (a, b) für alle Flächen zweiten Grades durch die k_a und k_b. Denn eine solche schneidet α in der Verbindungslinie der Berührungspunkte der beiden von (a, b) an k_a gehenden Tangenten; da nun a in der Polarfläche liegt, so hat diese Gerade mit derselben drei Punkte gemein, ist also in ihr enthalten. Nun geht aber andererseits die Polarebene von (a, b) für die Flächen zweiten Grades durch k_a und k_b auch durch den (α, β) entsprechenden Strahl $s_{\alpha\beta}$, welcher selbst entstand als Schnitt der Polarebenen π_1 und π_2 der Punkte $(\gamma_1, \alpha, \beta)$ und $(\gamma_2, \alpha, \beta)$ für die Flächen durch k_a, k_b und k_{c_1} resp. k_{c_2}. Die Ebenen π sind aber auch auf die Ebenen π_1 projectiv bezogen; denn beschreibt der Strahl (α, β) ein Strahlenbüschel in α oder β, so beschreibt π ein dazu projectives um die Polare von (a, b) für k_a oder k_b. Da folglich das Strahlensystem Σ_c auch erzeugt wird durch die Tangentialebenen der Polarfläche von (a, b) mit denen von H_{c_1}, so ist diese Polarfläche ein Hyperboloid H_c.

Hieraus geht hervor, dass a, b, c den Strahlensystemen Σ_a, Σ_b, Σ_c resp. angehören. Ihre Berührungspunkte mit F^4 sind offenbar die Punkte $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$; $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$; $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$, in denen sie von den Kegelschnitten k_{a_1}, k_{a_2}; k_{b_1}, k_{b_2}; k_{c_1}, k_{c_2} berührt werden. Diese sechs Punkte sind nun, wie schon ***Steiner*** bemerkte, die Ecken eines vollständigen Vierseits. In der That, die Fläche zweiten Grades durch k_{a_1} und k_{b_1} und einen dritten Punkt der Geraden $\overline{\mathfrak{l}_1 \mathfrak{m}_1}$ muss die Ebene abc längs dieser Geraden berühren, ist also ein Kegel, welcher

F^3 noch in einem der Kegelschnitte k_{c_1} oder k_{c_2} schneiden muss. Ist k_{c_1} dieser Kegelschnitt, so geht also $\overline{l_1 m_1}$ noch durch n_1. In dieser Weise erhalten wir vier Kegel, welche gehen: 1. durch k_{a_1}, k_{b_1}, k_{c_1}, 2. durch k_{a_1}, k_{b_2}, k_{c_2}, 3. durch k_{a_2}, k_{b_1}, k_{c_2} und 4. durch k_{a_2}, k_{b_2}, k_{c_1}. Da nun die ersten beiden Kegel ausser in k_{a_1} sich noch in einem zweiten Kegelschnitte schneiden, so haben sie zwei gemeinsame Tangentialebenen, deren eine *abc* ist. Die zweite berührt also die Kegelschnitte k_{a_1}, k_{b_1}, k_{c_1}, k_{b_2}, k_{c_2}, folglich ist sie auch Tangentialebene des dritten und vierten Kegels, d. h. die Spitzen dieser vier Kegel liegen in einer Geraden. Hiermit haben wir nach Herrn *Cremona* *) den schon von *Steiner* ausgesprochenen Satz bewiesen, ***dass der Schnittcurve der F^4 mit der Ebene abc ein vollständiges Fünfseit eingeschrieben ist.*** Daraus folgt nach einem Satze von Herrn *Lüroth* **), dass sich ihr einfach unendlich viel solche Fünfseite einschreiben lassen, deren Seiten insgesammt einen Kegelschnitt umhüllen. Diese Thatsache findet nun ihre einfache Erklärung darin, dass ***diese Schnittcurve der Ebene abc mit F^4 auf der Hesseschen Fläche der Fläche dritter Ordnung F^3 liegt.*** Ist nämlich $\mathfrak{p}$ die in *abc* liegende Spitze eines Kegels durch k_a, k_b, k_c, so schneiden diese Kegelschnitte sich zu je zweien in zwei Punkten, welche Berührungspunkte von aus $\mathfrak{p}$ gehenden Tangenten der F^3 sind, in Punkten also, welche auf der ersten Polarfläche von $\mathfrak{p}$ liegen. Da aber diese Polarfläche auch durch die Ecken des Dreiseits *abc* geht, so liegen die Geraden $(\beta\gamma)$, $(\gamma\alpha)$, $(\alpha\beta)$ auf ihr, sie ist folglich eine Kegelfläche, $\mathfrak{p}$ also ein Punkt der *Hesse*schen Fläche. Dies Resultat ist wichtig, weil, wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden, die Ebene *abc* in Bezug auf F^4 ganz willkürlich ist.

§ 3.

Es sei also eine desmische Fläche vierter Ordnung F^4 mit den 3.4 singulären Punkten (4a), (4b), (4c) gegeben, welche Brennfläche der drei Strahlensysteme Σ_a, Σ_b, Σ_c ist. Ist dann ε eine beliebige Ebene und a ein Strahl von Σ_a in derselben, so legen wir durch a die beiden Hyperboloide H_b und H_c, deren mit a zur selben Erzeugung gehörige Geraden also Σ_a angehören. Die beiden Hyperboloide H_b und H_c haben dann mit ε noch je einen Strahl c und b von Σ_c resp. Σ_b gemein, durch welche ein

*) *Cremona*, l. c. § 257.

**) *Lüroth*, einige Eigensch. einer gew. Gattung von Curven 4. Ordnung, Math. Ann. Bd. I, p. 37.

Hyperboloid H_a gehen muss. Das Hyperboloid H_a durch b etwa muss nämlich mit H_b einen Strahl von Σ_c gemein haben, welcher a und b schneidet. Er ist daher entweder der in der Ebene ε liegende Strahl c von H_b oder ein durch den Punkt (a, b) gehender Strahl. Im letzteren Falle hätte aber die Raumcurve dritter Ordnung, in welcher sich H_b und H_c ausser in a noch schneiden, mit der diese Curve doch nur einmal treffenden Geraden b sowohl den Punkt (b, c) als den Punkt (a, b) gemein, b müsste also den beiden Systemen Σ_b und Σ_c gemeinschaftlich sein, was offenbar bei beliebiger Annahme der Ebene ε nicht der Fall ist.

Wir haben also die drei Hyperboloide H_a, H_b, H_c, welche resp. durch b und c, c und a, a und b gehen. Sind ferner $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ die Brennpunkte von resp. a, b, c, so haben jetzt die beiden Hyperboloide H_b und H_c die sechs Punkte (4a), $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$ von F^4 gemeinsam, ebenso H_c und H_a die sechs Punkte (4b), $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, endlich H_a und H_b die sechs Punkte (4c), $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$. Sind also a^4, b^4, c^4 die drei Raumcurven vierter Ordnung von der ersten Species, längs welchen H_a, H_b, H_c die F^4 berühren, so haben b^4 und c^4, c^4 und a^4, a^4 und b^4 diese 3.6 Punkte in derselben Reihenfolge gemeinsam. Daraus ergiebt sich, dass man durch diese drei Raumcurven eine Fläche dritter Ordnung F^3 legen kann. Durch die beiden Curven b^4 und c^4 geht nämlich zunächst ein Büschel von Flächen dritter Ordnung, welche noch a enthalten. Denn da b^4 und c^4 sechs Punkte gemein haben, so kann man sowohl auf b^4 als auf c^4 noch je sechs willkürliche Punkte zur Bestimmung einer F^3 wählen. Eine Fläche dritter Ordnung durch diese achtzehn Punkte hat dann mit b^4 und c^4 je zwölf Punkte gemein, von denen je sechs noch ganz willkürlich sind, so dass diese Fläche dritter Ordnung b^4 und c^4 ganz enthalten muss. Da nun H_b und H_c in $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ die Tangentialebenen gemeinsam haben, weil sie dort beide F^4 berühren, so sind diese Tangentialebenen auch solche von F^3 in $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$, und daher ist a, welches in ihnen liegt, als Doppeltangente von F^3 ganz in F^3 enthalten. Dieser Schluss würde offenbar nur dann eine Ausnahme erleiden, wenn etwa b^4 und c^4 in $\mathfrak{l}_1$ oder $\mathfrak{l}_2$ einander berühren würden. Dann hätten aber b^4 und c^4 sieben Punkte gemeinsam, sie müssten also noch einen achten Punkt gemeinsam haben, d. h. b^4 und c^4 würden derselben Schaar von Raumcurven vierter Ordnung auf F^4 angehören, was nicht möglich.

Da nunmehr alle Flächen vierter Ordnung durch a, b^4 und c^4 mit a^4 die zwölf Punkte (4b), (4c), $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$, $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ gemein haben, so wird diejenige

Fläche dritter Ordnung F^3 unter ihnen, welche noch durch einen weiteren Punkt von a^4 geht, auch a^4 und in Folge dessen auch b und c enthalten. Diese Fläche F^3 ist die gesuchte. Zunächst nämlich können wir leicht ihre 24 übrigen Geraden finden. Es sind ja (4a), (4b), (4c) resp. die Spitzen der durch a^4, b^4, c^4 resp. gehenden Kegel zweiten Grades, weil F^4 eine desmische Fläche vierter Ordnung ist. Schneidet nun der etwa von a ausgehende Kegel durch a^4 die Gerade a in den beiden Punkten g und h, so sind $\overline{ag}$ und $\overline{ah}$ in F^3 enthalten; denn sie haben mit F^3 ausser a und g resp. h noch je die zwei Schnittpunkte mit a^4 gemein. So liefert also jeder der zwölf singulären Punkte von F^4 zwei gerade Linien von F^3, und nunmehr ist klar, dass F^4 der Ort der Spitzen der Kegel zweiten Grades ist, welche durch je drei Kegelschnitte k_a, k_b, k_c von F^3 gehen, die mit resp. a, b, c in einer Ebene liegen. Diese letzte Fläche hat nämlich mit F^4 erstens die sechzehn geraden Linien, die Verbindungslinien je dreier singulären Punkte, welche ja beiden Flächen gemeinsam sind, gemeinschaftlich. Nun ist weiter die Polarfläche von (b, c) für F^3 dadurch vollkommen bestimmt, dass sie durch (4b), (4c) und die Geraden b und c gehen muss, dieselbe ist also mit dem Hyperboloid H_a identisch. Dieses aber schneidet F^3 noch in der Curve a^4, durch welche der Ort der Kegelspitzen auch hindurchgehen muss. Hiermit ist also die Identität beider Flächen bewiesen.

Von den Punkten l_1, l_2, m_1, m_2, n_1, n_2 wissen wir jetzt folglich, dass sie die Ecken eines vollständigen Vierseits sind, dessen Seiten die F^4 zum vierten Male in vier auf derselben Geraden liegenden Punkten schneiden. Da nun in der Ebene ε sechs Strahlen jedes der drei Systeme Σ_a, Σ_b, Σ_c liegen, so können wir der F^4 sechs solche vollständige Fünfseite einschreiben. Wir erhalten also das Resultat, dass *die desmische Fläche vierter Ordnung von jeder Ebene in einer Curve vierter Ordnung geschnitten wird, welcher vollständige Fünfseite eingeschrieben werden können.*

Da jedes dieser sechs vollständigen Fünfseite eine ganze Schaar solcher nach sich zieht, so entsteht die Frage, ob diese sechs Schaaren hier wirklich verschieden sind. Es ist mir leider nicht gelungen, Aufschluss hierüber zu gewinnen.

Leipzig, im Februar 1883.

Zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen.

Abhandlung 3.

(Vergl. dieses Journal, Bd. 87, S. 199–216 und Bd. 88, S. 205–212.)

(Von Herrn *L. Kiepert* in Hannover.)

Ein Vortheil, den die von mir angegebene Methode zur Transformation der elliptischen Functionen bietet, besteht darin, dass die Entwickelung von

$$(1.)\quad \begin{cases} \Delta^{\frac{1}{12}} = \dfrac{\pi}{\omega} h^{\frac{1}{6}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty} (1-h^{2\nu})^2 = \dfrac{\pi}{\omega}\left[\sum\limits_{\lambda=-\infty}^{+\infty} (-1)^{\lambda} h^{\frac{(6\lambda+1)^2}{12}}\right]^2 \\ = \dfrac{\pi}{\omega} h^{\frac{1}{6}}(1-h^2-h^4+h^{10}+h^{14}-h^{24}-h^{30}+h^{44}+h^{52}-\cdots)^2 \end{cases}$$

und von $\Delta^{\frac{2}{12}}$, $\Delta^{\frac{3}{12}}$, ... nach Potenzen von h erforderlich ist, wo bei den Modulargleichungen die Entwickelung von

$$(2.)\quad \begin{cases} u = \sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\, h^{\frac{1}{4}} \prod\limits_{\nu=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+h^{2\nu}}{1+h^{2\nu-1}}\right) \\ = \sqrt{2}\, h^{\frac{1}{4}}(1-h+2h^2-3h^3+4h^4-6h^5+9h^6-12h^7+\cdots) \end{cases}$$

und von u^2, u^3, ... eintritt. (Vgl. *Sohncke*, dieses Journal, Bd. 16, S. 113). Dadurch wird in den numerischen Rechnungen eine wesentliche Vereinfachung erzielt, denn die Coefficienten in der Entwickelung von $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^n$ sind schon desshalb leichter aufzufinden, weil sie kleiner sind als in der von u^n. Ebenso kann man auch bei dieser Entwickelung das Gesetz leichter angeben, dem die Coefficienten unterworfen sind, so dass ihre Bildung *einzeln* möglich wird, unabhängig von allen übrigen Coefficienten in der Entwickelung von $\Pi(1-h^{2\nu})^n$, und unabhängig von den Coefficienten niedrigerer Potenzen von $\Pi(1-h^{2\nu})$.

Dieses Gesetz soll in der vorliegenden Abhandlung aufgefunden und zur Ausführung der Transformation 23ten Grades benutzt werden.

Auch weitere Relationen, die hier aber nur angedeutet werden sollen, finden zwischen diesen Coefficienten statt.

§ 1.

Entwickelung von $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^n$ nach Potenzen von h^2.

Setzt man

$$(3.)\qquad \prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^n = H_0(n)-H_1(n)h^2+H_2(n)h^4-H_3(n)h^6+\cdots = \sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^{\varkappa}H_{\varkappa}(n)h^{2\varkappa},$$

so erkennt man zunächst ohne Weiteres, dass $H_{\varkappa}(n)$ eine ganze Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades von n sein muss. Es ist nämlich, wenn man

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-\varkappa+1)}{1.2.3\dots\varkappa}$$

in der hergebrachten Weise mit $\binom{n}{\varkappa}$ oder kürzer mit $n_{\varkappa}$ bezeichnet, $n_{\varkappa}$ eine ganze Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades von n, und man erhält

$$(4.)\qquad \begin{cases} (1-h^2)^n &= 1-n_1h^2+n_2h^4-n_3h^6+\cdots+(-1)^{\varkappa}n_{\varkappa}h^{2\varkappa}+\cdots, \\ (1-h^4)^n &= 1-n_1h^4+n_2h^8-n_3h^{12}+\cdots, \\ \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (1-h^{2\varkappa})^n &= 1-n_1h^{2\varkappa}+\cdots. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen mit einander, so wird der Coefficient von $h^{2\varkappa}$ auf der rechten Seite genau $(-1)^{\varkappa}H_{\varkappa}(n)$, denn in $\prod\limits_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^n$ haben die Factoren $(1-h^{2\varkappa+2})^n$, $(1-h^{2\varkappa+4})^n$, ... keinen Einfluss mehr auf den Coefficienten von $h^{2\varkappa}$. Aus dieser Bildung folgt also unmittelbar, dass $H_{\varkappa}(n)$ eine ganze Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades von n ist. Desshalb kann man $H_{\varkappa}(n)$ auf die Form

$$(5.)\qquad H_{\varkappa}(n) = a_0n^{\varkappa}+a_1n^{\varkappa-1}+a_2n^{\varkappa-2}+\cdots+a_{\varkappa-1}n+a_{\varkappa}$$

bringen, wobei a_0, a_1, a_2, ... rationale Functionen von $\varkappa$ sind. Diese Darstellung von $H_{\varkappa}(n)$ ist aber noch nicht die zweckmässigste. Jede ganze Function $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades lässt sich nämlich auch als lineare Function von $\varkappa+1$ gegebenen Functionen $\varkappa^{\text{ten}}$ Grades ausdrücken, wenn diese von einander linear unabhängig sind. Der Fall, wo diese gegebenen Functionen wie in Gleichung (5.)

$$n^{\varkappa},\quad n^{\varkappa-1},\quad n^{\varkappa-2},\quad \dots\quad n,\quad n^0$$

sind, ist nur ein specieller, und es wird sehr häufig von Nutzen sein, andere Functionen, z. B. die Binomial-Coefficienten

$$n_{\varkappa},\quad n_{\varkappa-1},\quad n_{\varkappa-2},\quad \dots\quad n_1,\quad n_0$$

an ihre Stelle zu setzen. In dem vorliegenden Falle liegt es besonders

nahe, die Binomial-Coefficienten zu verwenden, da sie schon bei der Bildung von $H_\varkappa(n)$ auftreten. Man setze daher

$$(6.) \qquad H_\varkappa(n) = A_{\varkappa,0}n_\varkappa + A_{\varkappa,1}n_{\varkappa-1} + A_{\varkappa,2}n_{\varkappa-2} + \cdots + A_{\varkappa,\varkappa-1}n_1 + A_{\varkappa,\varkappa}n_0.$$

Wie vortheilhaft diese Verwendung der Binomial-Coefficienten ist, ersieht man schon daraus, dass man die unbestimmten Coefficienten $A_{\varkappa,\lambda}$ fast ohne Rechnung auffinden kann, wenn man den Werth von $H_\varkappa(n)$ für $n = 0, 1, 2, \ldots \varkappa$ kennt. Es wird nämlich

$$(7.) \quad \begin{cases} H_\varkappa(0) = A_{\varkappa,\varkappa}, \\ H_\varkappa(1) = A_{\varkappa,\varkappa-1} + A_{\varkappa,\varkappa}, \\ H_\varkappa(2) = A_{\varkappa,\varkappa-2} + 2A_{\varkappa,\varkappa-1} + A_{\varkappa,\varkappa}, \\ H_\varkappa(3) = A_{\varkappa,\varkappa-3} + 3A_{\varkappa,\varkappa-2} + 3A_{\varkappa,\varkappa-1} + A_{\varkappa,\varkappa}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Dabei folgt aus diesen Gleichungen (7.), dass die Coefficienten $A_{\varkappa,\varkappa}$, $A_{\varkappa,\varkappa-1}$, $A_{\varkappa,\varkappa-2}$, ... sämmtlich *ganze* Zahlen bedeuten, wenn $H_\varkappa(0)$, $H_\varkappa(1)$, $H_\varkappa(2)$, ... ganze Zahlen sind, eine Bedingung, die hier wirklich erfüllt ist.

Man kann aber die Bildung der Grössen $H_\varkappa(n)$ auch dadurch ausführen, dass man die Richtigkeit der Gleichung (6.) jedesmal durch den Schluss von n auf $n+1$ prüft. Es ist nämlich

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^{n+1} = (1-h^2-h^4+h^{10}+h^{14}-h^{24}-h^{30}+h^{44}+h^{52}-\cdots)\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^n,$$

oder

$$(8.) \qquad \sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^\varkappa H_\varkappa(n+1)h^{2\varkappa} = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}(-1)^\mu h^{\mu(3\mu+1)}\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda H_\lambda(n)h^{2\lambda},$$

also

$$(9.) \qquad \begin{aligned} H_\varkappa(n+1) = {} & H_\varkappa(n) + H_{\varkappa-1}(n) - H_{\varkappa-2}(n) - H_{\varkappa-5}(n) \\ & - H_{\varkappa-7}(n) - H_{\varkappa-12}(n) + H_{\varkappa-15}(n) + H_{\varkappa-22}(n) + \cdots, \end{aligned}$$

oder

$$(9^a.) \qquad H_\varkappa(n+1) = \Sigma(-1)^{\frac{\mu(3\mu-1)}{2}} H_{\varkappa-\frac{\mu(3\mu+1)}{2}}(n), \qquad (\mu = 0, \mp1, \mp2, \mp3, \ldots)$$

wobei die H mit negativem Index gleich Null zu setzen sind. Wendet man nun die bekannte Relation

$$(10.) \qquad (n+1)_\varkappa = n_\varkappa + n_{\varkappa-1}$$

an, so wird

$$\begin{aligned} H_\varkappa(n+1) = {} & A_{\varkappa,0}(n+1)_\varkappa + A_{\varkappa,1}(n+1)_{\varkappa-1} + A_{\varkappa,2}(n+1)_{\varkappa-2} + A_{\varkappa,3}(n+1)_{\varkappa-3} \\ & + A_{\varkappa,4}(n+1)_{\varkappa-4} + A_{\varkappa,5}(n+1)_{\varkappa-5} + \cdots \\ = {} & A_{\varkappa,0}n_\varkappa + A_{\varkappa,1}n_{\varkappa-1} + A_{\varkappa,2}n_{\varkappa-2} + A_{\varkappa,3}n_{\varkappa-3} + A_{\varkappa,4}n_{\varkappa-4} + A_{\varkappa,5}n_{\varkappa-5} + \cdots \\ & + A_{\varkappa,0}n_{\varkappa-1} + A_{\varkappa,1}n_{\varkappa-2} + A_{\varkappa,2}n_{\varkappa-3} + A_{\varkappa,3}n_{\varkappa-4} + A_{\varkappa,4}n_{\varkappa-5} + \cdots. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck muss aber nach Gleichung (9.) oder (9ª.) übereinstimmen mit

$$\begin{aligned} &A_{\varkappa,0}n_\varkappa+A_{\varkappa,1}\;\;n_{\varkappa-1}+A_{\varkappa,2}\;\;n_{\varkappa-2}+A_{\varkappa,3}\;\;n_{\varkappa-3}+A_{\varkappa,4}\;\;n_{\varkappa-4}+A_{\varkappa,5}\;\;n_{\varkappa-5}+\cdots\\ &\quad+A_{\varkappa-1,0}n_{\varkappa-1}+A_{\varkappa-1,1}n_{\varkappa-2}+A_{\varkappa-1,2}n_{\varkappa-3}+A_{\varkappa-1,3}n_{\varkappa-4}+A_{\varkappa-1,4}n_{\varkappa-5}+\cdots\\ &\qquad-A_{\varkappa-2,0}n_{\varkappa-2}-A_{\varkappa-2,1}n_{\varkappa-3}-A_{\varkappa-2,2}n_{\varkappa-4}-A_{\varkappa-2,3}n_{\varkappa-5}-\cdots\\ &\qquad\qquad-A_{\varkappa-5,0}n_{\varkappa-5}-\cdots. \end{aligned}$$

Dies giebt die Gleichungen

$$(11.)\quad \begin{cases} A_{\varkappa,0}=A_{\varkappa-1,0}=A_{\varkappa-2,0}=\cdots=A_{0,0}=1,\\ A_{\varkappa,1}=A_{\varkappa-1,1}-A_{\varkappa-2,0},\\ A_{\varkappa,2}=A_{\varkappa-1,2}-A_{\varkappa-2,1},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ A_{\varkappa,\lambda}=A_{\varkappa-1,\lambda}-A_{\varkappa-2,\lambda-1}-A_{\varkappa-5,\lambda-4}-A_{\varkappa-7,\lambda-6}-A_{\varkappa-12,\lambda-11}\\ \qquad\qquad+A_{\varkappa-15,\lambda-14}+A_{\varkappa-22,\lambda-21}+\cdots, \end{cases}$$

oder

$$(12.)\quad A_{\varkappa,\lambda}=\Sigma_\mu(-1)^{\frac{\mu(3\mu-1)}{2}}A_{\varkappa-\frac{\mu(3\mu+1)}{2},\,\lambda+1-\frac{\mu(3\mu+1)}{2}},$$

wobei $\mu=\mp1,\ \mp2,\ \mp3,\ \ldots$ und die Ausdrücke mit negativem Index gleich Null zu setzen sind.

Durch Anwendung dieser Formel (12.) findet man

$$\begin{cases} A_{\varkappa,0}=+\varkappa_0=1,\\ A_{\varkappa,1}=-(\varkappa-1)_1,\\ A_{\varkappa,2}=+(\varkappa-2)_2,\\ A_{\varkappa,3}=-(\varkappa-3)_3,\\ A_{\varkappa,4}=+(\varkappa-4)_4-(\varkappa-4)_1,\\ A_{\varkappa,5}=-(\varkappa-5)_5+2(\varkappa-5)_2,\\ A_{\varkappa,6}=+(\varkappa-6)_6-3(\varkappa-6)_3-(\varkappa-6)_1,\\ A_{\varkappa,7}=-(\varkappa-7)_7+4(\varkappa-7)_4+2(\varkappa-7)_2,\\ A_{\varkappa,8}=+(\varkappa-8)_8-5(\varkappa-8)_5-3(\varkappa-8)_3+(\varkappa-8)_2,\\ A_{\varkappa,9}=-(\varkappa-9)_9+6(\varkappa-9)_6+4(\varkappa-9)_4-3(\varkappa-9)_3,\\ A_{\varkappa,10}=+(\varkappa-10)_{10}-7(\varkappa-10)_7-5(\varkappa-10)_5+6(\varkappa-10)_4+2(\varkappa-10)_2,\\ A_{\varkappa,11}=-(\varkappa-11)_{11}+8(\varkappa-11)_8+6(\varkappa-11)_6-10(\varkappa-11)_5-6(\varkappa-11)_3\\ \qquad+0.(\varkappa-11)_2-(\varkappa-11)_1,\\ A_{\varkappa,12}=+(\varkappa-12)_{12}-9(\varkappa-12)_9-7(\varkappa-12)_7+15(\varkappa-12)_6+12(\varkappa-12)_4\\ \qquad-(\varkappa-12)_3+3(\varkappa-12)_2, \end{cases}$$

(13.)
$$\left\{\begin{aligned}
A_{\varkappa,13} &= -(\varkappa-13)_{13}+10(\varkappa-13)_{10}+8(\varkappa-13)_8-21(\varkappa-13)_7-20(\varkappa-13)_5\\
&\quad +4(\varkappa-13)_4-6(\varkappa-13)_3,\\
A_{\varkappa,14} &= +(\varkappa-14)_{14}-11(\varkappa-14)_{11}-9(\varkappa-14)_9+28(\varkappa-14)_8+30(\varkappa-14)_6\\
&\quad -10(\varkappa-14)_5+10(\varkappa-14)_4-3(\varkappa-14)_3+0.(\varkappa-14)_2+(\varkappa-14)_1,\\
A_{\varkappa,15} &= -(\varkappa-15)_{15}+12(\varkappa-15)_{12}+10(\varkappa-15)_{10}-36(\varkappa-15)_9-42(\varkappa-15)_7\\
&\quad +20(\varkappa-15)_6-15(\varkappa-15)_5+12(\varkappa-15)_4+0.(\varkappa-15)_3+0.(\varkappa-15)_2,\\
A_{\varkappa,16} &= +(\varkappa-16)_{16}-13(\varkappa-16)_{13}-11(\varkappa-16)_{11}+45(\varkappa-16)_{10}+56(\varkappa-16)_8\\
&\quad -35(\varkappa-16)_7+21(\varkappa-16)_6-30(\varkappa-16)_5+(\varkappa-16)_4-6(\varkappa-16)_3,\\
A_{\varkappa,17} &= -(\varkappa-17)_{17}+14(\varkappa-17)_{14}+12(\varkappa-17)_{12}-55(\varkappa-17)_{11}-72(\varkappa-17)_9\\
&\quad +56(\varkappa-17)_8-28(\varkappa-17)_7+60(\varkappa-17)_6-5(\varkappa-17)_5+20(\varkappa-17)_4\\
&\quad +0.(\varkappa-17)_3+2(\varkappa-17)_2,\\
A_{\varkappa,18} &= +(\varkappa-18)_{18}-15(\varkappa-18)_{15}-13(\varkappa-18)_{13}+66(\varkappa-18)_{12}+90(\varkappa-18)_{10}\\
&\quad -84(\varkappa-18)_9+36(\varkappa-18)_8-105(\varkappa-18)_7+15(\varkappa-18)_6\\
&\quad -45(\varkappa-18)_5+4(\varkappa-18)_4-7(\varkappa-18)_3-2(\varkappa-18)_2,\\
A_{\varkappa,19} &= -(\varkappa-19)_{19}+16(\varkappa-19)_{16}+14(\varkappa-19)_{14}-78(\varkappa-19)_{13}\\
&\quad -110(\varkappa-19)_{11}+120(\varkappa-19)_{10}-45(\varkappa-19)_9+168(\varkappa-19)_8\\
&\quad -35(\varkappa-19)_7+84(\varkappa-19)_6-20(\varkappa-19)_5+16(\varkappa-19)_4+3(\varkappa-19)_3,\\
A_{\varkappa,} &= +(\varkappa-20)_{20}-17(\varkappa-20)_{17}-15(\varkappa-20)_{15}+91(\varkappa-20)_{14}\\
&\quad +132(\varkappa-20)_{12}-165(\varkappa-20)_{11}+55(\varkappa-20)_{10}-252(\varkappa-20)_9\\
&\quad +70(\varkappa-20)_8-140(\varkappa-20)_7+60(\varkappa-20)_6-31(\varkappa-20)_5+6(\varkappa-20)_4\\
&\quad +0.(\varkappa-20)_3-2(\varkappa-20)_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right.$$

Bei Anwendung dieser Formeln (12.) oder (13.) können sehr leicht Rechenfehler gemacht werden, desshalb scheint es nicht überflüssig, zur Controle der Rechnungen noch eine zweite Recursionsformel für die Bildung der Grössen $A_{\varkappa,\lambda}$ anzugeben, die ebenso einfach ist wie die Formel (12.). Es ist nämlich

(14.)
$$\left\{\begin{aligned}
\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^3 &= 1-3h^2+5h^6-7h^{12}+9h^{20}-11h^{30}+\cdots\\
&= \sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}(2\mu+1)h^{\mu(\mu+1)},
\end{aligned}\right.$$

folglich wird

$$\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^{n+3} = (1-3h^2+5h^6-7h^{12}+9h^{20}-11h^{30}+\cdots)\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu})^n,$$

oder

(15.)
$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty}(-1)^{\varkappa}H_{\varkappa}(n+3)h^{2\varkappa} = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}H_{\lambda}(n)h^{2\lambda}\sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}(2\mu+1)h^{\mu(\mu+1)}.$$

Dies giebt

$$H_x(n+3) = H_x(n)+3H_{x-1}(n)-5H_{x-3}(n)-7H_{x-6}(n)+\cdots,$$

oder

$$(16.)\quad H_x(n+3) = \Sigma_\mu(-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}}(2\mu+1)H_{x-\frac{\mu(\mu+1)}{2}n}, \qquad (\mu=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Jetzt wird aber nach der Formel $(n+1)_x = n_x+n_{x-1}$

$$\begin{aligned}(n+3)_\lambda &= (n+2)_\lambda+(n+2)_{\lambda-1} = (n+1)_\lambda+2(n+1)_{\lambda-1}+(n+1)_{\lambda-2}\\ &= n_\lambda+3n_{\lambda-1}+3n_{\lambda-2}+n_{\lambda-3},\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}H_x(n+3) &= A_{x,0}(n+3)_x+A_{x,1}(n+3)_{x-1}+A_{x,2}(n+3)_{x-2}+\cdots\\ &= A_{x,0}n_x+(3A_{x,0}+A_{x,1})n_{x-1}+(3A_{x,0}+3A_{x,1}+A_{x,2})n_{x-2}\\ &\quad+(A_{x,0}+3A_{x,1}+3A_{x,2}+A_{x,3})n_{x-3}+\cdots,\end{aligned}$$

und dies muss nach Gleichung (16.) übereinstimmen mit

$$\begin{aligned}&A_{x,0}n_x+(A_{x,1}+3A_{x-1,0})n_{x-1}+(A_{x,2}+3A_{x-1,1})n_{x-2}+(A_{x,3}+3A_{x-1,2}-5A_{x-3,0})n_{x-3}\\ &+(A_{x,4}+3A_{x-1,3}-5A_{x-3,1})n_{x-4}+(A_{x,5}+3A_{x-1,4}-5A_{x-3,2})n_{x-5}\\ &+(A_{x,6}+3A_{x-1,5}-5A_{x-3,3}-7A_{x-6,0})n_{x-6}+\cdots.\end{aligned}$$

Daraus folgt daher allgemein

$$(17.)\quad \begin{cases}3A_{x,\lambda-1}+3A_{x,\lambda-2}+A_{x,\lambda-3} = 3A_{x-1,\lambda-1}-5A_{x-3,\lambda-3}-7A_{x-6,\lambda-6}+\cdots\\ \qquad = \sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}}(2\mu+1)A_{x-\frac{\mu(\mu+1)}{2},\,\lambda-\frac{\mu(\mu+1)}{2}}.\end{cases}$$

Die Summirung ist immmer soweit fortzusetzen, bis die Reihe abbricht, indem die Grössen mit negativen Indices gleich Null sind.

Aus diesen Methoden ergiebt sich folgende Tabelle:

$$\begin{cases}H_0(n) = 1,\\ H_1(n) = n_1,\\ H_2(n) = n_2-n_1,\\ H_3(n) = n_3-2n_2,\\ H_4(n) = n_4-3n_3+n_2,\\ H_5(n) = n_5-4n_4+3n_3+0.n_2-n_1,\\ H_6(n) = n_6-5n_5+6n_4-n_3-2n_2,\\ H_7(n) = n_7-6n_6+10n_5-4n_4-3n_3+2n_2-n_1,\\ H_8(n) = n_8-7n_7+15n_6-10n_5-3n_4+6n_3-2n_2,\\ H_9(n) = n_9-8n_8+21n_7-20n_6+0.n_5+12n_4-6n_3+2n_2,\end{cases}$$

(18.)

$$
\begin{aligned}
H_{10}(n) &= n_{10}-9n_9+28n_8-35n_7+9n_6+19n_5-16n_4+6n_3+n_2,\\
H_{11}(n) &= n_{11}-10n_{10}+36n_9-56n_8+28n_7+24n_6-35n_5+16n_4+0.n_3,\\
H_{12}(n) &= n_{12}-11n_{11}+45n_{10}-84n_9+62n_8+21n_7-65n_6+40n_5-6n_4-3n_3\\
&\quad +2n_2-n_1,\\
H_{13}(n) &= n_{13}-12n_{12}+55n_{11}-120n_{10}+117n_9+0.n_8-105n_7+90n_6-25n_5\\
&\quad -8n_4+6n_3-2n_2,\\
H_{14}(n) &= n_{14}-13n_{13}+66n_{12}-165n_{11}+200n_{10}-54n_9-148n_8+181n_7-75n_6\\
&\quad -10n_5+18n_4-9n_3+3n_2,\\
H_{15}(n) &= n_{15}-14n_{14}+78n_{13}-220n_{12}+319n_{11}-162n_{10}-177n_9+328n_8\\
&\quad -189n_7+6n_6+45n_5-28n_4+8n_3+0.n_2+n_1,\\
H_{16}(n) &= n_{16}-15n_{15}+91n_{14}-286n_{13}+483n_{12}-352n_{11}-160n_{10}+540n_9\\
&\quad -419n_8+77n_7+90n_6-75n_5+26n_4-6n_3+2n_2,\\
H_{17}(n) &= n_{17}-16n_{16}+105n_{15}-364n_{14}+702n_{13}-660n_{12}-44n_{11}+810n_{10}\\
&\quad -837n_9+280n_8+140n_7-180n_6+80n_5-20n_4+0.n_3,\\
H_{18}(n) &= n_{18}-17n_{17}+120n_{16}-455n_{15}+987n_{14}-1131n_{13}+252n_{12}+1100n_{11}\\
&\quad -1530n_{10}+755n_9+140n_8-385n_7+220n_6-60n_5+2n_4,\\
H_{19}(n) &= n_{19}-18n_{18}+136n_{17}-560n_{16}+1350n_{15}-1820n_{14}+845n_{13}\\
&\quad +1320n_{12}-2585n_{11}+1730n_{10}-54n_9-728n_8+546n_7-180n_6\\
&\quad +15n_5+12n_4-6n_3+2n_2,\\
H_{20}(n) &= n_{20}-19n_{19}+153n_{18}-680n_{17}+1804n_{16}-2793n_{15}+1897n_{14}\\
&\quad +1300n_{13}-4059n_{12}+3542n_{11}-749n_{10}-1197n_9+1232n_8\\
&\quad -511n_7+66n_6+45n_5-23n_4+6n_3-2n_2,\\
H_{21}(n) &= n_{21}-20n_{20}+171n_{19}-816n_{18}+2363n_{17}-4128n_{16}+3625n_{15}\\
&\quad +754n_{14}-5928n_{13}+6644n_{12}-2519n_{11}-1630n_{10}+2535n_9\\
&\quad -1336n_8+252n_7+110n_6-85n_5+32n_4-13n_3,\\
H_{22}(n) &= n_{22}-21n_{21}+190n_{20}-969n_{19}+3042n_{18}-5916n_{17}+6312n_{16}\\
&\quad -765n_{15}-8008n_{14}+11583n_{13}-6336n_{12}-1530n_{11}+4755n_{10}\\
&\quad -3204n_9+848n_8+203n_7-264n_6+115n_5-36n_4+3n_3-2n_2+n_1,\\
H_{23}(n) &= n_{23}-22n_{22}+210n_{21}-1140n_{20}+3857n_{19}-8262n_{18}+10319n_{17}\\
&\quad -3920n_{16}-9840n_{15}+18928n_{14}-13715n_{13}+240n_{12}+8085n_{11}\\
&\quad -7070n_{10}+2520n_9+224n_8-693n_7+360n_6-115n_5+28n_4-6n_3\\
&\quad +2n_2,\\
H_{24}(n) &= n_{24}-23n_{23}+231n_{22}-1330n_{21}+4825n_{20}-11286n_{19}+16098n_{18}\\
&\quad -9656n_{17}-10530n_{16}+29120n_{15}-26845n_{14}+5915n_{13}\\
&\quad +12255n_{12}-14410n_{11}+6700n_{10}-246n_9-1582n_8+1029n_7\\
&\quad -365n_6+90n_5-6n_4+3n_3-n_2,
\end{aligned}
$$

$$\left|\begin{array}{l} H_{25}(n) = n_{25} - 24n_{24} + 253n_{23} - 1540n_{22} + 5964n_{21} - 15124n_{20} + 24206n_{19} \\ \qquad -19278n_{18} - 8534n_{17} + 42208n_{16} - 48657n_{15} + 19460n_{14} \\ \qquad +15834n_{13} - 27192n_{12} + 16170n_{11} - 2450n_{10} - 3150n_9 + 2688n_8 \\ \qquad -1092n_7 + 264n_6 - 21n_5 + 4n_4, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Wendet man diese Formeln für specielle Werthe von n auf die Berechnung von $H_\varkappa(n)$ an, so tritt noch eine Reduction durch die Relation

$$n_\varkappa = n_{n-\varkappa}$$

ein; ausserdem ist es auch nicht nöthig, die Grössen $n_\varkappa$, $n_{\varkappa-1}$, ... alle zu bilden und mit den betreffenden Coefficienten zu multipliciren, sondern man vereinigt zunächst durch die Formel

$$n_\lambda = \frac{n-\lambda+1}{\lambda} n_{\lambda-1}$$

das erste Glied mit dem zweiten, sodann durch die Formel

$$n_{\lambda-1} = \frac{n-\lambda+2}{\lambda-1} n_{\lambda-2}$$

die Summe der beiden ersten Glieder mit dem dritten, u. s. w.

Führt man noch die Functionen

$$(19.)\quad \begin{cases} g_{0,\lambda}(n) = \lambda_0 n_\lambda - (\lambda-1)_1 n_{\lambda-1} + (\lambda-2)_2 n_{\lambda-2} - (\lambda-3)_3 n_{\lambda-3} + \cdots, \\ g_{1,\lambda}(n) = \lambda_1 n_\lambda - 2(\lambda-1)_2 n_{\lambda-1} + 3(\lambda-2)_3 n_{\lambda-2} - 4(\lambda-3)_4 n_{\lambda-3} + \cdots \\ \qquad = n_1 g_{0,\lambda-1}(n-1), \\ g_{2,\lambda}(n) = \lambda_2 n_\lambda - 3(\lambda-1)_3 n_{\lambda-1} + 6(\lambda-2)_4 n_{\lambda-2} - 10(\lambda-3)_5 n_{\lambda-3} + \cdots \\ \qquad = n_2 g_{0,\lambda-2}(n-2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{\varkappa,\lambda}(n) = \lambda_\varkappa n_\lambda - (\varkappa+1)_1(\lambda-1)_{\varkappa+1} n_{\lambda-1} + (\varkappa+2)_2(\lambda-2)_{\varkappa+2} n_{\lambda-2} \\ \qquad -(\varkappa+3)_3(\lambda-3)_{\varkappa+3} n_{\lambda-3} + \cdots = n_\varkappa g_{0,\lambda-\varkappa}(n-\varkappa) \end{cases}$$

ein, so kann man für $H_\varkappa(n)$ einen ganz allgemeinen Ausdruck angeben. Es wird nämlich

$$(20.)\quad \begin{cases} H_\varkappa = g_{0,\varkappa} - g_{1,\varkappa-4} - g_{1,\varkappa-6} + g_{2,\varkappa-8} + 2g_{2,\varkappa-10} - g_{1,\varkappa-11} + (g_{2,\varkappa-12} - g_{3,\varkappa-12}) \\ \quad + (g_{1,\varkappa-14} - 3g_{3,\varkappa-14}) + 2g_{2,\varkappa-15} + (-3g_{3,\varkappa-16} + g_{4,\varkappa-16}) + 2g_{2,\varkappa-17} \\ \quad + (-2g_{2,\varkappa-18} - g_{3,\varkappa-18} + 4g_{4,\varkappa-18}) - 3g_{3,\varkappa-19} + (-2g_{2,\varkappa-20} + 6g_{4,\varkappa-20} - g_{5,\varkappa-20}) \\ \quad + (g_{1,\varkappa-21} - 6g_{3,\varkappa-21}) + (g_{2,\varkappa-22} + 3g_{3,\varkappa-22} + 4g_{4,\varkappa-22} - 5g_{5,\varkappa-22}) \\ \quad + (-3g_{3,\varkappa-23} + 4g_{4,\varkappa-23}) + (6g_{3,\varkappa-24} + g_{4,\varkappa-24} - 10g_{5,\varkappa-24} + g_{6,\varkappa-24}) \\ \quad + (g_{1,\varkappa-25} - 4g_{2,\varkappa-25} + 12g_{4,\varkappa-25}) + \cdots, \end{cases}$$

wobei wieder alle Grössen mit negativen Indices gleich Null zu setzen sind. Die Richtigkeit der Formel (20.) beweist man wieder durch den Schluss von n auf $n+1$, indem man die Relationen

$$(21.) \quad g_{\varkappa,\lambda}(n+1) = g_{\varkappa,\lambda}(n)+g_{\varkappa,\lambda-1}(n)+g_{\varkappa-1,\lambda-1}(n)-g_{\varkappa,\lambda-2}(n)$$

berücksichtigt.

Wesentlich ist es, dass die gegebenen Formeln ebenso für alle *negativen* ganzzahligen Werthe von n gelten wie für *positive;* ja, sie bleiben sogar noch richtig für gebrochene Werthe von n.

§ 2.

Definition der L-Gleichung. Andere Relationen zwischen den Grössen $H_\varkappa(n)$.

Um noch andere Relationen zwischen den Grössen $H_\varkappa(n)$ herzuleiten und um Anwendungen der gegebenen Formeln zu machen, möge zunächst eine (auch für spätere Zwecke nothwendige) Umformung der Gleichungen vorgenommen werden, welche in Abhandlung 1. zur Transformation der elliptischen Functionen dienten.

Ist n eine von 2 und 3 verschiedene Primzahl, so wurde damals (S. 202) eine Function

$$(22.) \quad f = e^{-\frac{\eta\omega(n^2-1)}{12n}}\sigma\left(\frac{2\omega}{n}\right)\sigma\left(\frac{4\omega}{n}\right)\ldots\sigma\left(\frac{n-1}{n}\omega\right)$$

definirt, deren Quadrat einer leicht zu bildenden Gleichung $(n+1)^{\text{ten}}$ Grades genügt. Dabei sind die Coefficienten ganze, ganzzahlige Functionen von g_2 und g_3, dividirt durch eine Potenz von

$$(23.) \quad \Delta = g_2^3-27g_3^2.$$

Die übrigen Wurzeln dieser Gleichung sind

$$(24.) \quad f_r^2 = e^{-\frac{\tilde{\eta}\tilde{\omega}(n^2-1)}{6n}}\sigma^2\left(\frac{2\varpi}{n}\right)\sigma^2\left(\frac{4\varpi}{n}\right)\ldots\sigma^2\left(\frac{n-1}{n}\varpi\right),$$

wobei

$$(25.) \quad \varpi = \omega'+24r\omega$$

ist und r alle Werthe von 0 bis $n-1$ annimmt.

Man kann aber für die Grössen f und f_r noch eine andere Bedeutung angeben. Sind nämlich D und D_r die Grössen, in welche Δ bei Vertauschung der primitiven Perioden 2ω, $2\omega'$ mit $\frac{2\omega}{n}$, $2\omega'$ oder mit 2ω, $\frac{2\varpi}{n}$ übergeht, so wird

$$(26.) \qquad f = \left(\frac{D}{\Delta^n}\right)^{\frac{1}{24}}, \quad f_r = i^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{D_r}{\Delta^n}\right)^{\frac{1}{24}}.$$

Es wird nun, namentlich für die folgenden Abhandlungen, einfacher sein, statt der Grössen f, f_r, g_2, g_3 die Grössen

$$(27.) \quad L_x = \left(\frac{D}{\Delta}\right)^{\frac{1}{24}} = \Delta^{\frac{n-1}{24}} f, \; L_r = i^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{D_r}{\Delta}\right)^{\frac{1}{24}} = \Delta^{\frac{n-1}{24}} f_r, \; \gamma_2 = \frac{g_2}{\Delta^{\frac{1}{3}}}, \; \gamma_3 = \frac{g_3}{\Delta^{\frac{1}{2}}}$$

einzuführen*). Dadurch geht die früher aufgestellte Gleichung für f^2 durch Multiplication mit $\Delta^{\frac{n^2-1}{12}}$ über in eine Gleichung für L^2, deren Coefficienten ganze, ganzzahlige Functionen von γ_2 und γ_3 sind, und die fortan der Kürze wegen *L-Gleichung* genannt werden soll.

Aus den Gleichungen (27.) folgt nun

$$(28.) \quad \begin{cases} L_x^\alpha = \dfrac{n^{\frac{\alpha}{2}} h^{\frac{\alpha n}{12}} \Pi(1-h^{2n\nu})^\alpha}{h^{\frac{\alpha}{12}} \Pi(1-h^{2\nu})^\alpha} \\ \qquad = n^{\frac{\alpha}{2}} h^{\frac{\alpha(n-1)}{12}} \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda H_\lambda(\alpha) h^{2n\lambda} \sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^\mu H_\mu(-\alpha) h^{2\mu}, \\ L_r^\alpha = \dfrac{i^{\frac{\alpha(n-1)}{2}} \varepsilon^{\alpha r} h^{\frac{\alpha}{12n}} \Pi(1-h^{\frac{2\nu}{n}} \varepsilon^{24r\nu})^\alpha}{h^{\frac{\alpha}{12}} \Pi(1-h^{2\nu})^\alpha} \\ \qquad = i^{\frac{\alpha(n-1)}{2}} \varepsilon^{\alpha r} h^{-\frac{\alpha(n-1)}{12n}} \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda H_\lambda(\alpha) h^{\frac{2\lambda}{n}} \varepsilon^{24r\lambda} \sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^\mu H_\mu(-\alpha) h^{2\mu}, \end{cases}$$

wobei $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ ist. Diese Entwickelungen werden benutzt zur Bildung der L-Gleichungen. Für $n = 5$ ist z. B.

$$L^{12} + 10L^6 - 12\gamma_2 L^2 + 5 = 0.$$

Hierbei ist

$$\Sigma L^2 = L_x^2 + \sum_{r=0}^{r=4} L_r^2$$

$$= 5h^{\frac{2}{3}} \sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^\mu H_\mu(-2) h^{2\mu} \Big[\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda H_\lambda(2) h^{10\lambda} + \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu H_{5\nu+2}(2) h^{2\nu} \Big] = 0,$$

also

$$(29.) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda H_\lambda(2) h^{10\lambda} + \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu H_{5\nu+2}(2) h^{2\nu} = 0.$$

Da diese Gleichung für alle Werthe von h gilt, so folgt daraus für alle

*) Diese Grösse L wird hoffentlich nicht verwechselt werden mit der in Abhandlung 2. (S. 206) vorübergehend benutzten Function L. Jetzt hat L^3 dieselbe Bedeutung wie in jener Abhandlung die Grösse Γ.

Werthe von $\lambda = 0$ bis $\lambda = +\infty$

(30.) $H_{25\lambda+2}(2)+H_{\lambda}(2) = 0,\ H_{25\lambda+7}(2) = H_{25\lambda+12}(2) = H_{25\lambda+17}(2) = H_{25\lambda+22}(2) = 0.$

In derselben Weise findet man aus $\Sigma L^4 = 0$ die Relationen

$$(31.)\qquad 5\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}H_{\lambda}(4)h^{10\lambda}+\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}H_{5\nu+4}(4)h^{2\nu} = 0$$

und

(32.) $H_{25\lambda+4}(4)+5H_{\lambda}(4) = 0,\ H_{25\lambda+9}(4) = H_{25\lambda+14}(4) = H_{25\lambda+19}(4) = H_{25\lambda+24}(4) = 0.$

Dagegen wird

$$\begin{aligned}\Sigma L^6 &= \sum_{\mu=0}^{\infty}(-1)^{\mu}H_{\mu}(-6)h^{2\mu}\Big[125h^2\sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^{\lambda}H_{\lambda}(6)h^{10\lambda}-5\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^{\nu}H_{5\nu+1}(6)h^{2\nu}\Big]\\ &= 5[-H_1(6)+\{25+H_6(6)+H_1(-6)H_1(6)\}h^2\\ &\qquad -\{H_{11}(6)+H_1(-6)(25+H_6(6))+H_2(-6)H_1(6)\}h^4+\cdots],\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$(33.)\quad \left|\begin{aligned} &\Sigma L^6 = -5H_1(6) = -30,\\ &25+H_6(6) = -H_1(-6)H_1(6),\\ &H_{11}(6) = -H_1(-6)(25+H_6(6))-H_2(-6)H_1(6),\\ &H_{16}(6) = -H_1(-6)H_{11}(6)-H_2(-6)(25+H_6(6))-H_3(-6)H_1(6),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

Indem man in dieser Weise fortfährt, findet man aus der L-Gleichung für $n=5$ eine zweifach unendliche Anzahl von Relationen zwischen den Grössen $H_x(n)$.

Ebenso kann man auch die L-Gleichungen für $n = 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$ zur Herleitung neuer Relationen benutzen.

§ 23.

Anwendung auf die Transformation 23ten Grades.

Die Modulargleichung für $n = 23$ ist bis jetzt noch nicht in ***rationaler*** Form hergestellt worden; nur Herr *Schröter* hat in seiner interessanten Dissertation (De aequationibus modularibus, Königsberg 1854) diese Modulargleichung in ***irrationaler*** Form angegeben, wie folgt:

$$(34.)\quad \left\{\begin{aligned} &+\sqrt[8]{\frac{1+k}{2}\cdot\frac{1+\lambda}{2}\sqrt{k\lambda}\,\{\sqrt{(1+\sqrt{1-k})(1+\sqrt{1-\lambda})}+\sqrt{(1-\sqrt{1-k})(1-\sqrt{1-\lambda})}\}(\sqrt{k}-\sqrt{\lambda})}\\ &+\sqrt[8]{\frac{1-k}{2}\cdot\frac{1-\lambda}{2}\sqrt{k\lambda}\,\{\sqrt{(\sqrt{1+k}+1)(\sqrt{1+\lambda}+1)}+\sqrt{(\sqrt{1+k}-1)(\sqrt{1+\lambda}-1)}\}(\sqrt{k}+\sqrt{\lambda})}\\ &=\sqrt[8]{\frac{1+k_1}{2}\cdot\frac{1+\lambda_1}{2}\sqrt{k_1\lambda_1}\,\{\sqrt{(1+\sqrt{1-k_1})(1+\sqrt{1-\lambda_1})}+\sqrt{(1-\sqrt{1-k_1})(1-\sqrt{1-\lambda_1})}\}(\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{k_1})}\\ &+\sqrt[8]{\frac{1-k_1}{2}\cdot\frac{1-\lambda_1}{2}\sqrt{k_1\lambda_1}\,\{\sqrt{(\sqrt{1+k_1}+1)(\sqrt{1+\lambda_1}+1)}+\sqrt{(\sqrt{1+k_1}-1)(\sqrt{1+\lambda_1}-1)}\}(\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{k_1})} \end{aligned}\right.$$

Die in dem Vorhergehenden entwickelten Formeln machen jetzt aber die Herleitung der L-Gleichung für $n = 23$ auch in rationaler Form ohne bedeutende Schwierigkeit möglich.

Zunächst findet man nach den Angaben von Abhandlung 1. ohne Rechnung für diese L-Gleichung die Form

$$(35.)\quad \begin{cases} L^{48} + 23\,[c_1 L^{36} + c_2\gamma_2 L^{32} + c_3\gamma_3 L^{30} + c_4\gamma_2^2 L^{28} + c_5\gamma_2\gamma_3 L^{20} + (c_6\gamma_2^3 + c_7) L^{24} \\ + c_8\gamma_2 L^{20} + c_9\gamma_3 L^{18} + c_{10}\gamma_2^2 L^{16} + c_{11}\gamma_2\gamma_3 L^{14} + (c_{12}\gamma_2^3 + c_{13}) L^{12} + c_{14}\gamma_2^2\gamma_3 L^{10} \\ + (c_{15}\gamma_2^4 + c_{16}\gamma_2) L^8 + (c_{17}\gamma_2^3\gamma_3 + c_{18}\gamma_3) L^6 + (c_{19}\gamma_2^5 + c_{20}\gamma_2^2) L^4] \\ + (c_{21}\gamma_2^4\gamma_3 + c_{22}\gamma_2\gamma_3) L^2 - 23 \;=\; 0. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (28.) ergiebt sich alsdann

$$(36.)\quad \begin{cases} L_\infty^\alpha \;=\; 23^{\frac{\alpha}{2}} h^{\frac{11\alpha}{6}} \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda H_\lambda(\alpha) h^{46\lambda} \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu H_\mu(-\alpha) h^{2\mu}, \\ L_r^\alpha \;=\; i^{11\alpha} \varepsilon^{\alpha r} h^{-\frac{11\alpha}{138}} \sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda H_\lambda(\alpha) h^{\frac{2\lambda}{23}} \varepsilon^{24r\lambda} \sum\limits_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu H_\mu(-\alpha) h^{2\mu}, \end{cases}$$

oder

$$(36^a.)\quad \begin{cases} L_\infty^\alpha \;=\; 23^{\frac{\alpha}{2}} h^{\frac{11\alpha}{6}} [1 - H_1(\alpha) h^{46} + H_2(\alpha) h^{92} + \cdots][1 - H_1(-\alpha) h^2 + H_2(-\alpha) h^4 + \cdots], \\ L_r^\alpha \;=\; i^{11\alpha} \varepsilon^{\alpha r} h^{-\frac{11\alpha}{138}} [1 - H_1(\alpha) h^{\frac{2}{23}} \varepsilon^{24r} + H_2(\alpha) h^{\frac{4}{23}} \varepsilon^{48r} + \cdots][1 - H_1(-\alpha) h^2 + \cdots]. \end{cases}$$

Daraus folgt

$\Sigma L^2 = 0,$	$\Sigma L^4 = 0,$
$\Sigma L^6 = 0,$	$\Sigma L^8 = 0,$
$\Sigma L^{10} = 0,$	$\Sigma L^{12} = -23 H_{11}(12),$
$\Sigma L^{14} = 0,$	$\Sigma L^{16} = -23 H_7(16).12\gamma_2,$
$\Sigma L^{18} = +23 H_5(18).216\gamma_3,$	$\Sigma L^{20} = -23 H_3(20).12^2\gamma_2^2,$
$\Sigma L^{22} = +23 H_1(22).12\gamma_2.216\gamma_3,$	$\Sigma L^{24} = +23 H_{22}(24),$
$\Sigma L^{26} = 0,$	$\Sigma L^{28} = +23 H_{18}(28).12\gamma_2,$

. . . .

Schliesslich findet man hieraus die noch unbekannten Zahl-Coefficienten $c_1, c_2, c_3, \ldots$ der L-Gleichung durch Anwendung der *Newton*schen Formeln. Selbstverständlich muss man dabei auch die Grössen γ_2, γ_3 nach Potenzen von h entwickeln, und zwar erhält man nach den in Abhandlung 1. gegebenen Ausdrücken

$$(37.)\quad \begin{cases} 12\gamma_2 \;=\; h^{-\frac{2}{3}}(1 + 248h^2 + \cdots), \\ 216\gamma_3 \;=\; h^{-1}(1 - 492h^2 + \cdots). \end{cases}$$

Die letzten Coefficienten der L-Gleichung findet man übrigens noch ein-

facher, wenn man den Werth von L_x^2 in die Gleichung einsetzt. Wie man nämlich aus den Gleichungen (36.) ersieht, beginnt die Entwickelung von L_x^{29} mit $23^{14}h^{29}$, ... die Entwickelung von L_x^4 mit $23^2h^{\frac{22}{3}}$ und die von L_x^2 mit $23h^{\frac{11}{3}}$. Daraus schliesst man, dass bei der Entwickelung aller Glieder der L-Gleichung nach Potenzen von h Glieder mit h^0 und h^2 nur in

$$(c_{21}\gamma_2^4\gamma_3 - c_{23}\gamma_2\gamma_3^3)L^2 - 23$$

auftreten können. Da nun aber die Coefficienten von h^0 und h^2 einzeln gleich Null sein müssen, so erhält man zwei lineare Gleichungen zur Bestimmung von c_{21} und c_{23}.

Glieder mit h^4 und h^6 treten nur in der Entwickelung von

$$23(c_{25}\gamma_2^5 + c_{27}\gamma_2^3\gamma_3^2)L^4 - (c_{21}\gamma_2^4\gamma_3 - c_{23}\gamma_2\gamma_3^3)L^2$$

auf; und da nun die Coefficienten von h^4 und h^6 einzeln gleich Null sein müssen, so findet man daraus c_{25} und c_{27}.

Dieses Verfahren kann man jetzt beliebig weit fortsetzen, doch wird man es zweckmässiger Weise nicht auf die Berechnung vieler Coefficienten anwenden, weil man sehr bald auf ausserordentlich grosse Zahlen stösst, wenn man die Entwickelung von $12\gamma_2$, $216\gamma_3$ nach Potenzen von h auf eine grössere Anzahl von Gliedern ausdehnt.

Hierdurch findet man die L-Gleichung für $n = 23$, wie folgt:

$$\begin{aligned}
&L^{48} + 23[684L^{34} - 208.12\gamma_2 L^{32} + 138.216\gamma_3 L^{30} + 76.12^2\gamma_2^2 L^{28} \\
&- 2.12\gamma_2.216\gamma_3 L^{26} + 3826738 L^{24} - 2631456.12\gamma_2 L^{22} \\
&+ 3151332.216\gamma_3 L^{18} + 5454584.12^2\gamma_2^2 L^{16} + 2732604.12\gamma_2.216\gamma_3 L^{14} \\
&+ (643643.12^3\gamma_2^3 - 3224219652)L^{12} + 81332.12^2\gamma_2^2.216\gamma_3 L^{10} \\
&+ (5814.12^4\gamma_2^4 + 343305200.12\gamma_2)L^8 - (235.12^3\gamma_2^3.216\gamma_3 \\
&- 20169438.216\gamma_3)L^6 + (5.12^5\gamma_2^5 + 123292.12^2\gamma_2^3)L^4] \\
&+ (12^4\gamma_2^4.216\gamma_3 - 502.12\gamma_2.216\gamma_3)L^2 - 23 = 0.
\end{aligned} \tag{38.}$$

Die Bildung der L-Gleichungen für $n = 29, 31, 37, \ldots$ ist hier absichtlich noch nicht ausgeführt, weil man dabei sehr erfolgreich ein Hülfsmittel verwerthen kann, von dem in einer der nächsten Abhandlungen die Rede sein wird.

Hannover, im April 1883.

Druckfehler-Verzeichniss
für Abhandlung 1, dieses Journal, Band 87, S. 199—216.

S. 203, Z. 1 von unten $e^{-\frac{\bar{\eta}\bar{\omega}(n^2-1)}{12n}}$ statt $e^{-\frac{\eta\bar{\omega}(n^2-1)}{12n}}$,

S. 204, Z. 9 von oben $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{\frac{2\nu}{n}}\varepsilon^{2\nu r})$ statt $\prod_{\nu=1}^{\infty}(1-h^{2\nu}\varepsilon^{2\nu r})$,

S. 205, Z. 8 „ „ $(-1)^g i^{\frac{n-1}{2}} f\sqrt{n}$ statt $(-1)^g f\sqrt{(-1)^{\frac{n-1}{2}}n}$,

S. 213, Z. 2 „ unten $e^{-\frac{3\eta u^2}{2\omega}}$ statt $e^{\frac{3\eta u^2}{2\omega}}$, (zweimal),

S. 214, Z. 11 „ „ $\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$ statt $\left(\frac{\pi}{\omega}\right)$,

S. 214, Z. 10 „ „ $\left(\frac{n\pi}{\omega}\right)^{\frac{1}{2}}$ statt $\left(\frac{n\pi}{\omega}\right)$,

S. 214, Z. 10 „ „ $e^{-\frac{n\bar{\eta}u^2}{2\omega}}$ statt $e^{-\frac{\bar{\eta}u^2}{2\omega}}$.

Sur la formation des déterminants irréguliers.

(Par M. *Joseph Perott* à Port-Navalo)

Nous allons d'abord rappeler deux théorèmes de *Gauss*, qui vont servir de base à notre théorie*).

Théorème I. *Le nombre des solutions de l'équivalence*

$$x^{p^\pi} \sim 1 \quad (\text{det. } D)$$

où p désigne un nombre premier, 1 la forme principale et x une forme proprement primitive de déterminant D, est égal à 1 ou à une puissance de p.

Théorème II. *Soit*

$$h = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

(où a, b, c, ... désignent des nombres premiers différents) le nombre des classes proprement primitives appartenant au genre principal du déterminant D, les équivalences

$$x^{a^\alpha} \sim 1 \quad (\text{det. } D),$$
$$x^{b^\beta} \sim 1 \quad (\text{det. } D),$$
$$x^{c^\gamma} \sim 1 \quad (\text{det. } D),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

auront respectivement a^α, b^β, c^γ, ... solutions, si x désigne une forme proprement primitive appartenant au genre principal du déterminant D.

Tirons quelques conséquences de ces théorèmes de l'immortel auteur des *Disquisitiones arithmeticae.*

Remarque I. Il arrive souvent que toutes les racines**) de l'équivalence

$$x^{a^\alpha} \sim 1 \quad (\text{det } D)$$

*) Werke, t. II p. 266–268.

**) Nous ne considérerons désormais que des formes proprement primitives appartenant au genre principal.

satisfont à une équivalence d'un degré inférieur à a^α

$$x^{a^{\alpha-\varkappa}} \sim 1 \quad (\text{det.}\, D).$$

On peut choisir le nombre $\varkappa$ de manière qu'il y ait des formes appartenant à l'exposant $a^{\alpha-\varkappa}$. Le nombre $\varkappa$ qui se trouve ainsi parfaitement déterminé, sera d'ailleurs inférieur à α. Je dis que si $\varkappa$ est différent de zéro, l'équivalence

$$x^a \sim 1 \quad (\text{det.}\, D)$$

admettra au moins a^2 racines. En effet, le nombre des solutions de l'équivalence *)

$$x^{a^{\alpha-\varkappa-1}} \sim 1 \quad (\text{det.}\, D)$$

étant inférieur à a^α, doit être inférieur ou égal à $a^{\alpha-1}$. Dans le premier cas, parmi les puissances a-ièmes des racines de l'équivalence

$$x^{a^{\alpha-\varkappa}} \sim 1 \quad (\text{det.}\, D)$$

il y en aura au moins a^2 qui seront équivalentes à une même forme: l'exactitude de ce que nous venons d'énoncer en est alors la conséquence immédiate. Dans le second cas, on peut considérer les équivalences

$$x^{a^{\alpha-\varkappa-1}} \sim 1 \quad (\text{det.}\, D),$$
$$x^{a^{\alpha-\varkappa-2}} \sim 1 \quad (\text{det.}\, D),$$

et en continuant toujours le même raisonnement de proche en proche, on parviendra à se convaincre de l'exactitude de la proposition énoncée.

Inversement, si l'équivalence

$$x^a \sim 1 \quad (\text{det.}\, D)$$

admet plus de a racines, le nombre $\varkappa$ sera différent de zéro.

En effet, si l'on avait $\varkappa = 0$, il y aurait des formes appartenant à l'exposant a^α, et toutes les racines de l'équivalence

$$x^{a^\alpha} \sim 1 \quad (\text{det.}\, D)$$

pourraient alors être représentées comme puissances d'une racine primitive. Les puissances divisibles par $a^{\alpha-1}$ d'une racine primitive donneraient dans ce cas toutes les solutions de l'équivalence

$$x^a \sim 1 \quad (\text{det.}\, D)$$

qui seraient par conséquent au nombre de a, ce qui est contraire à notre supposition. *Donc, etc.*

---

*) On peut évidemment supposer $\alpha - \varkappa - 1 > 0$, car dans le cas contraire le théorème serait évident.

Remarque II. Il suit de la remarque précédente que, pour construire un déterminant irrégulier, il suffit de former artificiellement une équivalence

$$x^a \sim 1 \quad (\text{det. } D)$$

admettant plus de a racines. Il suit encore de la remarque précédente que tous les déterminants irréguliers peuvent être formés de cette manière. Expliquons tout cela par des exemples.

Ex. I. L'équivalence

$$x^3 \sim 1 \quad (\text{det. } 10333)$$

admet les neuf racines suivantes

$$(1, 0, -10333), \quad (3, \pm 1, -3444), \quad (4, \pm 1, -2583), \quad (11, \pm 2, -939),$$
$$(12, \pm 1, -861).$$

Il s'ensuit que le déterminant 10333 est irrégulier et que son exposant d'irrégularité est divisible*) par 3. En effet, on trouve que l'exposant d'irrégularité de 10333 est égal à trois.

Ex. II. L'équivalence

$$x^5 \sim 1 \quad (\text{det.} -336697)$$

admet les vingt-cinq racines suivantes:

$$(1, 0, 336697), \quad (13, \pm 4, 25901), \quad (41, \pm 6, 8213), \quad (169, \pm 17, 1994),$$
$$(101, \pm 21, 3338), \quad (394, \pm 31, 857), \quad (82, \pm 35, 4121), \quad (533, \pm 35, 634),$$
$$(353, \pm 154, 1021), \quad (377, \pm 160, 961), \quad (409, \pm 201, 922),$$
$$(461, \pm 201, 818), \quad (577, \pm 257, 698).$$

Il s'ensuit que le déterminant -336697 est irrégulier et que son exposant d'irrégularité est divisible par cinq. En effet, on trouve que l'exposant d'irrégularité de ce déterminant est égal à cinq.

Passons maintenant à la formation des déterminants irréguliers ayant des exposants d'irrégularité divisibles par un nombre premier p donné à l'avance.

Soit

$$(a, b, c)$$

une racine de l'équivalence

$$x^p \sim 1 \quad (\text{det. } D)$$

différente de la forme principale. En formant la puissance p-ième de

*) Comp. l'art. 55 des *Disquisitiones.*

(a, b, c) d'après la méthode de *Gauss**), on obtient une forme

$$\left(\frac{a^p}{\mu^2}, B, C\right).$$

Cette dernière forme devant être équivalente à la forme principale, on en tire

$$\frac{a^p}{\mu^2} = x^2 - Dy^2$$

et par conséquent

$$a^p = \xi^2 - D\eta^2$$

et le plus grand commun diviseur de ξ et η sera égal à μ. L'exposant d'irrégularité de D étant supposé divisible par p, il existera une forme

$$(a_1, b_1, c_1)$$

différente d'une puissance de

$$(a, b, c)$$

et ayant pour puissance p-ième la forme principale. On aura de même

$$a_1^p = \xi_1^2 - D\eta_1^2.$$

L'élimination de D entre les deux équations précédentes**) nous donne

$$\eta_1^2 a^p - \eta^2 a_1^p = \xi^2\eta_1^2 - \eta^2\xi_1^2 = (\xi\eta_1 + \eta\xi_1)(\xi\eta_1 - \eta\xi_1).$$

En donnant à a, a_1, η, η_1 des valeurs entières quelconques, on obtiendra un système de valeurs correspondantes de ξ et de ξ_1. Les valeurs entières correspondantes de ξ et de ξ_1 pourront servir à la formation d'un déterminant irrégulier. Nous avons supposé que la forme

$$(a, b, c)$$

n'était pas équivalente à la forme principale et que la forme

$$(a_1, b_1, c_1)$$

était différente d'une puissance de

$$(a, b, c).$$

Pour s'assurer de ce fait, il faut d'abord déterminer b et b_1. Il est évident que B n'est autre chose que la valeur à laquelle appartient la représentation

$$\frac{a^p}{\mu^2} = \frac{\xi^2}{\mu^2} - D\frac{\eta^2}{\mu^2}$$

où μ désigne le plus grand commun diviseur de ξ et η. Il s'agit donc de

---

*) *Disquisitiones arithmeticae*, art. 243.

**) Si l'on avait $\eta = 0$ ou $\eta_1 = 0$, ce qui ne peut avoir lieu que pour $a^p = \mu^2$ ou $a_1^p = \mu_1^2$, il faudrait choisir d'autres représentants.

déterminer une forme

$$(a,\ b,\ c)$$

telle qu'en l'élevant à la puissance p-ième d'après la méthode de ***Gauss***, on obtienne la forme

$$\left(\frac{a^p}{\mu^2},\ B,\ \frac{(B^2-D)\mu^2}{a^p}\right).$$

Le nombre a étant connu, on pourra toujours trouver b après quelques tâtonnements*), si toutefois la forme

$$(a,\ b,\ c)$$

existe. On déterminera de la même manière la forme

$$(a_1,\ b_1,\ c_1)$$

et l'on s'assurera facilement si les conditions exigées sont remplies. Dans ce cas le déterminant sera sûrement irrégulier. Quand $p = 2$, il faut encore s'assurer que les formes intiales (que nous avons toujours supposées proprement primitives) appartiennent au genre principal. Citons en finissant les déterminants -468 et -931 omis par *Gauss* dans l'énumération des déterminants irréguliers inférieurs à mille.

---

*) Ces tâtonnements peuvent être réduits à peu de chose à l'aide de l'article 243,5 des *Disquisitiones*. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce sujet.

Port-Navalo, le 10 mai 1883.

Notiz über Gleichungen, deren Discriminante ein Quadrat ist.

(Von Herrn *E. Netto.*)

Es sei die irreductible Gleichung

$$(G.) \quad x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0$$

gegeben, deren Coefficienten einem bestimmten Rationalitätsbereiche

$$(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \mathfrak{R}''', \ldots)$$

angehören, und deren Wurzeln mit $x_1, x_2, \ldots x_n$ bezeichnet werden mögen. Wenn man die Function

$$\sqrt{\Delta} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)\ldots(x_{n-1} - x_n)$$

dem Rationalitätsgebiete adjungirt, so dass also die in $(\mathfrak{R}', \mathfrak{R}'', \ldots)$ rationale Function Δ ein Quadrat wird, dann erscheint die *Galois*sche Gruppe der Gleichung $(G.)$ entweder als die alternirende Gruppe der n Elemente x_λ selbst oder als eine Untergruppe derselben. Wenn umgekehrt die Gruppe der Gleichung $(G.)$ mit der alternirenden Gruppe der Wurzeln identisch ist oder unter ihr steht, dann gehört $\sqrt{\Delta}$ zum Rationalitätsbereiche der Gleichung, und Δ wird ein Quadrat. Hieraus folgt als unmittelbar ersichtlich z. B., dass die Discriminante einer jeden *Abel*schen Gleichung ungeraden Grades ein Quadrat ist, dass von den auflösbaren Gleichungen eines Primzahlgrades p nur diejenigen eben diese Eigenschaft besitzen, welche zu der halbmetacyklischen Gruppe gehören, u. s. f.

Von diesen einfachen Betrachtungen ausgehend, kann man zu einigen Aufschlüssen über eine Frage gelangen, welche Herr *L. Kronecker* in seiner „Festschrift" S. 38 erwähnt hat. Er hebt daselbst hervor, dass die Aufgabe, alle Gleichungen eines bestimmten Affects aufzustellen, durchaus arithmetischer Natur, dass sie eine sogenannte Diophantische Aufgabe für den gegebenen Rationalitätsbereich sei. Selbst in dem einfachsten Falle, in welchem es sich um die alternirende Gattung handele, wo also die Glei-

chung nur vom zweiten Grade werde, sei die Aufgabe für ein allgemeines n noch nicht gelöst. — An diesen einfachsten Fall will ich hier anknüpfen, an die Aufstellung aller Gleichungen eines gegebenen Rationalitätsbereiches, deren Discriminante ein Quadrat ist; die Gleichungen sollen zunächst dadurch charakterisirt und specialisirt werden, dass ihre Wurzeln als rationale Functionen $\varphi_\lambda(x_1, x_2, \dots x_n)$ von n unbestimmten und von einander unabhängigen Grössen $x_1, x_2, \dots x_n$ darstellbar sind. Ist ausserdem die Gattung einer dieser conjugirten rationalen Functionen φ_λ bekannt, so ist dadurch auch die Gleichung, um die es sich handelt, ihrer Klasse nach völlig bestimmt.

Verstehen wir jetzt unter $\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)$ eine beliebige rationale, ϱ-werthige Function der Wurzeln $x_1, x_2, \dots x_n$ von $(G.)$, so genügen die ϱ Werthe $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\varrho$ derselben einer Gleichung ϱ^{ten} Grades

$$(\Phi.) \qquad \varphi^\varrho - d_1\varphi^{\varrho-1} + d_2\varphi^{\varrho-2} - \cdots \pm d_\varrho = 0,$$

deren Coefficienten rationale Functionen von $c_1, c_2, \dots c_n$ sind. Die Frage, *wann die Discriminante D_Φ von $(\Phi.)$ ein Quadrat ist*, wird nach unseren ersten Auseinandersetzungen identisch mit der Frage, unter welchen Umständen die *Galois*sche Gruppe Σ der Gleichung $(\Phi.)$ unter der alternirenden Gruppe von $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\varrho$ steht. Diese Gruppe Σ, welche die Entscheidung liefert, wird folgendermassen gefunden: Auf den Complex $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\varrho$ der Werthe von φ wendet man die $n!$ Substitutionen der symmetrischen Gruppe S von $x_1, x_2, \dots x_n$ an. Hierdurch entstehen $n!$ Complexe $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots \varphi_{i_\varrho}$; der Uebergang von der ersten zu jeder dieser neuen Anordnungen kann als eine Substitution der ϱ Elemente φ gedeutet werden; der Inbegriff eben dieser Substitutionen constituirt die Gruppe Σ von $(\Phi.)$.

Bezeichnen wir eine beliebige Transposition der x, z. B. (x_1x_2) mit t, so entspricht derselben eine gewisse Substitution τ unter den φ, welche, wie t, von der zweiten Ordnung sein muss, da auch $t^2 = 1$ und τ^2 einander entsprechen, und da zu jeder Substitution der einen Gruppe eine einzige der anderen gehört. Demnach entsprechen allen Transpositionen $t, t', t'', \dots$ aus S, welche ja einander ähnlich sind, Substitutionen $\tau, \tau', \tau'', \dots$ aus Σ, welche deshalb auch unter einander ähnlich sein müssen. Ist eine beliebige Substitution s von S durch μ Transpositionen darstellbar, so kann die entsprechende Substitution σ aus Σ durch die entsprechenden μ Substitutionen $\tau, \tau', \dots$ gebildet werden. Die Substitutionen s der alternirenden Gruppe sind durch ein geradzahliges μ charakterisirt; demgemäss gehören die entsprechenden σ der alternirenden Gruppe der φ an. Die übrigen $\frac{1}{2}n!$ Sub-

stitutionen σ' von Σ werden dagegen dann und nur dann zur alternirenden Gruppe der φ gehören, wenn schon τ unter ihr steht. τ ist von der Ordnung zwei, befindet sich also in der alternirenden Gruppe, wenn die Anzahl der Cyklen gerade und daher die Anzahl der umgestellten Werthe von φ durch vier theilbar ist.

So kommen wir zur Beantwortung der oben aufgeworfenen Frage: ***Die Discriminante D_Φ ist dann und nur dann ein Quadrat, wenn die Anzahl der Werthe von φ, welche in denselben beiden Elementen x_1, x_2 nicht symmetrisch sind, durch vier theilbar ist.*** Da ein unter der Gattung der alternirenden Functionen von x_1, x_2, ... x_n stehendes $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ bei der Anwendung einer beliebigen Transposition t alle seine Werthe ändert, so ergiebt sich als Folgerung: ***Für eine unter der alternirenden Gattung der x stehende Function $\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ ist die Discriminante Δ_Φ der Gleichung $(\Phi.)$ dann und nur dann ein Quadrat, wenn der Grad dieser Gleichung durch vier theilbar ist.*** —

Unsere bisherigen Betrachtungen gelten ferner, wenn wir die Wurzeln φ_1, φ_2, ... φ_ϱ als Functionen von n Grössen x_1, x_2, ... x_n ansehen, zwischen denen irgend eine algebraische Relation herrscht. Dann tritt die Gleichung $(G.)$ in eine gewisse *Klasse* ein, und an die Stelle der allgemeinen Gruppe S tritt für die Bildung von Σ die *Affect-Gruppe* von G. Die hierdurch charakterisirten Gleichungen sind die allgemeinen, d. h. beliebige specielle. Aber hier schwindet dann auch die präcise Ausdrucksweise für den obigen Satz. An die Stelle von t tritt eine beliebige von den Substitutionen aus der Affect-Gruppe von G, welche nicht zur alternirenden Gruppe von x_1, x_2, ... x_n gehören, und man findet als Antwort auf die allgemeine Frage: ***Wendet man auf die Anordnung φ_1, φ_2, ... φ_ϱ eine von den, nicht zur alternirenden Gruppe der x_1, x_2, ... x_n gehörigen Substitutionen aus der Affect-Gruppe der Klasse an, und kann die resultirende neue Anordnung φ_{i_1}, φ_{i_2}, ... φ_{i_ϱ} durch eine gerade Anzahl von Transpositionen $(\varphi_\alpha \varphi_\beta)$ aus der ersteren abgeleitet werden, dann und nur dann ist Δ_Φ ein Quadrat.***

Berlin, den 15. Mai 1883.

Zur Theorie der Flächen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen confocale Flächen zweiten Grades sind.

(Von Herrn *F. Rudio* in Zürich.)

In meiner Dissertation*) habe ich die Gleichungen derjenigen Flächen aufgesucht, deren Krümmungsmittelpunktsflächen confocale Flächen zweiten Grades sind. Diese Flächen beanspruchen ein gewisses Interesse wegen ihres Zusammenhanges mit den geodätischen Linien auf den Flächen zweiten Grades. In der That ist die Aufgabe, die Gleichungen jener Flächen zu finden, nicht wesentlich verschieden von der Forderung, die Bogenlänge einer geodätischen Linie auf einer Fläche zweiten Grades zu bestimmen. Ich habe diese Aufgabe in meiner Dissertation gelöst, indem ich mich der Methode bediente, welche Herr *Kummer*, auf dessen Veranlassung die Arbeit entstanden war, in seiner Theorie der Strahlensysteme entwickelt hat. Betrachtet man nämlich dasjenige Strahlensystem vierter Ordnung und vierter Klasse, dessen Brennflächen aus zwei confocalen Flächen zweiten Grades bestehen, so handelt es sich darum, diejenige Fläche aufzufinden, für welche dieses Strahlensystem das Normalensystem ist.

Die damals angestellten Rechnungen waren nun trotz des elementaren Charakters der Lösung so complicirt, dass es mir wünschenswerth erschien, mit Beibehaltung der *Kummer*schen Methode die damals gefundenen Resultate auf einem kürzeren Wege abzuleiten.

I.

Es möge zunächst die folgende Aufgabe gelöst werden:

Es seien zwei confocale Flächen zweiten Grades (λ) und (μ), welche nicht von derselben Art sein sollen, durch die Gleichungen gegeben

*) Berlin 1880. Mayer und Müller.

$$\frac{x^2}{a^2-\lambda}+\frac{y^2}{b^2-\lambda}+\frac{z^2}{c^2-\lambda} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu} = 1.$$

Durch einen beliebigen Punkt der Fläche (λ) gehen alsdann zwei gerade Linien, welche die beiden Flächen (λ) und (μ) berühren. Es sollen die Richtungscosinus dieser beiden Geraden bestimmt werden.

Die beiden Geraden liegen erstens auf der durch den Punkt (xyz) gehenden Tangentialebene der Fläche (λ) und zweitens auf dem Tangentialkegel, der von (xyz) an die Fläche (μ) gelegt werden kann. Bezeichnen wir mit ξ, η, ζ die Richtungscosinus einer der beiden Geraden, so sind ξ, η, ζ aus den beiden Gleichungen zu berechnen

$$(1.)\quad \begin{cases} \left(\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}-1\right)\left(\frac{\xi^2}{a^2-\mu}+\frac{\eta^2}{b^2-\mu}+\frac{\zeta^2}{c^2-\mu}\right) \\ -\left(\frac{x\xi}{a^2-\mu}+\frac{y\eta}{b^2-\mu}+\frac{z\zeta}{c^2-\mu}\right)^2 = 0, \quad \frac{x\xi}{a^2-\lambda}+\frac{y\eta}{b^2-\lambda}+\frac{z\zeta}{c^2-\lambda} = 0, \end{cases}$$

indem wir Kegel und Tangentialebene parallel mit sich selbst nach dem Coordinatenanfang verschoben denken. Durch den Punkt (xyz) der Fläche (λ) gehen nun noch zwei weitere confocale Flächen (u) und (v), welche durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2-u}+\frac{y^2}{b^2-u}+\frac{z^2}{c^2-u} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2-v}+\frac{y^2}{b^2-v}+\frac{z^2}{c^2-v} = 1$$

bestimmt sind. Die Grössen u, v, λ werden dann als die elliptischen Coordinaten des Punktes (xyz) bezeichnet. Die drei Flächen (u), (v) und (λ) schneiden sich bekanntlich rechtwinklig, bestimmen also in (xyz) drei auf einander senkrecht stehende Geraden. Diese Geraden, die Normalen der Flächen (u), (v), (λ) in (xyz), bilden mit den Coordinatenaxen resp. die Richtungscosinus

$$\frac{p_1 x}{a^2-u}, \quad \frac{p_1 y}{b^2-u}, \quad \frac{p_1 z}{c^2-u},$$
$$\frac{p_2 x}{a^2-v}, \quad \frac{p_2 y}{b^2-v}, \quad \frac{p_2 z}{c^2-v},$$
$$\frac{p_3 x}{a^2-\lambda}, \quad \frac{p_3 y}{b^2-\lambda}, \quad \frac{p_3 z}{c^2-\lambda},$$

wenn wir mit p_1, p_2, p_3 die Senkrechten bezeichnen, die man vom Coordinaten-

anfang aus auf die Tangentialebenen der Flächen (u), (v), (λ) im Punkte $(x\,y\,z)$ fällen kann. Führt man nun die Richtungen jener drei Normalen als neue Coordinatenrichtungen ein und bezeichnet mit ξ', η', ζ' die Richtungscosinus des Strahles ξ, η, ζ in Bezug auf das neue System, so hat man die Transformationsformeln

$$\xi = \xi' \frac{p_1 x}{a^2-u} + \eta' \frac{p_2 x}{a^2-v} + \zeta' \frac{p_3 x}{a^2-\lambda},$$

$$\eta = \xi' \frac{p_1 y}{b^2-u} + \eta' \frac{p_2 y}{b^2-v} + \zeta' \frac{p_3 y}{b^2-\lambda},$$

$$\zeta = \xi' \frac{p_1 z}{c^2-u} + \eta' \frac{p_2 z}{c^2-v} + \zeta' \frac{p_3 z}{c^2-\lambda}.$$

In dem neuen Coordinatensystem werden dann aber Tangentialkegel und Tangentialebene, welche in dem alten System durch die Gleichungen (1.) repräsentirt wurden, durch die Gleichungen dargestellt*)

$$(2.) \qquad \frac{\xi'^2}{\mu-u} + \frac{\eta'^2}{\mu-v} + \frac{\zeta'^2}{\mu-\lambda} = 0, \quad \zeta' = 0.$$

Berücksichtigt man die Gleichung

$$\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2 = 1,$$

so folgt

$$\xi' = \sqrt{\frac{\mu-u}{v-u}}, \quad \eta' = \sqrt{\frac{\mu-v}{u-v}}, \quad \zeta' = 0.$$

Setzt man diese Werthe in die Transformationsformeln ein, so erhält man die gesuchten Richtungscosinus

$$\xi = x\left(\frac{p_1}{a^2-u}\sqrt{\frac{\mu-u}{v-u}} + \frac{p_2}{a^2-v}\sqrt{\frac{\mu-v}{u-v}}\right),$$

$$\eta = y\left(\frac{p_1}{b^2-u}\sqrt{\frac{\mu-u}{v-u}} + \frac{p_2}{b^2-v}\sqrt{\frac{\mu-v}{u-v}}\right),$$

$$\zeta = z\left(\frac{p_1}{c^2-u}\sqrt{\frac{\mu-u}{v-u}} + \frac{p_2}{c^2-v}\sqrt{\frac{\mu-v}{u-v}}\right).$$

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$U = \sqrt{\frac{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}{(\lambda-u)(\mu-u)}}, \quad V = \sqrt{\frac{(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}{(\lambda-v)(\mu-v)}}.$$

Dann ist**)

$$p_1 = U\sqrt{\frac{\mu-u}{v-u}}; \quad p_2 = V\sqrt{\frac{\mu-v}{u-v}};$$

---

*) Vgl. *Salmon-Fiedler*, Raumgeom. Bd. 1 pag. 200.

**) Vgl. *Salmon-Fiedler*, pag. 196.

folglich

$$(3.)\quad \begin{cases} \xi = x\left\{\frac{U}{a^2-u}\frac{\mu-u}{v-u}+\frac{V}{a^2-v}\frac{\mu-v}{u-v}\right\}, \\ \eta = y\left\{\frac{U}{b^2-u}\frac{\mu-u}{v-u}+\frac{V}{b^2-v}\frac{\mu-v}{u-v}\right\}, \\ \zeta = z\left\{\frac{U}{c^2-u}\frac{\mu-u}{v-u}+\frac{V}{c^2-v}\frac{\mu-v}{u-v}\right\}. \end{cases}$$

Dass die Grössen U und V für die in Betracht kommenden Werthsysteme u, v reell sind, habe ich in meiner Dissertation nachgewiesen. Die Vorzeichen von U und V sind willkürlich (natürlich in den drei Formeln auf die gleiche Weise) zu fixiren. Die drei Gleichungen bestimmen dann die Richtungen der beiden durch x, y, z hindurchgehenden gemeinschaftlichen Tangenten von (λ) und (μ). Da x, y, z bekannte Functionen von u, v sind, so haben wir damit ξ, η, ζ als Functionen den beiden Variabeln u, v dargestellt.

II.

Bezeichnet man jetzt mit x', y', z', die Coordinaten eines beliebigen Punktes auf dem durch (xyz), ξ, η, ζ bestimmten Strahle und mit ϱ seinen Abstand von dem Punkte (xyz), so ist

$$x' = x+\varrho\xi, \quad y' = y+\varrho\eta, \quad z' = z+\varrho\zeta.$$

Da x, y, z; ξ, η, ζ bekannte Functionen von u, v sind, so stellen diese Gleichungen das Strahlensystem vierter Ordnung und vierter Klasse dar, dessen Brennflächen die beiden confocalen Flächen (λ) und (μ) sind.

Soll jetzt der Punkt $(x'y'z')$ einer Fläche angehören, zu welcher der durch (xyz), ξ, η, ζ bestimmte Strahl normal ist, so muss sein

$$\xi dx'+\eta dy'+\zeta dz' = 0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} dx' &= dx+\xi d\varrho+\varrho d\xi, \\ dy' &= dy+\eta d\varrho+\varrho d\eta, \\ dz' &= dz+\zeta d\varrho+\varrho d\zeta. \end{aligned}$$

Setzt man dies in die Gleichung

$$\xi dx'+\eta dy'+\zeta dz' = 0$$

ein und berücksichtigt

$$\begin{aligned} \xi^2+\eta^2+\zeta^2 &= 1, \\ \xi d\xi+\eta d\eta+\zeta d\zeta &= 0, \end{aligned}$$

so erhält man die Differentialgleichung

$$-d\varrho = \xi dx + \eta dy + \zeta dz$$

oder

$$(4.) \quad -d\varrho = \left(\xi\frac{\partial x}{\partial u} + \eta\frac{\partial y}{\partial u} + \zeta\frac{\partial z}{\partial u}\right)du + \left(\xi\frac{\partial x}{\partial v} + \eta\frac{\partial y}{\partial v} + \zeta\frac{\partial z}{\partial v}\right)dv.$$

Dieser Differentialgleichung kann nur von einem solchen Strahlensysteme genügt werden, welches die Bedingung erfüllt

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\xi\frac{\partial x}{\partial u} + \eta\frac{\partial y}{\partial u} + \zeta\frac{\partial z}{\partial u}\right\} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\xi\frac{\partial x}{\partial v} + \eta\frac{\partial y}{\partial v} + \zeta\frac{\partial z}{\partial v}\right\},$$

wie man ja auch im Allgemeinen nicht zwei beliebige Flächen als die beiden Schalen der Centrenfläche einer noch zu suchenden Fläche ansehen kann.

Bilden wir nun für unser Strahlensystem zunächst den Ausdruck $\xi\frac{\partial x}{\partial u} + \eta\frac{\partial y}{\partial u} + \zeta\frac{\partial z}{\partial u}$, indem wir die Werthe für ξ, η, ζ aus den Gleichungen (3.) einsetzen und die Relationen berücksichtigen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-\lambda}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}\sqrt{\frac{a^2-v}{a^2-u}},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-\lambda}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}}\sqrt{\frac{b^2-v}{b^2-u}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2-\lambda}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}\sqrt{\frac{c^2-v}{c^2-u}},$$

so finden wir unmittelbar

$$\xi\frac{\partial x}{\partial u} + \eta\frac{\partial y}{\partial u} + \zeta\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{2U}.$$

Ebenso

$$\xi\frac{\partial x}{\partial v} + \eta\frac{\partial y}{\partial v} + \zeta\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{2V}.$$

Unsere Differentialgleichung (4.) geht daher jetzt über in die Form

$$-d\varrho = \tfrac{1}{2}\left(\frac{du}{U} + \frac{dv}{V}\right),$$

in welcher die Variabeln getrennt sind. Wir erhalten also

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\left(\int\frac{du}{U} + \int\frac{dv}{V}\right).$$

Die Gleichungen der Flächen, deren Krümmungsmittelpunktsflächen confocale Flächen zweiten Grades sind, lauten demnach

$$x' = x + \varrho\xi, \quad y' = y + \varrho\eta, \quad z' = z + \varrho\zeta,$$

wo jetzt x, y, z, ξ, η, ζ und ϱ bekannte Functionen der beiden Veränderlichen u und v sind.

III.

Aus dem bekannten Zusammenhange der Krümmungslinien einer Fläche mit den geodätischen Linien der Krümmungsmittelpunktsfläche folgt nun, dass

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\left(\int\frac{du}{U} + \int\frac{dv}{V}\right)$$

zugleich die Länge des von einem festen Anfangspunkte bis zum Punkte u, v gerechneten Bogens einer geodätischen Linie der Fläche (λ) ist. In der That ist die hier durch ganz elementare Betrachtungen abgeleitete Formel identisch mit derjenigen, welche *Jacobi* (Vorlesungen über Dynamik pag. 214) entwickelt hat. Wenn wir bei der hier befolgten Methode nur zwei der durch den Punkt u, v gehenden geodätischen Linien der Fläche (λ) erhalten, so kommt dies daher, dass durch die Wahl der confocalen Fläche (μ) aus der Schaar der durch u, v gehenden geodätischen Linien zwei ausgesondert werden, diejenigen nämlich, deren Tangenten die Fläche (μ) berühren. Eine Variation der Grösse μ würde sämmtliche geodätischen Linien der Fläche (λ) ergeben. Die Grösse μ spielt daher die Rolle der ersten Integrationsconstanten, derselben, welche bei *Jacobi* a. a. O. mit β bezeichnet ist. In der That wird dort auch für β dieselbe Intervallbestimmung ausgeführt, welcher die Grösse μ unterworfen ist. Die specielle Anordnung unserer Aufgabe hat also eine Integration gewissermassen von selbst geleistet.

Aus den Gleichungen (2.) folgt nun unmittelbar, dass die Winkel der beiden durch u, v gehenden geodätischen Linien durch die Axen, d. h. durch die beiden zum Punkte u, v gehörigen Krümmungslinien der Fläche (λ) halbirt werden, ein Resultat, welches sich auch sehr leicht aus den Gleichungen (3.) ableiten lässt. Man kann daher den in *Hesses* Raumgeometrie (pag. 330) ausgesprochenen Satz auch folgendermassen formuliren:

Die unendlich vielen durch einen Punkt u, v einer Fläche zweiten Grades (λ) gehenden geodätischen Linien lassen sich, entsprechend der Integrationsconstanten β, d. h. der Grösse μ, in Paare zerlegen, deren Anfangsrichtungen symmetrisch zu den Anfangsrichtungen der beiden durch u, v gehenden Krümmungslinien der Fläche (λ) liegen. Die sämmtlichen Tangenten der beiden geodätischen Linien eines jeden Paares umhüllen eine und dieselbe zur Fläche (λ) confocale Fläche (μ).

Ein specieller Fall dieses Satzes ist der folgende:

Durch jeden Punkt u, v eines Ellipsoides kann man zwei durch die Kreispunkte desselben gehende geodätische Linien construiren. Die Winkel derselben werden durch die zu u, v gehörigen Krümmungslinien halbirt.

Man erhält diesen Specialfall nämlich, indem man $\lambda=0$ und $\mu=b^2$ setzt.

IV.

Aus den Formeln (3.) kann man mit Leichtigkeit die durch die beiden Berührungspunkte einer gemeinschaftlichen Tangente der beiden confocalen Flächen (λ) und (μ) bestimmte Strecke r berechnen.

Bezeichnet man nämlich mit $x_1 y_1 z_1$ die Coordinaten des Punktes, in welchem die durch $(x\,y\,z)$, ξ, η, ζ bestimmte gemeinschaftliche Tangente die Polarebene des Punktes $(x\,y\,z)$ in Bezug auf die Fläche (μ) trifft, so ist

$$x_1 = x+r\xi, \quad y_1 = y+r\eta, \quad z_1 = z+r\zeta.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung der Polarebene ein, so kommt

$$\frac{xx_1}{a^2-\mu}+\frac{yy_1}{b^2-\mu}+\frac{zz_1}{c^2-\mu} = 1$$

oder

$$(5.) \qquad \frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}-1+r\left\{\frac{x\xi}{a^2-\mu}+\frac{y\eta}{b^2-\mu}+\frac{z\zeta}{c^2-\mu}\right\} = 0.$$

Setzen wir nun für ξ, η, ζ ihre Werthe ein und berücksichtigen die bekannten Relationen *)

$$\frac{x^2}{a^2-\mu}+\frac{y^2}{b^2-\mu}+\frac{z^2}{c^2-\mu}-1 = \frac{(\mu-u)(\mu-v)(\mu-\lambda)}{(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)} = S,$$

$$\frac{x^2}{(a^2-u)(a^2-\mu)}+\frac{y^2}{(b^2-u)(b^2-\mu)}+\frac{z^2}{(c^2-u)(c^2-\mu)} = \frac{S}{\mu-u},$$

$$\frac{x^2}{(a^2-v)(a^2-\mu)}+\frac{y^2}{(b^2-v)(b^2-\mu)}+\frac{z^2}{(c^2-v)(c^2-\mu)} = \frac{S}{\mu-v},$$

so geht die Gleichung (5.) über in

$$S+r\left\{U\frac{\mu-u}{v-u}\frac{S}{\mu-u}+V\frac{\mu-v}{u-v}\frac{S}{\mu-v}\right\} = 0.$$

Hieraus findet man den bereits in meiner Dissertation auf anderem Wege abgeleiteten einfachen Ausdruck

$$r = \frac{u-v}{U-V}.$$

*) Vergl. *Salmon-Fiedler* pag. 201.

Zürich, den 2. April 1883.

Ueber abhängige Punktsysteme und deren Bedeutung für die reciproke Verwandtschaft zweier Ebenen.

(Fortsetzung der beiden Arbeiten: „Ueber abhängige Punktsysteme“ dieses Journal Bd. 88 und „Zur Theorie der reciproken Verwandtschaft“ dieses Journal Bd. 90)*).

(Von Herrn *Rosanes* in Breslau.)

Die folgenden Seiten sind dazu bestimmt, die in zwei früheren Arbeiten enthaltenen Untersuchungen zu ergänzen und in einigen Punkten fortzuführen. Die Betrachtung beschränkt sich auf ternäre Gebiete. Es werden zuerst einige wichtige besondere Fälle abhängiger Systeme von Elementenpaaren erledigt; die hierbei sich ergebenden Relationen werden dazu verwendet, um Beziehungen zwischen polaren Systemen einer oder mehrerer bilinearen Formen aufzustellen, welche wiederum bekannte Sätze aus der Theorie der Kegelschnitte als specielle Fälle in sich enthalten. Sodann wird ein Satz abgeleitet, welcher für die reciproke Verwandtschaft zweier Ebenen an sich einiges Interesse haben möchte, insbesondere aber für die Construction der Systeme polarer Vierseite (wenn die Elemente durch Punkte dargestellt werden) von Wichtigkeit ist. Zuletzt führt die Auffassung einer dreigliedrigen Gruppe von Formen auf die algebraische Aufgabe, *drei bilineare Formen gleichzeitig aus denselben vier speciellen Formen zusammenzusetzen*. Es zeigt sich, dass dies nur dann möglich ist, sobald eine gewisse Invariante (Combinante) verschwindet, was zugleich zur Folge hat, dass jene *drei Formen durch Anwendung einer linearen Transformation* auf ein System der Variabeln *gleichzeitig in symmetrische Formen sich überführen lassen*.

§ 1.

Wie früher gezeigt wurde (Abh. P. S. p. 249), gehört zu fünf Paaren von Elementen zweier ternären Gebiete im Allgemeinen ein sechstes Paar

*) In der Folge wird die erstere unter „Abh. P. S.“, die zweite unter „rec. V.“ citirt.

in dem Sinne, dass dieselben insgesammt ein abhängiges System bilden. Es ist zu erwarten, dass in besonderen Fällen schon vier Paare ein abhängiges fünftes nach sich ziehen werden. Die Frage nach den charakteristischen Eigenschaften eines solchen Systems von fünf abhängigen Paaren beantwortet sich leicht mit Hülfe der a. a. O. angewandten Methode. Sehen wir die Elemente als Punkte zweier Ebenen an und bezeichnen dieselben durch (α^1, β^1), (α^2, β^2), ... (α^5, β^5), so bilden dieselben ein abhängiges System, sobald die Constanten ϱ_1, ϱ_2, ... ϱ_5 sich derart bestimmen lassen, dass die Identität stattfindet:

$$\varrho_1 u(\alpha^1) v(\beta^1) + \varrho_2 u(\alpha^2) v(\beta^2) + \cdots + \varrho_5 u(\alpha^5) v(\beta^5) = 0,$$

in welcher, wie schon früher $\alpha_1^k \alpha_2^k \alpha_3^k$ die Trilinearcoordinaten des Punktes α^k sind und auch die anderen Zeichen die in den angeführten Arbeiten angegebene Bedeutung haben sollen. In dem Falle, wo die Punkte α, β je einer Geraden angehören, lässt sich die obige Identität jederzeit erfüllen. Sieht man daher von dieser besondern Lage ab, so ist es erlaubt anzunehmen, dass drei Punkte des einen Gebiets z. B. α^1, α^2, α^3 nicht auf einer und derselben Geraden liegen. Beschränkt man jetzt die Variabeln v durch die lineare Gleichung $v(\beta^5) = 0$ und bezeichnet die hierdurch aus $v(\beta^r)$ hervorgehende binäre Form durch $\overline{v(\beta^r)}$, so ergiebt sich aus (1.) die viergliedrige Gleichung:

$$\varrho_1 u(\alpha^1) \overline{v(\beta^1)} + \varrho_2 u(\alpha^2) \overline{v(\beta^2)} + \varrho_3 u(\alpha^3) \overline{v(\beta^3)} + \varrho_4 u(\alpha^4) \overline{v(\beta^4)} = 0.$$

Da die Grössen u völlig unbeschränkt sind, so bedeutet diese Gleichung:

Die vier Punkte β^1, β^2, β^3, β^4 erscheinen von β^5 aus unter demselben Doppelverhältniss, wie α^1, α^2, α^3, α^4 von irgend einem Punkte ihrer Ebene aus.

Da, wie wir annehmen, die Elemente jeder Ebene verschieden sind, und α^1, α^2, α^3 nicht in einer Geraden liegen, so erscheinen α^1, α^2, α^3, α^4 nicht von jedem Punkte aus unter gleichem Doppelverhältniss. Es kann mithin jene Gleichheit nur in dem Sinne statthaben, dass $\beta^5(\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4)$ unbestimmt ist, d. h. dass β^5 und drei der übrigen, z. B. β^5, β^1, β^2, β^3, in einer Geraden gelegen sind. Durch Einführung einer anderen linearen Gleichung $v(\beta^4) = 0$ wird man zu der Annahme gezwungen, dass von den vier Strahlen $\beta^4(\beta^1, \beta^2, \beta^3, \beta^5)$ ebenfalls drei zusammenfallen, folglich liegen β^1, β^2, β^3, β^4, β^5 sämmtlich in einer und derselben Geraden. Die successive Einführung der Gleichungen $u(\alpha^4) = 0$, $u(\alpha^5) = 0$ in die Gleichung (1.) führt aber auf die Relationen:

$$\alpha^5(\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4) = (\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4),$$
$$\alpha^4(\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^5) = (\beta^1\beta^2\beta^3\beta^5),$$

d. h. damit fünf Punktepaare $(\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4\alpha^5)$, $(\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4\beta^5)$ ein abhängiges System bilden, müssen die Punkte der einen Ebene z. B. $\beta^1 \ldots \beta^5$ einer und derselben *Geraden angehören und überdies die Beziehungen statthaben*

$$(\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4\beta^5) \overline{\wedge} (\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4\alpha^5)$$

(die Doppelverhältnisse sind auf dem durch $\alpha^1 \ldots \alpha^5$ gehenden Kegelschnitte zu verstehen).

Diese Bedingungen sind auch hinreichend. Denn aus der Gleichung

$$\alpha^5(\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4) = (\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4)$$

folgt, dass ein Ausdruck von der Gestalt

$$\sigma_1 u(\alpha^1)v(\beta^1) + \sigma_2 u(\alpha^2)v(\beta^2) + \sigma_3 u(\alpha^3)v(\beta^3) + \sigma_4 u(\alpha^4)v(\beta^4)$$

existirt, welcher unter der Bedingung $u(\alpha^5) = 0$ identisch verschwindet, d. h. es besteht die Beziehung (für jedes System u, v)

$$\sigma_1 u(\alpha^1)v(\beta^1) + \sigma_2 u(\alpha^2)v(\beta^2) + \sigma_3 u(\alpha^3)v(\beta^3) + \sigma_4 u(\alpha^4)v(\beta^4) + \sigma_5 u(\alpha^5)v(\theta) = 0,$$

wo θ ein noch unbekannter Punkt ist. Setzt man in diese Gleichung $u(\alpha^1) = 0$, so folgt, dass $\beta^2\beta^3\beta^4\theta$ von jedem Punkte aus unter demselben Doppelverhältniss erscheinen wie $\alpha^2\alpha^3\alpha^4\alpha^5$ von α^1 aus, folglich ist θ mit β^5 identisch, w. z. b. w.

Ein anderer besonderer Fall ist der, in welchem zu fünf unabhängigen Punktepaaren auf unendlich viele Arten ein abhängiges sechstes bestimmt werden kann. Es tritt dies immer dann ein, wenn die zur Bestimmung des abhängigen sechsten Paares dienenden Gleichungen*) aufhören von einander unabhängig zu sein. Die geometrische Deutung der erforderlichen Bedingungen ergiebt als Resultat:

Das zu fünf Punktepaaren $\begin{matrix}\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4\alpha^5\\ \beta^1\beta^2\beta^3\beta^4\beta^5\end{matrix}$ *gehörige abhängige sechste hört auf bestimmt zu sein, sobald die Relationen stattfinden:*

$$\alpha^5(\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^4) = \beta^5(\beta^1\beta^2\beta^3\beta^4),$$
$$\alpha^4(\alpha^1\alpha^2\alpha^3\alpha^5) = \beta^4(\beta^1\beta^2\beta^3\beta^5),$$

d. h. sobald die fünf Punkte α den Punkten β collinear verwandt sein können, und umgekehrt.

Um daher auszudrücken, dass fünf Paare von Punkten in Collineation stehen, kann man sagen, dass das abhängige sechste Paar unbestimmt ist.

*) „Rec. V." p. 309—10.

Aus dem Gesagten folgt unmittelbar:

Bilden sieben Punktepaare $\begin{matrix}\alpha^1\alpha^2\ldots\alpha^7\\ \beta^1\beta^2\ldots\beta^7\end{matrix}$ *ein abhängiges System in zweifacher Weise, so liegen sowohl die Punkte* α *als die Punkte* β *auf einem Kegelschnitt und bilden projectivisch verwandte Punktreihen.*

§ 2.

Zwei bilineare Formen $f(x, y)$, $f'(x, y)$ haben ein Paar polarer Dreiseite gemeinsam, dagegen unendlich viele Systeme polarer Vierseite. Unter Benutzung des oben ausgesprochenen Satzes folgt aus der an anderer Stelle („rec. V." p. 314) gemachten Bemerkung unmittelbar:

Sind $\begin{matrix}a^1a^2a^3\\ b^1b^2b^3\end{matrix}$ *die Seiten des zweien Formen* f, f' *gemeinsamen Paares polarer Dreiseite, und* $\begin{matrix}a^4a^5a^6a^7\\ b^4b^5b^6b^7\end{matrix}$ *die Seiten eines denselben Formen gemeinsamen Systems polarer Vierseite, so berühren die Geraden* a *und die Geraden* b *je einen Kegelschnitt und bilden projectivische Tangentenreihen.*

Aehnliche Sätze lassen sich auch über verschiedene Systeme polarer Vierseite zweier Formen aufstellen.

Die Mittheilungen über die Construction eines polaren Systems von Vierseiten einer Form $f(x, y)$, welche sich a. a. O. p. 315 finden, treten durch nachstehenden Satz in ein deutlicheres Licht.

Sind $\begin{matrix}a^1a^2a^3\\ a^1a^2a^3\end{matrix}$ die $\begin{matrix}\text{Ecken}\\ \text{Seiten}\end{matrix}$ eines Dreiecks der einen Ebene, und bedeuten $\begin{matrix}\beta^1\beta^2\beta^3\\ b^1b^2b^3\end{matrix}$ Entsprechendes für die andere Ebene, so besteht der

Satz. *Liegt das dem Dreieck* α *in Bezug auf eine Form* $f(x, y)$ *polare Dreiseit* $\begin{matrix}\gamma^1\gamma^2\gamma^3\\ c^1c^2c^3\end{matrix}$ *perspectivisch mit dem Dreieck* $\begin{matrix}\beta^1\beta^2\beta^3\\ b^1b^2b^3\end{matrix}$, *so lassen sich die beiden Dreiseite* a, b *zu einem Paar polarer Vierseite ergänzen.*

Beweis. Der Annahme zufolge lassen sich die Constanten $\varrho_1\varrho_2\varrho_3$ derart bestimmen, dass

$$f(x, y) = \varrho_1 a^1(x)c^1(y) + \varrho_2 a^2(x)c^2(y) + \varrho_3 a^3(x)c^3(y).$$

Nennt man nun b^4 den perspectivischen Durchschnitt der Dreiseite b, c und setzt

$$c^1(y) = \lambda_1 b^1(y) + \mu_1 b^4(y), \quad c^2(y) = \lambda_2 b^2(y) + \mu_2 b^4(y), \quad c^3(y) = \lambda_3 b^3(y) + \mu_3 b^4(y),$$

so nimmt $f(x, y)$ die Gestalt an:

$$f(x, y) = \sigma_1 a^1(x)b^1(y) + \sigma_2 a^2(x)b^2(y) + \sigma_3 a^3(x)b^3(y) + \sigma_4 a^4(x)b^4(y),$$

wo $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$ Constanten und $a^4(x)$ ein linearer Ausdruck in x sind w. z. b. w.

Zugleich ergiebt sich hierbei der

Satz. *Liegt das zu $a^1a^2a^3$ polare Dreieck perspectivisch mit $b^1b^2b^3$, so liegt das zu b polare Dreieck perspectivisch mit a. Die beiden Axen der Perspectivität ergänzen die Dreiseite a, b zu einem Paar polarer Vierseite.*

Dadurch ist ein deutlicherer Einblick in die Mannigfaltigkeit der Systeme von polaren Vierseiten gewonnen.

§ 3.

Drei bilineare Formen $f(x, y)$, $f'(x, y)$, $f''(x, y)$ ergeben als Ort ihrer gemeinsamen Nullpaare je eine Curve dritter Ordnung c_3, C_3 *). Zu jedem Punkte α von c_3 gehört ein auf C_3 gelegener Punkt A „als conjugirter" derart, dass (α, A) ein Nullpaar der Gruppe (f, f', f'') bilden. In dieser sind unendlich viele zweigliedrige Gruppen enthalten (Büschel). Die Curven c_3, C_3 sind zugleich der Ort der jenen gemeinsamen polaren Dreieckspaare. Ist α ein beliebiger Punkt der einen Ebene, B eine Gerade der anderen, so giebt es in der Gruppe (f, f', f'') *eine* Form, für welche α, B in dem Verhältniss von Pol und Polare stehen. Nur in dem Falle, wo α auf c_3 liegt, giebt es eine solche Form in der Regel nicht, dagegen unendlich viele (einen Büschel), sobald B zugleich durch den conjugirten Punkt A von α geht. Sind die Curven c_3, C_3 als gezeichnet angenommen, so ist es leicht, Paare polarer Dreiecke von Büscheln in beliebiger Menge linear zu construiren unter Benutzung der Polaren von Punkten. Man erkennt, was auch sonst klar ist, dass man zwei Punkte der einen Curve stets durch einen eindeutig bestimmten dritten Punkt zu einem Dreieck ergänzen kann, welches mit einem bestimmten zugehörigen ein polares System eines Formenbüschels bildet **).

*) Vgl. die inzwischen in den Denkschriften der Wiener Akademie d. Wissenschaften erschienene Arbeit des Herrn *S. Kantor*, „Ueber die allgemeinsten linearen Systeme linearer Transformationen u. s. f." — Breslau, October 1883.

**) Solche Dreiecke sind schon von *Steiner* (dieses Journal Bd. 32, pag. 300 f.) studirt worden. (Vgl. *Durège*, Die ebenen Curven dritter Ordnung, pag. 300 f.) Stellt man die Coordinaten der Punkte von c_3 durch elliptische Functionen eines Parameters in der Weise dar, dass die Periodendrittheile in die Inflexionspunkte fallen, so sind bekanntlich die Ecken der sogenannten Tripel dadurch charakterisirt, dass die Summe ihrer Parameter gleich einer halben Periode ist. Die hier auftretenden Dreiecke haben offenbar in ihren Eckpunkten ebenfalls eine constante Parametersumme, welche aber im Allgemeinen von der Periodenhälfte verschieden ist. (Dies folgt ohne Weiteres aus der Bemerkung, dass drei Punkte von c_3, welche mit einem dieser Dreiecke auf einem Kegelschnitte liegen, dieselbe Beziehung zu allen haben.)

Sind $a^1a^2a^3$, $A^1A^2A^3$ die Seiten zweier Dreiecke, welche das polare System eines Formenbüschels der Gruppe (f, f', f'') bilden, und haben $a^4a^5a^6$, $A^4A^5A^6$ die gleiche Bedeutung für einen anderen Büschel derselben Gruppe, so kann man setzen:

$$\varkappa f(x, y)+\lambda f'(x, y)+\mu f''(x, y) = \varrho_1 a^1(x)A^1(y)+\varrho_2 a^2(x)A^2(y)+\varrho_3 a^3(x)A^3(y),$$
$$\varkappa' f(x, y)+\lambda' f'(x, y)+\mu' f''(x, y) = \sigma_1 a^1(x)A^1(y)+\sigma_2 a^2(x)A^2(y)+\sigma_3 a^3(x)A^3(y)$$

und ebenso

$$\pi f(x, y)+\tau f'(x, y)+\omega f''(x, y) = \varrho_4 a^4(x)A^4(y)+\varrho_5 a^5(x)A^5(y)+\varrho_6 a^6(x)A^6(y),$$
$$\pi' f(x, y)+\tau' f'(x, y)+\omega' f''(x, y) = \sigma_4 a^4(x)A^4(y)+\sigma_5 a^5(x)A^5(y)+\sigma_6 a^6(x)A^6(y).$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen die Formen f, f', f'', so ergiebt sich der

Satz. ***Die sechs Seitenpaare irgend zweier Paare polarer Dreiseite*** (zweier der Gruppe (f, f', f'') angehörigen Formenbüschel) ***bilden ein abhängiges System; ebenso die sechs Paare von Ecken.***

§ 4.

Die Bedeutung, welche die Systeme polarer Vierseite für die bilinearen Formen, und nicht bloss vom geometrischen Standpunkte aus gesehen, besitzen, verleiht der Frage, ob drei bilineare Formen im Allgemeinen ein solches System gemein haben, ein grösseres Interesse. Wir gehen, um dieselbe zu entscheiden, von der Annahme aus, dass drei Formen

$$\begin{cases} f(x, y) = \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{\varkappa,\lambda=3} a_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y_\lambda, \\ f'(x, y) = \sum_{\varkappa,\lambda} b_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y_\lambda, \\ f''(x, y) = \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa\lambda} x_\varkappa y_\lambda \end{cases}$$

ein gemeinsames Paar polarer Vierseite $\begin{matrix} a^1a^2a^3a^4 \\ b^1b^2b^3b^4 \end{matrix}$ besitzen, und werden nachweisen, dass eine Beziehung zwischen den Coefficienten von f, f', f'' (das Verschwinden einer Invariante) die nothwendige Folge hiervon ist*). Setzt man nämlich, was nach der gemachten Voraussetzung erlaubt ist,

$$f(x, y) = \varrho_1 a^1(x)b^1(y)+\varrho_2 a^2(x)b^2(y)+\varrho_3 a^3(x)b^3(y)+\varrho_4 a^4(x)b^4(y),$$
$$f'(x, y) = \sigma_1 a^1(x)b^1(y)+\sigma_2 a^2(x)b^2(y)+\sigma_3 a^3(x)b^3(y)+\sigma_4 a^4(x)b^4(y),$$
$$f''(x, y) = \tau_1 a^1(x)b^1(y)+\tau_2 a^2(x)b^2(y)+\tau_3 a^3(x)b^3(y)+\tau_4 a^4(x)b^4(y),$$

*) Es ist dies geometrisch leicht einzusehen.

aus denen durch Elimination der Grössen p sich die Bedingung ergiebt:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -b_{31} & -b_{32} & -b_{33} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 0 & -c_{31} & -c_{32} & -c_{33} & c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 0 & -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & 0 & -b_{11} & -b_{12} & -b_{13} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & 0 & 0 & 0 & -c_{11} & -c_{12} & -c_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -b_{21} & -b_{22} & -b_{23} & b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -c_{21} & -c_{22} & -c_{23} & c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Berücksichtigt man, dass zur Aufstellung dieser Bedingung über die Coefficienten p der anzuwendenden Substitution nichts vorausgesetzt wurde, so kann man den Satz aussprechen:

Drei bilineare (ternäre) Formen lassen sich im Allgemeinen nicht gleichzeitig aus denselben vier zerfallenden Formen zusammensetzen. Damit dies der Fall sei, ist es nothwendig, dass die drei Formen durch lineare Transformirung des einen Systems von Variabeln gleichzeitig in symmetrische Formen übergeführt werden können. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn die Bedingung

$$\Delta = 0$$

erfüllt ist (wo Δ die oben stehende Determinante bedeutet).

Da drei quadratische ternäre Formen sich (auf unendlich viele Arten) durch dieselben vier Quadrate linearer Formen zusammensetzen lassen, so folgt, indem man die Polarformen bildet, dass drei symmetrische bilineare Formen sich gleichzeitig aus vier zerfallenden Formen componiren lassen. Hieraus folgt, dass der obige Satz auch in der Umkehrung gilt, d. h.

Verschwindet die Invariante Δ dreier bilinearen Formen, lassen sich dieselben also in symmetrische überführen, so besitzen sie auch ein gemeinsames Paar polarer Vierseite (und zugleich unendlich viele).

Sind $\begin{matrix} a^1a^2a^3a^4 \\ b^1b^2b^3b^4 \end{matrix}$, $\begin{matrix} a^5a^6a^7a^8 \\ b^5b^6b^7b^8 \end{matrix}$ die Seiten zweier gemeinsamen Systeme von polaren Vierseiten der Formen f, f', f'', so kann man setzen

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{i=4} \varrho_i a^i(x) b^i(y) = \sum_{k=5}^{k=8} \varrho_k a^k(x) b^k(y),$$

$$f'(x,y) = \sum_{i=1}^{i=4} \sigma_i a^i(x) b^i(y) = \sum_{k=5}^{k=8} \sigma_k a^k(x) b^k(y),$$

$$f''(x,y) = \sum_{i=1}^{i=4} \tau_i a^i(x) b^i(y) = \sum_{k=5}^{k=8} \tau_k a^k(x) b^k(y),$$

d. h. es bestehen drei (unabhängige) Relationen zwischen den acht Geradenpaaren $\begin{smallmatrix} a^1 a^2 \ldots a^8 \\ b^1 b^2 \ldots b^8 \end{smallmatrix}$. Die Elimination irgend zweier liefert eine Abhängigkeit zwischen sechs derselben. Es sind somit fünf dieser Geradenpaare so beschaffen, dass das abhängige sechste unbestimmt ist, d. h.

„Haben drei bilineare Formen Paare polarer Vierseite gemein, so sind die acht Seitenpaare irgend zweier derselben Tangenten zweier Kegelschnitte und bilden projectivische Reihen" — was mit bekannten Sätzen aus der Theorie der Curven dritter Ordnung übereinstimmt.

Breslau, Mai 1883.

Zur Transformationstheorie der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung.

(Von Herrn *Martin Krause* in Rostock.)

Eins der wichtigsten Probleme in der Transformationstheorie der elliptischen Functionen ist das Problem, für einen beliebigen Transformationsgrad Relationen zwischen den ursprünglichen und den transformirten Moduln herzuleiten. Wenn es nun auch bisher noch nicht gelungen ist, jene Relationen in endlicher Form für alle Grade herzustellen, so ist es doch möglich gewesen, eine Differentialgleichung dritter Ordnung abzuleiten, welcher die transformirten Moduln für einen beliebigen Grad als Functionen der ursprünglichen betrachtet Genüge leisten. In der Theorie der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung ist nach der angegebenen Richtung hin bisher nur weniges geleistet worden. Die hier bestehende Lücke soll im Folgenden in gewisser Weise ausgefüllt werden. Es soll gezeigt werden, dass auch in dem Gebiete der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung Differentialgleichungen existiren, denen die transformirten Moduln als Functionen der ursprünglichen betrachtet Genüge leisten, und es soll eine Methode angegeben werden, wie diese Differentialgleichungen zu bestimmen sind.

§ 1.

Setzt man nach *Rosenhain:*

$$\frac{\vartheta_1^2(v_1, v_2)}{\vartheta_0^2(v_1, v_2)} = \varkappa\lambda\mu x_1 x_2 \text{ etc.},$$

so wird:

$$dv_1 = \frac{B - Cx_1}{\sqrt{(x_1 \varkappa\lambda\mu)}}\, dx_1 + \frac{B - Cx_2}{\sqrt{(x_2 \varkappa\lambda\mu)}}\, dx_2,$$

$$dv_2 = \frac{B_1 - C_1 x_1}{\sqrt{(x_1 \varkappa\lambda\mu)}}\, dx_1 + \frac{B_1 - C_1 x_2}{\sqrt{(x_2 \varkappa\lambda\mu)}}\, dx_2.$$

Hierbei ist:

$$2B = \frac{\vartheta_3'(v_2)_0}{i\pi\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5}, \quad 2C = \frac{\sqrt{\varkappa\lambda\mu}\,\vartheta_{24}'(v_2)_0}{i\pi\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5},$$

$$2B_1 = -\frac{\vartheta_3'(v_1)_0}{i\pi\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5}, \quad 2C_1 = -\frac{\sqrt{\varkappa\lambda\mu}\,\vartheta_{24}'(v_1)_0}{i\pi\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5}.$$

Wir wollen nun setzen:

$$u_1 = 2K_{11}v_1 + 2K_{12}v_2, \quad u_2 = 2K_{21}v_1 + 2K_{22}v_2$$

und die Grössen K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22} so bestimmen, dass wird:

$$du_1 = \frac{dx_1}{\sqrt{(x_1\varkappa\lambda\mu)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{(x_2\varkappa\lambda\mu)}}, \quad du_2 = \frac{x_1\,dx_1}{\sqrt{(x_1\varkappa\lambda\mu)}} + \frac{x_2\,dx_2}{\sqrt{(x_2\varkappa\lambda\mu)}}.$$

Dann folgt, dass die Gleichungen bestehen:

(1.) $$K_{11} = \frac{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5.\vartheta_{24}'(v_1)_0}{\vartheta_{03}.\vartheta_{12}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}, \qquad (2.)\quad K_{21} = -\frac{\vartheta_{34}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_5^2.\vartheta_3'(v_1)_0}{\vartheta_{01}.\vartheta_{12}.\vartheta_{23}.\vartheta_2.\vartheta_{03}.\vartheta_0.\vartheta_{14}},$$

(3.) $$K_{12} = \frac{\vartheta_{34}.\vartheta_4.\vartheta_5.\vartheta_{24}'(v_2)_0}{\vartheta_{03}.\vartheta_{12}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}, \qquad (4.)\quad K_{22} = -\frac{\vartheta_{34}^2.\vartheta_4^2.\vartheta_5^2.\vartheta_3'(v_2)_0}{\vartheta_{01}.\vartheta_{12}.\vartheta_{23}.\vartheta_2.\vartheta_{03}.\vartheta_0.\vartheta_{14}}.$$

Die Grössen K_{11} und K_{21} leisten einer Reihe von Differentialgleichungen genüge. Wir greifen unter diesen folgende heraus:

(5.) $$(\mu^2-\lambda^2)\frac{\partial^2 K_{11}}{\partial\mu\,\partial\lambda} = \lambda\frac{\partial K_{11}}{\partial\mu} - \mu\frac{\partial K_{11}}{\partial\lambda},$$

(6.) $$(\varkappa^2-\mu^2)\frac{\partial^2 K_{11}}{\partial\varkappa\,\partial\mu} = \mu\frac{\partial K_{11}}{\partial\varkappa} - \varkappa\frac{\partial K_{11}}{\partial\mu},$$

(7.) $$(\lambda^2-\varkappa^2)\frac{\partial^2 K_{11}}{\partial\lambda\,\partial\varkappa} = \varkappa\frac{\partial K_{11}}{\partial\lambda} - \lambda\frac{\partial K_{11}}{\partial\varkappa},$$

(8.) $$\frac{\partial}{\partial\varkappa}\left[\varkappa_1^2\varkappa\frac{\partial K_{11}}{\partial\varkappa} + \lambda_1^2\lambda\frac{\partial K_{11}}{\partial\lambda} + \mu_1^2\mu\frac{\partial K_{11}}{\partial\mu} - (\lambda^2+\mu^2)K_{11}\right] = \varkappa K_{11},$$

(9.) $$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\varkappa_1^2\varkappa\frac{\partial K_{11}}{\partial\varkappa} + \lambda_1^2\lambda\frac{\partial K_{11}}{\partial\lambda} + \mu_1^2\mu\frac{\partial K_{11}}{\partial\mu} - (\mu^2+\varkappa^2)K_{11}\right] = \lambda K_{11},$$

(10.) $$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\varkappa_1^2\varkappa\frac{\partial K_{11}}{\partial\varkappa} + \lambda_1^2\lambda\frac{\partial K_{11}}{\partial\lambda} + \mu_1^2\mu\frac{\partial K_{11}}{\partial\mu} - (\varkappa^2+\lambda^2)K_{11}\right] = \mu K_{11},$$

(11.) $$K_{21} = \frac{\varkappa_1^2}{\varkappa}\frac{\partial K_{11}}{\partial\varkappa} + \frac{\lambda_1^2}{\lambda}\frac{\partial K_{11}}{\partial\lambda} + \frac{\mu_1^2}{\mu}\frac{\partial K_{11}}{\partial\mu} - K_{11},$$

(12.) $$\frac{\partial K_{21}}{\partial\varkappa} = \frac{1}{\varkappa^2}\frac{\partial K_{11}}{\partial\varkappa} - \frac{1}{\varkappa}K_{21},$$

(13.) $$\frac{\partial K_{21}}{\partial\lambda} = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial K_{11}}{\partial\lambda} - \frac{1}{\lambda}K_{21},$$

(14.) $$\frac{\partial K_{21}}{\partial\mu} = \frac{1}{\mu^2}\frac{\partial K_{11}}{\partial\mu} - \frac{1}{\mu}K_{21}.$$

An Stelle der Gleichungen (8.), (9.), (10.) können auch folgende gesetzt werden:

$$(15.)\quad \begin{cases} \varkappa_1^2 \dfrac{\partial^2 K_{11}}{\partial \varkappa^2} = \left[\dfrac{\varkappa\lambda_1^2}{\lambda^2-\varkappa^2}+\dfrac{\varkappa\mu_1^2}{\mu^2-\varkappa^2}+\dfrac{1+3\varkappa^2}{\varkappa}\right]\dfrac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa} \\ \qquad -\dfrac{\lambda\lambda_1^2}{\lambda^2-\varkappa^2}\dfrac{\partial K_{11}}{\partial \lambda}-\dfrac{\mu\mu_1^2}{\mu^2-\varkappa^2}\dfrac{\partial K_{11}}{\partial \mu}+K_{11}, \end{cases}$$

$$(16.)\quad \begin{cases} \lambda_1^2 \dfrac{\partial^2 K_{11}}{\partial \lambda^2} = \left[\dfrac{\lambda\mu_1^2}{\mu^2-\lambda^2}+\dfrac{\lambda\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\lambda^2}+\dfrac{1+3\lambda^2}{\lambda}\right]\dfrac{\partial K_{11}}{\partial \lambda} \\ \qquad -\dfrac{\mu\mu_1^2}{\mu^2-\lambda^2}\dfrac{\partial K_{11}}{\partial \mu}-\dfrac{\varkappa\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\lambda^2}\dfrac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa}+K_{11}, \end{cases}$$

$$(17.)\quad \begin{cases} \mu_1^2 \dfrac{\partial^2 K_{11}}{\partial \mu^2} = \left[\dfrac{\mu\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\mu^2}+\dfrac{\mu\lambda_1^2}{\lambda^2-\mu^2}+\dfrac{1+3\mu^2}{\mu}\right]\dfrac{\partial K_{11}}{\partial \mu} \\ \qquad -\dfrac{\varkappa\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\mu^2}\dfrac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa}-\dfrac{\lambda\lambda_1^2}{\lambda^2-\mu^2}\dfrac{\partial K_{11}}{\partial \lambda}+K_{11}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen können auf eine doppelte Weise abgeleitet werden. Erstens durch Integralbetrachtungen. In Bezug auf diese Methode möge auf eine Arbeit von Herrn *Königsberger* im ersten Hefte der mathematischen Annalen verwiesen werden. Zweitens aber können die Formeln durch directe Differentiation der Gleichungen (1.) und (2.) abgeleitet werden. Dieser Weg bietet an sich zwar grosses Interesse dar, möge aber bei dieser Gelegenheit als der weitläufigere unberücksichtigt bleiben.

In den obigen Formeln sind die Grössen K_{11} und K_{21} als Functionen dreier Veränderlichen angenommen worden. Sieht man sie als Functionen zweier oder einer Veränderlichen an, so ergeben sich andere Beziehungen. In Bezug auf den letzteren Fall möge auf eine Arbeit von Herrn *Fuchs* im 71. Bande dieses Journals verwiesen werden.

Wir wollen nun die beiden Ausdrücke K_{11} und K_{21} als Functionen von $\varkappa$, λ, μ auffassen und untersuchen, in welche Grössen dieselben durch gewisse lineare Transformationen übergehen.

Hierzu diene folgende Bemerkung, bei welcher die Bezeichnungsweise als bekannt vorausgesetzt werden möge.

Wenn eine lineare Transformation (a_0, b_1, c_2, d_3) die Function $\vartheta_\alpha(v_1, v_2)$ überführt in $\eta\vartheta_\beta(v_1, v_2)$, oder also die Gleichung besteht:

$$\varepsilon\vartheta_\alpha(v_1', v_2', \tau_{11}', \tau_{12}', \tau_{22}') = \eta\vartheta_\beta(v_1, v_2, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}),$$

so wird:

$$O_\alpha'(v_1')_0 = \eta[(d_3-a_3\tau_{11}-b_3\tau_{12})\vartheta_\beta'(v_1)_0+(c_3-a_3\tau_{21}-b_3\tau_{22})\vartheta_\beta'(v_2)_0],$$
$$O_\alpha'(v_2)_0 = \eta[(d_2-a_2\tau_{11}-b_2\tau_{12})\vartheta_\beta'(v_1)_0+(c_2-a_2\tau_{21}-b_2\tau_{22})\vartheta_\beta'(v_2)_0].$$

Wir wollen nun zunächst diejenigen linearen Transformationen herausgreifen, für welche $\vartheta_3(v_1, v_2)$ sowohl als auch $\vartheta_{24}(v_1, v_2)$, von einem Exponentialfactor abgesehen, in sich selbst übergehen. Nach dem Modul 2 ist die Zahl derselben 24. Um die Mannigfaltigkeit der hierbei entstehenden Ausdrücke zu untersuchen, genügt es für unseren Zweck drei derselben zu betrachten. Wir wählen die Transformationen:

$$\left|\begin{matrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|\left|\begin{matrix}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}\right|.$$

Für dieselben gehen die Grössen $\varkappa$, λ, μ der Reihe nach über resp. in:

$$\frac{\mu}{\varkappa}, \frac{\lambda}{\varkappa}, \frac{1}{\varkappa}; \quad \frac{\mu}{\lambda}, \frac{\varkappa}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}; \quad \frac{\varkappa}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}, \frac{1}{\mu}.$$

Setzen wir nun:

$$K_{ii} = f_{ii}(\varkappa, \lambda, \mu),$$
$$K'_{11} = K_{11}\tau_{11}+K_{12}\tau_{12}, \quad K'_{21} = K_{21}\tau_{11}+K_{22}\tau_{12},$$
$$K'_{12} = K_{11}\tau_{12}+K_{12}\tau_{22}, \quad K'_{22} = K_{21}\tau_{12}+K_{22}\tau_{22},$$
$$K'_{ii} = f'_{ii}(\varkappa, \lambda, \mu),$$

so folgt, dass für die genannten drei Transformationen resp. je zwei der Gleichungen gelten:

$$\frac{1}{\varkappa}f_{11}\left(\frac{\mu}{\varkappa}, \frac{\lambda}{\varkappa}, \frac{1}{\varkappa}\right) = \varepsilon_1(f_{11}(\varkappa, \lambda, \mu)-f'_{11}(\varkappa, \lambda, \mu)+f'_{12}(\varkappa, \lambda, \mu)),$$
$$\frac{1}{\varkappa^3}f_{21}\left(\frac{\mu}{\varkappa}, \frac{\lambda}{\varkappa}, \frac{1}{\varkappa}\right) = \varepsilon_2(f_{21}(\varkappa, \lambda, \mu)-f'_{21}(\varkappa, \lambda, \mu)+f'_{22}(\varkappa, \lambda, \mu)),$$
$$\frac{1}{\lambda}f_{11}\left(\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\varkappa}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right) = \varepsilon_3(f_{11}(\varkappa, \lambda, \mu)-f'_{11}(\varkappa, \lambda, \mu)-f_{12}(\varkappa, \lambda, \mu)+f'_{12}(\varkappa, \lambda, \mu)),$$
$$\frac{1}{\lambda^3}f_{21}\left(\frac{\mu}{\lambda}, \frac{\varkappa}{\lambda}, \frac{1}{\lambda}\right) = \varepsilon_4(f_{21}(\varkappa, \lambda, \mu)-f'_{21}(\varkappa, \lambda, \mu)-f_{22}(\varkappa, \lambda, \mu)+f'_{22}(\varkappa, \lambda, \mu)),$$
$$\frac{1}{\mu}f_{11}\left(\frac{\varkappa}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right) = \varepsilon_5(f_{11}(\varkappa, \lambda, \mu)-f_{12}(\varkappa, \lambda, \mu)-f'_{11}(\varkappa, \lambda, \mu)),$$
$$\frac{1}{\mu^3}f_{21}\left(\frac{\varkappa}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}, \frac{1}{\mu}\right) = \varepsilon_6(f_{21}(\varkappa, \lambda, \mu)-f_{22}(\varkappa, \lambda, \mu)-f'_{21}(\varkappa, \lambda, \mu)).$$

Die Grössen ε_i bedeuten die positive oder die negative Einheit.

Nun bleiben aber die Gleichungen (5.)—(17.) ungeändert, wenn an Stelle von K_{11}, K_{21}, $\varkappa, \lambda, \mu$ der Reihe nach gesetzt wird:

$$\frac{1}{\varkappa}K_{11},\ \frac{1}{\varkappa^3}K_{21},\ \frac{\mu}{\varkappa},\ \frac{\lambda}{\varkappa},\ \frac{1}{\varkappa};$$
$$\frac{1}{\lambda}K_{11},\ \frac{1}{\lambda^3}K_{21},\ \frac{\mu}{\lambda},\ \frac{\varkappa}{\lambda},\ \frac{1}{\lambda};$$
$$\frac{1}{\mu}K_{11},\ \frac{1}{\mu^3}K_{21},\ \frac{\varkappa}{\mu},\ \frac{\lambda}{\mu},\ \frac{1}{\mu}.$$

Somit ergiebt sich das Resultat, dass die obigen Differentialgleichungen bestehen bleiben, wenn an Stelle von K_{11}, K_{21} der Reihe nach gesetzt wird:

$$K_{12},\ K_{22};\quad K'_{11},\ K'_{21};\quad K'_{12},\ K'_{22}.$$

Wir greifen zwei beliebige dieser vier Paare heraus z. B. die Paare K_{11}, K_{21}; K'_{11}, K'_{21} und bilden den hieraus abgeleiteten Ausdruck:

$$\omega = K'_{11}K_{21} - K_{11}K'_{21}.$$

Solcher Grössen ω giebt es im Ganzen sechs. Dieselben leisten auch ihrerseits einfachen Differentialgleichungen genüge.

In der That setzen wir:

$$X_1 = K'_{11}\frac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa} - K_{11}\frac{\partial K'_{11}}{\partial \varkappa},\quad X_2 = K'_{11}\frac{\partial K_{11}}{\partial \lambda} - K_{11}\frac{\partial K'_{11}}{\partial \lambda},$$
$$X_3 = K'_{11}\frac{\partial K_{11}}{\partial \mu} - K_{11}\frac{\partial K'_{11}}{\partial \mu},\quad X_4 = \frac{\partial K'_{11}}{\partial \lambda}\frac{\partial K_{11}}{\partial \mu} - \frac{\partial K_{11}}{\partial \lambda}\frac{\partial K'_{11}}{\partial \mu},$$
$$X_5 = \frac{\partial K'_{11}}{\partial \mu}\frac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa} - \frac{\partial K_{11}}{\partial \mu}\frac{\partial K'_{11}}{\partial \varkappa},\quad X_6 = \frac{\partial K'_{11}}{\partial \varkappa}\frac{\partial K_{11}}{\partial \lambda} - \frac{\partial K_{11}}{\partial \varkappa}\frac{\partial K'_{11}}{\partial \lambda},$$

so folgen die Gleichungen:

$$\omega = \frac{\varkappa_1^2}{\varkappa}X_1 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda}X_2 + \frac{\mu_1^2}{\mu}X_3,$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial\varkappa} + \frac{\omega}{\varkappa} = \frac{1+\varkappa^2}{\varkappa^2}X_1 + \frac{\lambda_1^2}{\lambda}X_6 - \frac{\mu_1^2}{\mu}X_5,$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} + \frac{\omega}{\lambda} = \frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}X_2 + \frac{\mu_1^2}{\mu}X_4 - \frac{\varkappa_1^2}{\varkappa}X_6,$$
$$\frac{\partial\omega}{\partial\mu} + \frac{\omega}{\mu} = \frac{1+\mu^2}{\mu^2}X_3 + \frac{\varkappa_1^2}{\varkappa}X_5 - \frac{\lambda_1^2}{\lambda}X_4$$

und hieraus

$$\frac{\varkappa_1^2}{\varkappa}\frac{\partial\omega}{\partial\varkappa} + \frac{\lambda_1^2}{\lambda}\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} + \frac{\mu_1^2}{\mu}\frac{\partial\omega}{\partial\mu} + \omega\left(\frac{\varkappa_1^2}{\varkappa^2} + \frac{\lambda_1^2}{\lambda^2} + \frac{\mu_1^2}{\mu^2}\right) = \frac{1-\varkappa^4}{\varkappa^3}X_1 + \frac{1-\lambda^4}{\lambda^3}X_2 + \frac{1-\mu^4}{\mu^3}X_3.$$

Bei nochmaliger Differentiation ergeben sich nach einigen Rechnungen die folgenden Differentialgleichungen:

$$(18.)\quad \begin{cases} \dfrac{\mu\mu_1^2}{(\mu^2-\varkappa^2)^2}\left[(\varkappa^2-\mu^2)\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\mu\partial\varkappa}+\varkappa\dfrac{\partial\omega}{\partial\mu}-\mu\dfrac{\partial\omega}{\partial\varkappa}\right] \\ -\dfrac{\lambda\lambda_1^2}{(\lambda^2-\varkappa^2)^2}\left[(\lambda^2-\varkappa^2)\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varkappa\partial\lambda}+\lambda\dfrac{\partial\omega}{\partial\varkappa}-\varkappa\dfrac{\partial\omega}{\partial\lambda}\right] \\ = \dfrac{\varkappa}{\varkappa^2-\lambda^2\,\mu^2-\varkappa^2}\left[\varkappa\varkappa_1^2\dfrac{\partial\omega}{\partial\varkappa}+\lambda\lambda_1^2\dfrac{\partial\omega}{\partial\lambda}+\mu\mu_1^2\dfrac{\partial\omega}{\partial\mu}-2(\lambda^2+\mu^2-1)\omega\right]-\dfrac{\partial\omega}{\partial\varkappa}, \end{cases}$$

$$(19.)\quad \begin{cases} \dfrac{\varkappa\varkappa_1^2}{(\varkappa^2-\lambda^2)^2}\left[(\lambda^2-\varkappa^2)\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\varkappa\partial\lambda}+\lambda\dfrac{\partial\omega}{\partial\varkappa}-\varkappa\dfrac{\partial\omega}{\partial\lambda}\right] \\ -\dfrac{\mu\mu_1^2}{(\mu^2-\lambda^2)^2}\left[(\mu^2-\lambda^2)\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\lambda\partial\mu}+\mu\dfrac{\partial\omega}{\partial\lambda}-\lambda\dfrac{\partial\omega}{\partial\mu}\right] \\ = \dfrac{\lambda}{\lambda^2-\mu^2.\varkappa^2-\lambda^2}\left[\varkappa\varkappa_1^2\dfrac{\partial\omega}{\partial\varkappa}+\lambda\lambda_1^2\dfrac{\partial\omega}{\partial\lambda}+\mu\mu_1^2\dfrac{\partial\omega}{\partial\mu}-2(\varkappa^2+\mu^2-1)\omega\right]-\dfrac{\partial\omega}{\partial\lambda}, \end{cases}$$

$$(20.)\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda\lambda_1^2}{(\lambda^2-\mu^2)^2}\left[(\mu^2-\lambda^2)\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\lambda\partial\mu}+\mu\dfrac{\partial\omega}{\partial\lambda}-\lambda\dfrac{\partial\omega}{\partial\mu}\right] \\ -\dfrac{\varkappa\varkappa_1^2}{(\varkappa^2-\mu^2)^2}\left[(\varkappa^2-\mu^2)\dfrac{\partial^2\omega}{\partial\mu\partial\varkappa}+\varkappa\dfrac{\partial\omega}{\partial\mu}-\mu\dfrac{\partial\omega}{\partial\varkappa}\right] \\ = \dfrac{\mu}{\mu^2-\varkappa^2.\lambda^2-\mu^2}\left[\varkappa\varkappa_1^2\dfrac{\partial\omega}{\partial\varkappa}+\lambda\lambda_1^2\dfrac{\partial\omega}{\partial\lambda}+\mu\mu_1^2\dfrac{\partial\omega}{\partial\mu}-2(\varkappa^2+\lambda^2-1)\omega\right]-\dfrac{\partial\omega}{\partial\mu}. \end{cases}$$

$$(21.)\quad \varkappa_1^2\frac{\partial^2\omega}{\partial\varkappa^2}=\left(\frac{\varkappa\lambda_1^2}{\lambda^2-\varkappa^2}+\frac{\varkappa\mu_1^2}{\mu^2-\varkappa^2}+\frac{5\varkappa^2-1}{\varkappa}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\varkappa}-\frac{\lambda\lambda_1^2}{\lambda^2-\varkappa^2}\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}-\frac{\mu\mu_1^2}{\mu^2-\varkappa^2}\frac{\partial\omega}{\partial\mu}+4\omega,$$

$$(22.)\quad \lambda_1^2\frac{\partial^2\omega}{\partial\lambda^2}=\left(\frac{\lambda\mu_1^2}{\mu^2-\lambda^2}+\frac{\lambda\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\lambda^2}+\frac{5\lambda^2-1}{\lambda}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}-\frac{\mu\mu_1^2}{\mu^2-\lambda^2}\frac{\partial\omega}{\partial\mu}-\frac{\varkappa\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\lambda^2}\frac{\partial\omega}{\partial\varkappa}+4\omega,$$

$$(23.)\quad \mu_1^2\frac{\partial^2\omega}{\partial\mu^2}=\left(\frac{\mu\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\mu^2}+\frac{\mu\lambda_1^2}{\lambda^2-\mu^2}+\frac{5\mu^2-1}{\mu}\right)\frac{\partial\omega}{\partial\mu}-\frac{\varkappa\varkappa_1^2}{\varkappa^2-\mu^2}\frac{\partial\omega}{\partial\varkappa}-\frac{\lambda\lambda_1^2}{\lambda^2-\mu^2}\frac{\partial\omega}{\partial\lambda}+4\omega.$$

Von diesen sechs Gleichungen sind nur fünf von einander unabhängig. Eine der drei ersten folgt aus den andern beiden.

§ 2.

Wir gehen jetzt zu der allgemeinen rationalen Transformation n^{ten} Grades über. Die Argumente und Moduln der transformirten Thetafunctionen bezeichnen wir resp. durch v_1', v_2'; τ_{11}', τ_{12}', τ_{22}'; ferner die den Grössen u_1, u_2, $\varkappa$, λ, μ, K_{ii}, K_{ii}', ω entsprechenden Grössen durch u_1', u_2', c, l, m, C_{ii}, C_{ii}', ω'. Dann leisten die sechs Grössen ω' genau analogen Gleichungen genüge wie die Grössen ω. Wir erhalten die ersteren aus den letzteren, indem wir in denselben an Stelle von ω, $\varkappa$, λ, μ resp. ω', c, l, m setzen. Wir wollen das auf diese Weise entstehende Gleichungssystem das System A nennen. Ferner bestehen dann Relationen von der Form:

$$u_1' = M_0u_1+M_1u_2,$$
$$u_2' = M_2u_1+M_3u_2.$$

Setzen wir:

$$M_0M_3-M_1M_3 = M,$$

so tritt die Grösse M an die Stelle des Multiplicators bei den elliptischen Functionen (Siehe Mathematische Annalen Band 20).

Zwischen ihr, den ursprünglichen und den transformirten Moduln besteht dann, wie der Verfasser nachgewiesen (Siehe Acta Mathematica Band III), die Relation:

$$M^3 = n^3\frac{\varkappa.\lambda.\mu.\varkappa_1^2.\lambda_1^2.\mu_1^2.\lambda_\varkappa^2.\mu_\varkappa^2.\mu_\lambda^2}{c.l.m.c_1^2.l_1^2.m_1^2.l_c^2.m_c^2.m_l^2}F,$$

wobei ist:

$$F = \begin{vmatrix} \frac{\partial c}{\partial\varkappa} & \frac{\partial l}{\partial\varkappa} & \frac{\partial m}{\partial\varkappa} \\ \frac{\partial c}{\partial\lambda} & \frac{\partial l}{\partial\lambda} & \frac{\partial m}{\partial\lambda} \\ \frac{\partial c}{\partial\mu} & \frac{\partial l}{\partial\mu} & \frac{\partial m}{\partial\mu} \end{vmatrix}.$$

Nun bestehen aber die Relationen:

$$M_0K_{11}+M_1K_{21} = a_0C_{11}+a_1C_{12}+a_2C'_{12}+a_3C'_{11}.M_2K_{11}+M_3K_{21} = a_0C_{21}+a_1C_{22}+a_2C'_{22}+a_3C'_{21},$$
$$M_0K_{12}+M_1K_{22} = b_0C_{11}+b_1C_{12}+b_2C'_{12}+b_3C'_{11}.M_2K_{12}+M_3K_{22} = b_0C_{21}+b_1C_{22}+b_2C'_{22}+b_3C'_{21},$$
$$M_0K'_{12}+M_1K'_{22} = c_0C_{11}+c_1C_{12}+c_2C'_{12}+c_3C'_{11}.M_2K'_{12}+M_3K'_{22} = c_0C_{21}+c_1C_{22}+c_2C'_{22}+c_3C'_{21},$$
$$M_0K'_{11}+M_1K'_{21} = d_0C_{11}+d_1C_{12}+d_2C'_{12}+d_3C'_{11}.M_2K'_{11}+M_3K'_{22} = d_0C_{21}+d_1C_{22}+d_2C'_{22}+d_3C'_{21},$$

wobei die Grössen a, b, c, d die Transformationszahlen bedeuten.

Hieraus folgt, wenn wir noch den Zusammenhang erwägen, welcher zwischen den Grössen τ und den Grössen K_{ik}, K'_{ik} einerseits, den Grössen τ' und den Grössen C_{ik}, C'_{ik} andererseits besteht, dass wird:

$$\frac{C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}}{M} = \frac{K_{11}K_{22}-K_{12}K_{21}}{A},$$

wobei ist:

$$A = (a_0+a_3\tau'_{11}+a_2\tau'_{12})(b_1+b_3\tau'_{21}+b_2\tau'_{22})-(b_0+b_3\tau'_{11}+b_2\tau'_{12})(a_1+a_3\tau'_{21}+a_2\tau'_{22})$$

oder auch:

$$A = \frac{n^2}{(c_2-a_2\tau_{21}-b_2\tau_{22})(d_3-a_3\tau_{11}-b_3\tau_{12})-(d_2-a_2\tau_{11}-b_2\tau_{12})(c_3-a_3\tau_{21}-b_3\tau_{22})}.$$

Hieraus folgt, dass $\frac{C_{11}C_{22}-C_{12}C_{21}}{M}$ sich linear aus den Grössen ω zusammensetzen lässt, und zwar sind die Coefficienten numerische Constanten. Daraus aber folgt, dass die Gleichungen (18.)—(23.) richtig bleiben, wenn an Stelle

von ω gesetzt wird $\frac{\omega'}{M}$. Wir wollen das auf diese Weise entstehende Gleichungssystem durch B bezeichnen.

ω' leistet dann dem Gleichungssystem A und dem Gleichungssystem B genüge. Dieselben gelten ihrer Form nach gleichmässig für alle Transformationsgrade, da die einzige auf den Grad bezügliche Grösse n sich forthebt.

Die Elimination von ω' aus den definirten 12 Gleichungen ergiebt dann eine Reihe von Differentialbeziehungen zwischen den ursprünglichen und den transformirten Moduln, w. z. b. w.

Rostock, den 14. Juli 1883.

Ueber die principale Transformation der Thetafunctionen mehrerer Variabeln.

(Von Herrn *G. Frobenius* in Zürich.)

In einer im Monatsbericht der Berliner Akademie vom October 1866 und nachher auch im 68. Bande dieses Journals abgedruckten Arbeit hat Herr ***Kronecker*** das Problem behandelt, „die Bedingungen zu ermitteln, unter denen die von Herrn ***Weierstrass*** mit $\tau_{\alpha\beta}$ bezeichneten Parameter der Thetafunctionen transformirten Parametern $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ gleich werden". Mit Hülfe einer merkwürdigen Beziehung, welche er zwischen den Transformationen der Thetafunctionen und den „congruenten Transformationen bilinearer Formen" gefunden hat, ist es ihm in seiner citirten Arbeit gelungen, die Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ durch ϱ Wurzeln einer Gleichung $2\varrho^{\text{ten}}$ Grades auszudrücken, wobei er sich zunächst auf den Fall beschränkt, dass diese Gleichung lauter verschiedene Wurzeln hat. Nachdem er die Lösung der Aufgabe entwickelt hat, hebt er hervor, dass nicht alle daraus resultirenden Werthe der Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ die für die Convergenz der Thetareihen nothwendigen Bedingungen erfüllen; er hebt ferner hervor, dass, wenn die Gleichung gleiche Wurzeln enthält, die Grössen τ theilweise unbestimmt bleiben, d. h. dass in diesem Falle gewisse Functionen von einer oder mehreren Variabeln existiren, die für $\tau_{\alpha\beta}$ gesetzt der Aufgabe genügen. An diese Bemerkungen anknüpfend hat Herr ***Weber*** (Annali di Mat. Ser. II, tom. 9, pag. 140) gezeigt, dass, falls die charakteristische Gleichung der gegebenen Transformation lauter einfache Wurzeln hat, ihr höchstens ein System von singulären Parametern entsprechen kann, das zugleich der Convergenzbedingung der Thetareihe genügt. Aber, fährt Herr ***Weber*** fort, „es existirt, wie Beispiele zeigen, nicht immer ein solches Grössensystem". Ich habe mir daher die Aufgabe gestellt, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen zu ermitteln, denen eine Transformation genügen muss, damit sie für gewisse Werthe der Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ eine ***„principale Transformation"*** sein könne, d. h. eine solche Trans-

formation, bei welcher die transformirten Parameter $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ den ursprünglichen $\tau_{\alpha\beta}$ gleich werden. Die Lösung ergiebt sich fast unmittelbar aus einer merkwürdigen Umformung der Beziehungen zwischen den ursprünglichen und den transformirten Parametern, die für den Fall von zwei Variabeln schon Herr *Hermite* (Compt. Rend. tom. 40, pag. 785.) angegeben und allgemein Herr *Laguerre* (Sur le calcul des systèmes linéaires, Journ. de l'éc. pol. cah. 42, pag. 215.) ausgeführt hat.

Nachdem ich in § 1 und 2 einige Hülfssätze aus der Algebra der bilinearen Formen und der Theorie der Thetafunctionen vorausgeschickt habe, entwickle ich in § 3 die charakteristischen Eigenschaften einer *principalen* Transformation, und zeige dann in § 4 und 5, wie man für eine den gefundenen Bedingungen genügende Transformation alle Systeme von Parametern finden kann, die den transformirten gleich werden. In den folgenden Paragraphen gebe ich lediglich weitere Ausführungen der vorhergehenden Entwicklung, und erläutere endlich die Theorie an einigen einfachen Beispielen.

§ 1.

Sind $c_{\alpha\beta}$ und $c_{\beta\alpha}$ conjugirt complexe Grössen und ist $c_{\alpha\alpha}$ reell, so lässt sich die bilineare Form

$$C = \sum_{\alpha,\beta}^{n} c_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$$

in ähnlicher Weise behandeln, wie eine quadratische Form mit reellen Coefficienten. (*Hermite,* d. J. Bd. 53, S. 183; *Christoffel,* d. J. Bd. 63, S. 255.) Sind x_α und y_α conjugirt complexe Grössen, so ist der Werth der Form reell. Durch Substitutionen

$$x_\alpha = \sum_{\varkappa} a_{\alpha\varkappa} x'_\varkappa, \quad y_\beta = \sum_{\lambda} b_{\beta\lambda} y'_\lambda,$$

in denen $a_{\alpha\beta}$ und $b_{\alpha\beta}$ conjugirte Complexe sind, geht C in eine Form der neuen Variabeln über, in welcher wieder die conjugirten Coefficienten conjugirt complexe Grössen sind. Nennt man diese Form, falls die Substitutionsdeterminanten von Null verschieden sind, der Form C *äquivalent,* so ist C einer Form von der Gestalt

$$G = \sum_{\alpha}^{q} x_\alpha y_\alpha - \sum_{\alpha}^{r} {}_{q+1} x_\alpha y_\alpha$$

äquivalent. In diese Normalform kann C auf unendlich viele Arten transformirt werden. Wie dies aber auch ausgeführt wird, so haben doch die

beiden Zahlen q und r immer dieselben Werthe. Die Zahl r ist der ***Rang****) des Systems der Coefficienten von C, das ich gleichfalls mit C bezeichne, die Zahl q heisst der ***Trägheitsindex*** von C. Damit zwei Formen äquivalent seien, ist es nothwendig und hinreichend, dass sie denselben Rang und Trägheitsindex haben. q und r sind also die einzigen Invarianten einer solchen Formenklasse.

Ich bediene mich im Folgenden der symbolischen Methoden für die Zusammensetzung linearer Systeme, die ich in meiner Arbeit ***Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen*** (dieses Journal Bd. 84, Seite 1) entwickelt habe, und werde diese Arbeit mit L. citiren. Ist A irgend eine Form oder ein System, so bezeichne ich mit A_0 die Form oder das System, das aus A entsteht, indem man jeden Coefficienten durch den conjugirt complexen Werth ersetzt. Ebenso bezeichne ich, wenn m irgend eine Grösse ist, mit m_0 oder $m^{(0)}$ die conjugirt complexe Grösse. Dann ist die oben betrachtete Form C durch die Gleichung $C_0 = C'$ oder $C_0' = C$ definirt, d. h. die conjugirt complexe Form ist zugleich die conjugirte Form; und durch eine Substitution mit dem Coefficientensystem R und die conjugirt complexe geht aus C die Form $R_0' C R$ hervor. Ist $R_0' C R = G$ die Normalform, deren Coefficienten reell sind, so ergiebt sich durch Vertauschung von i mit $-i$ $R' C_0 R_0 = G$. Daher sind C und C_0 beide der Form G, also auch unter einander äquivalent. Ist $r = n$, also die Determinante von C nicht Null, so ist $C^{-1} = C_0'^{(-1)} C_0' C^{-1}$, also sind C^{-1} und $C_0' = C$ äquivalent. Demnach hat C^{-1} denselben Trägheitsindex, wie C. Eine Form, die für conjugirt complexe Werthe der entsprechenden Variabeln nicht verschwinden kann, ohne dass die Veränderlichen sämmtlich Null sind, heisst eine ***definite Form***, eine ***positive***, wenn sie beständig positiv, eine ***negative***, wenn sie beständig negativ ist. Damit C eine positive Form sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass $q = r = n$ ist. Sie kann dann in

$$E = \sum_1^n x_\alpha y_\alpha$$

transformirt werden, und die reciproke Form C^{-1} ist ebenfalls eine positive Form. Ist $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ reell, und ist $\Sigma c_{\alpha\beta} z_\alpha z_\beta$ eine positive quadratische Form mit reellen Variabeln, so ist auch $\Sigma c_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta$ eine positive Form im obigen Sinne. Ist $c_{\alpha\beta} = -c_{\beta\alpha}$ rein imaginär, also $c_{\alpha\alpha} = 0$, so ist der Rang r eine gerade Zahl, und es ist $2q = r$. Denn da die beiden Formen C und $C_0 = -C$

*) Wenn in einem System alle Determinanten $(r+1)^{\text{ten}}$ Grades verschwinden, die r^{ten} Grades aber nicht sämmtlich Null sind, so nenne ich r den Rang des Systems.

äquivalent sind, so ist auch die Normalform G von C äquivalent $-G$. Beide haben also denselben Trägheitsindex $q = r-q$.

Von besonderer Wichtigkeit sind die conjugirt complexen Substitutionen, welche die Form E in sich selbst transformiren, also der Gleichung $R_0' E R = E$ oder

$$(1.) \qquad R_0' R = E$$

genügen. Ist R reell, so ist sie eine orthogonale Substitution. Von einer solchen habe ich (L. § 12) gezeigt, dass die Wurzeln ihrer charakteristischen Gleichung alle dem absoluten Betrage nach gleich 1 sind, und dass ihre charakteristische Determinante in lauter lineare Elementartheiler zerfällt. (Vgl. *Stickelberger,* Ueber reelle orthogonale Substitutionen, Programm der polyt. Schule Zürich, 1877.) Der dort angegebene Beweis lässt sich aber ohne die mindeste Abänderung auf das hier betrachtete allgemeinere System R übertragen, und man erkennt so, dass die charakteristische Function von R die nämlichen Eigenschaften wie die einer reellen orthogonalen Substitution hat. Ist allgemeiner C eine positive Form, so kann sie in E transformirt werden, es kann also ein System K gefunden werden, das der Gleichung $C = K_0' E K = K_0' K$ genügt. Ist S eine Substitution, die C in sich selbst transformirt, ist also $S_0' C S = C$, so ist $S_0' K_0' K S = K_0' K$, oder wenn man $K S K^{-1} = R$, also $K_0'^{(-1)} S_0' K_0' = R_0'$ setzt, $R_0' R = E$. Da R und S ähnlich sind, so stimmen ihre charakteristischen Determinanten in den Elementartheilern überein. So ergiebt sich der für die folgende Untersuchung fundamentale Satz:

I. ***Wenn eine Substitution nebst der conjugirt complexen Substitution eine positive Form, in welcher die conjugirten Coefficienten conjugirt complexe Grössen sind, in sich selbst transformirt, so zerfällt ihre charakteristische Determinante in lauter lineare Elementartheiler und verschwindet nur für Werthe vom absoluten Betrage 1.***

Zum Schluss entwickle ich noch einen Hülfssatz über Schaaren bilinearer Formen, den ich im Folgenden gebrauche (Vgl. *Stickelberger* l. c. § 7):

II. ***Verschwindet die Determinante der Formenschaar***

$$A + rB = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n} (a_{\varkappa\lambda} + r b_{\varkappa\lambda}) x_\varkappa y_\lambda$$

für $r = 0$ ***genau von der*** m^{ten} ***Ordnung, und sind die dieser Wurzel entsprechenden Elementartheiler alle vom ersten Grade, sind ferner***

$$x_{\alpha 1}, \ldots x_{\alpha n} \text{ und } y_{\alpha 1}, \ldots y_{\alpha n} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots m)$$

m unabhängige Lösungen der beiden Systeme linearer Gleichungen

$$\frac{\partial A}{\partial y_\lambda} = 0 \quad \textit{und} \quad \frac{\partial A}{\partial x_\lambda} = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots n)$$

und ist

$$B_{\alpha\beta} = \sum_{\varkappa,\lambda} b_{\varkappa\lambda} x_{\alpha\varkappa} y_{\beta\lambda},$$

so ist die Determinante m^{ten} Grades $|B_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden.

Beim Beweise will ich mich auf den Fall beschränken, den ich allein im Folgenden brauche, wo die Determinante n^{ten} Grades $|A+rB|$ nicht identisch verschwindet. Zufolge der Voraussetzung über ihre für $r=0$ verschwindenden Elementartheiler ist der Rang von A gleich $n-m$, und daher hat jedes der beiden obigen Gleichungssysteme genau m unabhängige Lösungen. Man wähle nun die Grössen $x_{\alpha\lambda}$ und $y_{\alpha\lambda}$ für $\alpha = m+1, \ldots n$ so, dass die Determinanten n^{ten} Grades $|x_{\varkappa\lambda}|$ und $|y_{\varkappa\lambda}|$ nicht verschwinden, und transformire $A+rB$ durch die Substitutionen

$$x_\varkappa = \sum_\mu^n x_{\mu\varkappa} X_\mu, \quad y_\lambda = \sum_\nu^n y_{\nu\lambda} Y_\nu$$

in $\sum_{\mu,\nu}(A_{\mu\nu}+rB_{\mu\nu})X_\mu Y_\nu$. Dann ist

$$A_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa,\lambda} a_{\varkappa\lambda} x_{\mu\varkappa} y_{\nu\lambda} = \sum_\varkappa x_{\mu\varkappa}\left(\sum_\lambda a_{\varkappa\lambda} y_{\nu\lambda}\right) = \sum_\lambda y_{\nu\lambda}\left(\sum_\varkappa a_{\varkappa\lambda} x_{\mu\varkappa}\right),$$

und mithin ist $A_{\mu\nu}=0$, falls eine der beiden Zahlen μ oder $\nu \leq m$ ist. Daher enthalten alle Elemente der m ersten Colonnen der Determinante $|A_{\mu\nu}+rB_{\mu\nu}|$ den Factor r, und sie selbst den Factor r^m, und der andere Factor reducirt sich für $r=0$ auf das Product der beiden Determinanten $|B_{\alpha\beta}|\cdot|A_{\gamma\delta}|$ $(\alpha, \beta = 1, \ldots m;\ \gamma, \delta = m+1, \ldots n)$. Die Determinante der transformirten Formenschaar ist aber gleich dem Producte der beiden Substitutionsdeterminanten in die Determinante der ursprünglichen Schaar. In dieser aber ist, da sie für $r=0$ genau von der m^{ten} Ordnung verschwindet, der Coefficient von r^m von Null verschieden, und mithin kann die Determinante $|B_{\alpha\beta}|$ nicht verschwinden.

§ 2.

Ist $G(u_1, \ldots u_\varrho, n_1, \ldots n_\varrho)$ eine ganze Function zweiten Grades von 2ϱ Variabeln, und setzt man für $n_1, \ldots n_\varrho$ alle Systeme ganzer Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, so ist

$$\Theta(u_1, \ldots u_\varrho) = \sum e^{G(u_1,\ldots u_\varrho, n_1,\ldots n_\varrho)}$$

die allgemeinste Thetafunction von ϱ Variabeln. (Vgl. *Schottky*, Abriss einer Theorie der *Abel*schen Functionen von drei Variabeln.) Damit die Reihe convergent sei, ist nothwendig und hinreichend, dass, falls

$$G = i\pi\sum_{\alpha,\beta}\tau_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta + i\pi\sum_{\alpha,\beta}\sigma_{\alpha\beta} n_\alpha u_\beta + \cdots$$

und $\tau_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\beta} + i\psi_{\alpha\beta}$ ist, die Form $\Psi = \Sigma\psi_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta$ eine positive Form ist *). Ist ferner die Determinante ϱ^{ten} Grades $|\sigma_{\alpha\beta}| = 0$, so wird die Function, abgesehen von einem Exponentialfactor $e^{\eta(u_1,\ldots u_\varrho)}$ aus einer allgemeineren Thetafunction erhalten, indem man für deren Variabeln lineare Functionen von ϱ anderen Variabeln mit verschwindender Determinante setzt. Ich nehme daher an, dass diese Determinante von Null verschieden ist. Die den Variabeln $u_1, \ldots u_\varrho$ entsprechenden 2ϱ Systeme simultaner halber Perioden $\omega_{1\beta}, \ldots \omega_{\varrho\beta}$ $(\beta = 1, \ldots 2\varrho)$ der Function Θ sind aus den linearen Gleichungen

$$(1.) \qquad \sum_\lambda \sigma_{\alpha\lambda}\omega_{\lambda\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots \varrho)$$

$$(2.) \qquad \sum_\lambda \omega_{\alpha\lambda}\tau_{\lambda\beta} = \omega_{\alpha,\varrho+\beta}$$

zu berechnen, wo $\varepsilon_{\alpha\beta} = 1$ oder 0 ist, je nachdem α und β gleich oder verschieden sind. Aus den Gleichungen

$$(3.) \qquad \tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$$

ergeben sich zwischen diesen Perioden die Relationen

$$(4.) \qquad \sum_\lambda (\omega_{\alpha\lambda}\omega_{\beta,\varrho+\lambda} - \omega_{\alpha,\varrho+\lambda}\omega_{\beta\lambda}) = 0.$$

Da $|\sigma_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden ist, so ist es nach (1.) auch $|\omega_{\alpha\beta}|$. Um die Convergenzbedingung der Thetareihe durch die Perioden auszudrücken, setze ich

$$(5.) \qquad \sum_\lambda (\omega_{\alpha\lambda}\omega^{(\imath)}_{\beta,\varrho+\lambda} - \omega_{\alpha,\varrho+\lambda}\omega^{(\imath)}_{\beta\lambda}) = -2ic_{\alpha\beta},$$

also $c^{(\imath)}_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$. Sind $x_1, \ldots x_\varrho$ complexe Variabeln und ist

$$\omega_\lambda = \sum_\alpha x_\alpha \omega_{\alpha\lambda},$$

so ist nach (2.)

$$\omega_{\varrho+\lambda} = \sum_\varkappa \omega_\varkappa \tau_{\varkappa\lambda}, \quad \omega^{(\imath)}_{\varrho+\lambda} = \sum_\varkappa \omega^{(\imath)}_\varkappa \tau^{(\imath)}_{\varkappa\lambda}$$

und mithin

$$-2i\sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}x_\alpha x^{(\imath)}_\beta = \sum_\lambda (\omega_\lambda\omega^{(\imath)}_{\varrho+\lambda} - \omega_{\varrho+\lambda}\omega^{(\imath)}_\lambda) = \sum_{\varkappa,\lambda} (\omega_\lambda \omega^{(\imath)}_\varkappa \tau^{(\imath)}_{\varkappa\lambda} - \omega^{(\imath)}_\lambda \omega_\varkappa \tau_{\varkappa\lambda})$$

$$= \sum_{\varkappa,\lambda} (\tau^{(\imath)}_{\varkappa\lambda} - \tau_{\varkappa\lambda})\omega_\varkappa \omega^{(\imath)}_\lambda,$$

also

$$(6.) \qquad \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha\beta}x_\alpha x^{(\imath)}_\beta = \sum_{\varkappa,\lambda} \psi_{\varkappa\lambda}\omega_\varkappa \omega^{(\imath)}_\lambda,$$

und mithin ist die Form $C = \Sigma c_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$, in der $c_{\alpha\beta}$ und $c_{\beta\alpha}$ conjugirt complexe Grössen sind, eine positive Form.

---

*) Nach einem Satze des Herrn *Weierstrass* (Berliner Monatsberichte 1858) verschwindet die Determinante $|\varphi_{\alpha\beta} + r\psi_{\alpha\beta}|$ nur für reelle Werthe von r, ist also für $r = i$ von Null verschieden.

Ist umgekehrt ein System von 2ϱ Grössen $\omega_{\alpha\beta}$ gegeben, das den Gleichungen (4.) genügt, und für das C eine positive Form ist, so lässt sich eine convergente Thetareihe bilden, welche diese Grössen zu halben Perioden hat. Zunächst ist die Determinante ϱ^{ten} Grades $|\omega_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden. Denn sonst könnte man den Variabeln x_α Werthe beilegen, die nicht sämmtlich verschwinden, für die aber die ϱ linearen Functionen ω_λ $(\lambda = 1, \ldots \varrho)$ alle Null wären. Dann wäre auch $\omega_\lambda^{(\mu)} = 0$, und folglich würde

$$C = \frac{i}{2} \sum_\lambda (\omega_\lambda \omega_{\varrho+\lambda}^{(\mu)} - \omega_{\varrho+\lambda} \omega_\lambda^{(\mu)})$$

verschwinden, wider die Voraussetzung. Daher kann man aus den Gleichungen (1.) und (2.) die Grössen $\sigma_{\alpha\beta}$ und $\tau_{\alpha\beta}$ berechnen. Setzt man dann in (4.) für $\omega_{\alpha,\varrho+\lambda}$ seinen Werth aus (2.) ein, so erhält man

$$\sum_{\varkappa,\lambda} \omega_{\alpha\varkappa} \omega_{\beta\lambda} (\tau_{\lambda\varkappa} - \tau_{\varkappa\lambda}) = 0,$$

und mithin, weil $|\omega_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden ist, $\tau_{\lambda\varkappa} = \tau_{\varkappa\lambda}$. Da ferner $\omega_1, \ldots \omega_\varrho$ ϱ von einander unabhängige Variabeln sind, so ist nach (6.) die bilineare Form $\sum \psi_{\varkappa\lambda} \omega_\varkappa \omega_\lambda^{(\mu)}$ mit conjugirt complexen Variabeln eine positive Form, also auch die quadratische Form $\sum \psi_{\varkappa\lambda} n_\varkappa n_\lambda$ mit reellen Variabeln. Die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Convergenz der Thetareihe besteht daher darin, dass C eine positive Form ist. In dieser für die Transformationstheorie besonders bequemen Gestalt ist sie schon von ***Riemann*** (*Abel*sche Functionen § 21) angegeben worden. (Vgl. auch ***Schläfli,*** dieses Journal Bd. 76, S. 155, sowie den dieses Journal Bd. 94, S. 9 citirten Satz des Herrn ***Weierstrass***) Durch conjugirt complexe Substitutionen kann die Form C in $E = \sum x_\alpha y_\alpha$ transformirt werden, in der $c_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}$ ist. Eine lineare Transformation der Variabeln x_α kann aber durch die contragrediente Transformation der Variabeln u_α ersetzt werden. Da durch eine solche die Thetafunction wieder in eine Thetafunction übergeführt wird, so gilt der Satz:

III. ***Die Variabeln einer Thetafunction kann man so wählen, dass zwischen ihren Perioden nicht nur die Gleichungen*** (4.), ***sondern auch die Relationen***

$$(7.) \qquad \sum_\lambda (\omega_{\alpha\lambda} \omega_{\beta,\varrho+\lambda}^{(\mu)} - \omega_{\alpha,\varrho+\lambda} \omega_{\beta\lambda}^{(\mu)}) = -2i\varepsilon_{\alpha\beta}$$

bestehen.

§ 3.

Die Relationen zwischen den Parametern $\tau_{\alpha\beta}$ und $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ zweier Thetafunctionen, deren zweite durch eine Transformation n^{ter} Ordnung aus der ersten entsteht, ergeben sich durch Elimination der ϱ^2 Grössen $\mu_{\alpha\beta}$ aus den

Gleichungen

$$(1.)\qquad a_{\alpha\beta}+\sum_{\lambda}\tau_{\alpha\lambda}a_{\varrho+\lambda,\beta}=\mu_{\alpha\beta},\quad a_{\alpha,\varrho+\beta}+\sum_{\lambda}\tau_{\alpha\lambda}a_{\varrho+\lambda,\varrho+\beta}=\sum_{\lambda}\mu_{\alpha\lambda}\bar{\tau}_{\lambda\beta}.$$

Zwischen den in diese Relationen eingehenden ganzen Zahlen $a_{\alpha\beta}$ bestehen die Beziehungen

$$(2.)\qquad \sum_{\lambda}(a_{\lambda\alpha}a_{\varrho+\lambda,\beta}-a_{\varrho+\lambda,\alpha}a_{\lambda\beta})=ni_{\alpha\beta},\quad \sum_{\lambda}(a_{\alpha\lambda}a_{\beta,\varrho+\lambda}-a_{\alpha,\varrho+\lambda}a_{\beta\lambda})=ni_{\alpha\beta},$$

wo $i_{\alpha\beta}=+1$ oder -1 ist, je nachdem $\beta-\alpha=+\varrho$ oder $-\varrho$ ist, und in jedem andern Falle $i_{\alpha\beta}=0$ ist. Ist J das System der $4\varrho^2$ Grössen $i_{\alpha\beta}$, so ist (vgl. d. J. Bd. 89, S. 40.)

$$(3.)\qquad J^2=-E,\quad J^{-1}=J'=-J.$$

Ist A das System der $4\varrho^2$ Zahlen $a_{\alpha\beta}$, so nenne ich die Transformation, durch welche die Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ in $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ übergehen, der Kürze halber die Transformation A. Die Formeln (2.) können dann in

$$(4.)\qquad A'JA=nJ,\quad AJA'=nJ$$

zusammengefasst werden.

Sei nun in leicht verständlicher Bezeichnung (vgl. *Laguerre* l. c.)

$$A=\begin{pmatrix}\mathit{A} & \mathit{B}\\ \mathit{\Gamma} & \mathit{\Delta}\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix}0 & E\\ E & 0\end{pmatrix},$$

wo die grossen griechischen Buchstaben Systeme von ϱ^2 Grössen bezeichnen, nämlich E die Grössen $\varepsilon_{\alpha\beta}$, die gleich 1 oder 0 sind, je nachdem $\alpha=\beta$ ist oder nicht, A die Grössen $a_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta=1,2,\dots\varrho)$, B die Grössen $a_{\alpha,\varrho+\beta}$ u. s. w., und wo 0 ein System von ϱ^2 verschwindenden Elementen ist. Die Systeme A, B, $\mathit{\Gamma}$, $\mathit{\Delta}$ nenne ich der Reihe nach den 1., 2., 3., 4. Quadranten des Systems A. Da

$$A'=\begin{pmatrix}\mathit{A}' & \mathit{\Gamma}'\\ B' & \mathit{\Delta}'\end{pmatrix}$$

ist, so folgen aus (4.) die Relationen

$$(5.)\qquad \begin{cases}\mathit{A}'\mathit{\Gamma}-\mathit{\Gamma}''\mathit{A}=0, & \mathit{A}B'-B\mathit{A}'=0,\\ B'\mathit{\Delta}-\mathit{\Delta}'B=0, & \mathit{\Gamma}'\mathit{\Delta}'-\mathit{\Delta}\mathit{\Gamma}''=0,\\ \mathit{A}'\mathit{\Delta}-\mathit{\Gamma}''B=nE, & \mathit{A}\mathit{\Delta}'-B\mathit{\Gamma}''=nE,\\ \mathit{\Delta}'\mathit{A}-B'\mathit{\Gamma}'=nE, & \mathit{\Delta}\mathit{A}'-\mathit{\Gamma}'B'=nE.\end{cases}$$

Sind M, T und $\bar{T}$ die Systeme der Grössen $\mu_{\alpha\beta}$, $\tau_{\alpha\beta}$ und $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$, so ist den Gleichungen (1.) zufolge

$$(6.)\qquad \mathit{A}+T\mathit{\Gamma}'=M,\quad B+T\mathit{\Delta}=M\bar{T}.$$

Durch Vertauschung von i mit $-i$ ergiebt sich daraus

$$A+T_0\Gamma=M_0,\quad B+T_0\Delta=M_0\bar{T}_0,$$

und mithin ist

$$\begin{pmatrix}E & T\\ E & T_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ \Gamma & \Delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M & M\ \bar{T}\\ M_0 & M_0\bar{T}_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M & 0\\ 0 & M_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E & \bar{T}\\ E & \bar{T}_0\end{pmatrix},$$

oder wenn man

$$P=\begin{pmatrix}E & T\\ E & T_0\end{pmatrix},\quad \bar{P}=\begin{pmatrix}E & \bar{T}\\ E & \bar{T}_0\end{pmatrix},\quad M=\begin{pmatrix}M & 0\\ 0 & M_0\end{pmatrix}$$

setzt,

$$(7.)\qquad PA=M\bar{P}.$$

Ist M ein (zerlegbares) System, in welchem der zweite und dritte Quadrant verschwinden, so ersetzt diese Gleichung die Beziehungen (1.) zwischen den Parametern $\tau_{\alpha\beta}$ und $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ vollständig. Ist

$$T=\Phi+i\Psi,$$

so ist

$$\begin{pmatrix}E & T\\ E & T_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-T_0 & T\\ E & -E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}T-T_0 & 0\\ 0 & T-T_0\end{pmatrix}=2i\begin{pmatrix}\Psi & 0\\ 0 & \Psi\end{pmatrix},$$

und mithin kann, da Ψ eine positive Form ist, die Determinante von P nicht verschwinden. Nach (7.) ist daher die Determinante von M, also auch die von M von Null verschieden. Aus den Gleichungen (6.) und den Relationen

$$(8.)\qquad \Delta'-\bar{T}\Gamma''=nM^{-1},\quad -B'+\bar{T}A'=nM^{-1}T,$$

die sich mit Hülfe der Formeln (5.) aus ihnen ableiten lassen, folgt daher, dass sich jedes der beiden Parametersysteme $\tau_{\alpha\beta}$ und $\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ durch das andere rational ausdrücken lässt.

Aus (6.) ergiebt sich durch den Uebergang zu den conjugirten und conjugirt complexen Systemen, weil das System T symmetrisch ist,

$$A'+\Gamma''T_0=M_0',\quad B'+\Delta'T_0=\bar{T}_0M_0',$$

und mithin ist

$$M(\bar{T}-\bar{T}_0)M_0'=(M\bar{T})M_0'-M(T_0M_0')=(B+TA)(A'+\Gamma''T_0)-(A+T\Gamma)(B'+\Delta'T_0)$$
$$=(BA'-AB')+T(\Delta A'-\Gamma B')+(B\Gamma''-A\Delta')T_0+T(\Delta\Gamma''-\Gamma\Delta')T_0=n(T-T_0)$$

oder

$$(9.)\qquad M\bar{\Psi}M_0'=n\Psi.$$

Haben die Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ solche speciellen Werthe, dass $\tau_{\alpha\beta}=\bar{\tau}_{\alpha\beta}$ ist, so heisst die Transformation A eine ***principale Transformation****) und T ein ***singuläres Parametersystem.***

*) Vergl. oben S. 264

In diesem Falle wird der Gleichung

$$(10.) \qquad M\Psi M_0' = n\Psi$$

zufolge die positive Form Ψ durch die Substitution $\frac{1}{\sqrt{n}}M$ und die conjugirt complexe in sich selbst transformirt. Daher zerfällt nach Satz I. die Determinante $|M-rE|$ in lauter lineare Elementartheiler und verschwindet nur für Werthe, deren absoluter Betrag gleich $\sqrt{n}$ ist. Dasselbe gilt von der conjugirt complexen Function $|M_0-rE|$, also auch von der Determinante des Systems

$$M-rE = \begin{pmatrix} M-rE & 0 \\ 0 & M_0-rE \end{pmatrix},$$

weil die Elementartheiler einer zerlegbaren Determinante die der einzelnen Theile zusammengenommen sind (L. § 6, 2; vgl. auch dieses Journal Bd. 86, S. 164). Nun ist aber nach (7.), falls $T = \bar{T}$, also $P = \bar{P}$ ist,

$$(11.) \qquad A-rE = P^{-1}(M-rE)P.$$

Daher sind die Systeme A und M ähnlich, und folglich stimmt die Determinante

$$(12.) \qquad \varphi(r) = |A-rE|$$

mit $|M-rE|$ in den Elementartheilern überein. Daraus folgt:

IV. ***Wenn eine Transformation für ein bestimmtes Werthsystem der Parameter eine principale Transformation wird, so zerfällt ihre charakteristische Determinante in lauter lineare Elementartheiler und verschwindet nur für Werthe, deren absoluter Betrag gleich der Quadratwurzel aus dem Transformationsgrade ist.***

Hat also die Gleichung $\varphi(r) = 0$ reelle Wurzeln, so müssen dieselben gleich $\pm\sqrt{n}$ sein. Ist ferner m eine complexe Wurzel, so ist, da die Coefficienten von $\varphi(r)$ reell sind, $m_0 = \frac{n}{m}$ die conjugirt complexe Wurzel. Das Product dieser beiden Wurzeln ist die positive Zahl n. Das Product aller Wurzeln der Gleichung $\varphi(r) = 0$ ist $|A| = n^{\varrho}$ (dieses Journal Bd. 89, S. 41), also positiv, und mithin ist auch das Product ihrer negativen reellen Wurzeln positiv. Folglich ist die Ordnung der Wurzel $-\sqrt{n}$ eine gerade Zahl, und da der Grad von $\varphi(r)$ gleich 2ϱ, also gerade ist, so muss auch die Ordnung der Wurzel $+\sqrt{n}$ eine gerade Zahl sein. Sind also die Wurzeln der Gleichung $\varphi(r) = 0$ alle unter einander verschieden, so kann keine von ihnen reell sein.

§ 4.

Ehe ich dazu übergehe zu zeigen, dass die oben als nothwendig erkannten Bedingungen der principalen Transformation auch hinreichend sind, will ich die durch die Gleichungen

$$(1.)\qquad a_{\alpha\beta}+\sum_{\lambda}\tau_{\alpha\lambda}a_{\varrho+\lambda,\beta}=\mu_{\alpha\beta},\quad a_{\alpha,\varrho+\beta}+\sum_{\lambda}\tau_{\alpha\lambda}a_{\varrho+\lambda,\varrho+\beta}=\sum_{\lambda}\mu_{\alpha\lambda}\tau_{\lambda\beta}$$

bestimmte Beziehung zwischen den beiden Systemen A und T genauer untersuchen. Seien m und m' zwei (verschiedene oder gleiche) Wurzeln der Gleichung $\varphi(r)=0$, und ω_λ und ω'_λ $(\lambda=1,2,\dots 2\varrho)$ Lösungen der beiden Systeme linearer Gleichungen

$$(2.)\qquad \sum_{\lambda}^{2\varrho}\omega_\lambda a_{\lambda\beta}=m\omega_\beta \qquad (\beta=1,2,\dots 2\varrho)$$

und

$$\sum_{\lambda}^{2\varrho}\omega'_\lambda a_{\lambda\beta}=m'\omega'_\beta.$$

Dann ist

$$mm'\sum_{\beta}(\omega_\beta\omega'_{\varrho+\beta}-\omega_{\varrho+\beta}\omega'_\beta)=\sum_{\lambda,\mu}^{2\varrho}\omega_\lambda\omega'_\mu\Big(\sum_{\beta}a_{\lambda\beta}a_{\mu,\varrho+\beta}-a_{\lambda,\varrho+\beta}a_{\mu\beta}\Big)$$

$$=n\sum_{\lambda}(\omega_\lambda\omega'_{\varrho+\lambda}-\omega_{\varrho+\lambda}\omega'_\lambda),$$

und daher entweder $mm'=n$ oder

$$(3.)\qquad \sum_{\lambda}(\omega_\lambda\omega'_{\varrho+\lambda}-\omega_{\varrho+\lambda}\omega'_\lambda)=0 \qquad (mm'\neq n).$$

Da nach (2.) auch $\sum_{\lambda}\omega_\lambda^{(\mu)}a_{\lambda\beta}=m_\mu\omega_\beta^{(\mu)}$ und da $mm_\mu=n$ ist, so ist folglich auch

$$(3^*.)\qquad \sum_{\lambda}(\omega_\lambda^{(\mu)}\omega'_{\varrho+\lambda}-\omega_{\varrho+\lambda}^{(\mu)}\omega'_\lambda)=0 \qquad (m\neq m).$$

Ferner ist

$$m\sum_{\beta}(a_{\alpha\beta}\omega_{\varrho+\beta}-a_{\alpha,\varrho+\beta}\omega_\beta)=\sum_{\lambda}^{2\varrho}\omega_\lambda\Big(\sum_{\beta}^{\varrho}a_{\alpha\beta}a_{\lambda,\varrho+\beta}-a_{\alpha,\varrho+\beta}a_{\lambda\beta}\Big),$$

also $n\omega_{\varrho+\alpha}$, wenn $\alpha\leqq\varrho$, und $-n\omega_{\alpha-\varrho}$, wenn $\alpha>\varrho$ ist. Mithin ist, da $mm_\mu=n$ ist,

$$(4.)\qquad \sum_{\lambda}(a_{\alpha\lambda}\omega_{\varrho+\lambda}-a_{\alpha,\varrho+\lambda}\omega_\lambda)=m_\mu\omega_{\varrho+\alpha},\quad \sum_{\lambda}(a_{\varrho+\alpha,\lambda}\omega_{\varrho+\lambda}-a_{\varrho+\alpha,\varrho+\lambda}\omega_\lambda)=-m_\mu\omega_\alpha.$$

Multiplicirt man also die Gleichungen (1.) mit $\omega_{\varrho+\beta}$ und $-\omega_\beta$ und addirt sie, so erhält man

$$m_\mu\Big(\omega_{\varrho+\alpha}-\sum_{\lambda}\omega_\lambda\tau_{\alpha\lambda}\Big)=\sum_{\beta}\mu_{\alpha\beta}\omega_{\varrho+\beta}-\sum_{\beta,\lambda}\omega_\beta\tau_{\lambda\beta}\mu_{\alpha\lambda},$$

oder wenn man in der letzten Summe β und λ vertauscht und

$$(5.)\qquad \sum_{\lambda}\omega_\lambda\tau_{\lambda\beta}-\omega_{\varrho+\beta}=w_\beta$$

setzt,

$$(6.) \quad m_0 w_\alpha = \sum_\beta \mu_{\alpha\beta} w_\beta.$$

Sei nun m eine ξ-fache Wurzel der Gleichung $|M-rE| = 0$ und eine η-fache Wurzel der Gleichung $|M_0-rE| = 0$, also nach Formel (11.) § 3 eine $\xi+\eta = \zeta$-fache Wurzel der Gleichung $|A-rE| = 0$. Da die Elementartheiler dieser Determinanten alle linear sind, so ist der Rang des Systems $A-mE$ gleich $2\varrho-\zeta$ und der von $M-m_0E$ gleich dem von M_0-mE, also gleich $\varrho-\eta$. Mithin haben die Gleichungen (2.) ζ linear unabhängige Lösungen ω_λ $(\lambda = 1, \dots 2\varrho)$, und aus diesen ergeben sich mittelst der Formeln (5.) ebenso viele Lösungen w_β $(\beta = 1, \dots \varrho)$ der Gleichungen (6.). Da diese aber nur η linear unabhängige Lösungen besitzen, so müssen zwischen den $\xi+\eta$ so erhaltenen Systemen von je ϱ Grössen w_β mindestens ξ lineare Relationen bestehen. Da man die ζ Lösungen ω_λ durch ζ beliebige unabhängige lineare Verbindungen ersetzen kann, so kann man dieselben so wählen, dass ξ der entsprechenden Systeme von ϱ Grössen w_β verschwinden. Nennt man also diejenigen Lösungen ω_λ der linearen Gleichungen (2.), für welche $w_\beta = 0$ oder

$$(7.) \quad \sum_\lambda \omega_\lambda \tau_{\lambda\beta} = \omega_{\varrho+\beta}$$

ist, Lösungen erster Art, so entsprechen der Wurzel m mindestens ξ solche Lösungen.

Die Lösungen erster Art haben einige von den Werthen der Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ unabhängige Eigenschaften. Sind ω_λ und ω'_λ zwei solche Lösungen, gleichgültig, ob sie derselben oder verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\varphi(r) = 0$ entsprechen, so ist auch $\sum_\lambda \omega'_\lambda \tau_{\lambda\beta} = \omega'_{\varrho+\beta}$ und daher

$$\sum_\varkappa (\omega_\varkappa \omega'_{\varrho+\varkappa} - \omega_{\varrho+\varkappa}\omega'_\varkappa) = \sum_{\varkappa,\lambda} (\omega_\varkappa \omega'_\lambda \tau_{\lambda\varkappa} - \omega'_\varkappa \omega_\lambda \tau_{\lambda\varkappa}),$$

also weil $\tau_{\varkappa\lambda} = \tau_{\lambda\varkappa}$ ist,

$$(8.) \quad \sum_\lambda (\omega_\lambda \omega'_{\varrho+\lambda} - \omega_{\varrho+\lambda}\omega'_\lambda) = 0.$$

Ist ferner ω_λ eine Lösung erster Art, so folgt aus (7.) und der conjugirt complexen Gleichung $\Sigma \omega_\lambda^{(0)} \tau_{\lambda\beta}^{(0)} = \omega_{\varrho+\beta}^{(0)}$:

$$\sum_\varkappa (\omega_\varkappa \omega_{\varrho+\varkappa}^{(0)} - \omega_{\varrho+\varkappa}\omega_\varkappa^{(0)}) = \sum_{\varkappa,\lambda} (\omega_\varkappa \omega_\lambda^{(0)} \tau_{\lambda\varkappa}^{(0)} - \omega_\varkappa^{(0)} \omega_\lambda \tau_{\lambda\varkappa})$$

$$= \Sigma (\tau_{\varkappa\lambda}^{(0)} - \tau_{\varkappa\lambda}) \omega_\varkappa \omega_\lambda^{(0)} = -2i \Sigma \psi_{\varkappa\lambda} \omega_\varkappa \omega_\lambda^{(0)},$$

und daher ist

$$(9.) \quad \frac{i}{2} \sum_\lambda (\omega_\lambda \omega_{\varrho+\lambda}^{(0)} - \omega_{\varrho+\lambda}\omega_\lambda^{(0)})$$

niemals negativ und kann nur verschwinden, wenn die Grössen $\omega_\varkappa$ $(\varkappa = 1, \dots \varrho)$, also nach (7.) auch die Grössen $\omega_{\varrho+\varkappa}$ sämmtlich verschwinden. Ich will nun die verschiedenen Lösungen der Gleichungen (2.) durch Hinzufügung eines ersten Index von einander unterscheiden. Seien etwa

$$(10.) \qquad \omega_{\alpha\lambda} \qquad (\alpha = 1, 2, \dots \xi;\ \lambda = 1, 2, \dots 2\varrho)$$

ξ der Wurzel m entsprechende unabhängige Lösungen erster Art und sei

$$\sum_\lambda (\omega_{\alpha\lambda}\omega^{(\alpha)}_{\beta,\varrho+\lambda} - \omega_{\alpha,\varrho+\lambda}\omega^{(\alpha)}_{\beta\lambda}) = -2i\,c_{\alpha\beta},$$

also $c^{(\alpha)}_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$. Sind ferner $x_1, \dots x_\xi$ complexe Variabeln und ist

$$\sum_\alpha^\xi x_\alpha \omega_{\alpha\lambda} = \omega_\lambda,$$

so ist

$$\sum_\lambda (\omega_\lambda \omega^{(\alpha)}_{\varrho+\lambda} - \omega_{\varrho+\lambda}\omega^{(\alpha)}_\lambda) = -2i \sum_{\alpha,\beta}^\xi c_{\alpha\beta} x_\alpha x^{(\alpha)}_\beta = -2iX.$$

Die Form X ist also niemals negativ und verschwindet nur, wenn die 2ϱ Grössen ω_λ sämmtlich verschwinden, also da die ξ Lösungen (10.) unabhängig sind, wenn die Variabeln x_α alle Null sind. Mithin ist X eine positive Form vom Range ξ.

Die Grösse m_0 (die, falls m reell ist, gleich m ist) ist eine η-fache Wurzel der Gleichung $|M - rE| = 0$, und folglich giebt es mindestens η der Wurzel m_0 entsprechende Lösungen erster Art, d. h. Lösungen der Gleichungen

$$\sum_\lambda \omega^{(\alpha)}_\lambda a_{\lambda\beta} = m_0 \omega^{(\alpha)}_\beta,$$

die zugleich den Bedingungen

$$\sum_\lambda \omega^{(\alpha)}_\lambda \tau_{\lambda\beta} = \omega^{(\alpha)}_{\varrho+\beta}$$

genügen. Die conjugirt complexen Grössen sind demnach Lösungen der Gleichungen (2.), für welche

$$(11.) \qquad \sum_\lambda \omega_\lambda \tau^{(\alpha)}_{\lambda\beta} = \omega_{\varrho+\beta}$$

Dieselben sollen Lösungen zweiter Art genannt werden. Zwischen je zwei derselben besteht die Beziehung (8.). Der Ausdruck (9.) ist für jede solche Lösung negativ und nur dann Null, wenn die 2ϱ Grössen ω_λ sämmtlich verschwinden; und für eine lineare Verbindung von η solchen Lösungen mit veränderlichen Coefficienten ist er eine negative Form $-Y$ von η Variabelnpaaren.

Die Lösungen erster und die zweiter Art sind linear unabhängig von einander. Denn sonst wäre eine lineare Verbindung der Lösungen erster

Art einer solchen der Lösungen zweiter Art gleich. Nun ist aber jede lineare Verbindung der Lösungen erster (zweiter) Art wieder eine Lösung erster (zweiter) Art. Es gäbe also eine Lösung, die zugleich von der ersten und der zweiten Art wäre. Dies ist aber unmöglich, weil der Ausdruck (9.) für die Lösungen erster Art positiv, für die zweiter Art negativ und beide Mal von Null verschieden ist. Da nun $\xi+\eta=\zeta$ ist, so giebt es folglich nicht mehr als ξ (η) Lösungen erster (zweiter) Art, und diese zusammen sind ζ linear unabhängige Lösungen der Gleichungen (2.).

Zur Bestimmung der Lösungen erster (oder zweiter) Art muss man ausser der Transformation A auch das Parametersystem T kennen. Ist nur A gegeben, so existiren mitunter mehrere den Gleichungen (1.) genügende Systeme T und für zwei verschiedene T können die einer Wurzel m entsprechenden Systeme von Lösungen erster Art verschieden ausfallen. Die Zerlegung der Zahl ζ in die beiden Summanden ξ und η ist aber, wie ich jetzt zeigen will, von T unabhängig und allein durch A bestimmt. Denn ist ω'_λ eine Lösung erster und ω_λ eine zweiter Art, so folgt aus den Gleichungen

$$\sum_\lambda \omega'_\lambda \tau_{\lambda\beta} = \omega'_{\varrho+\beta} \quad \text{und} \quad \sum_\lambda \omega^{(1)}_\lambda \tau_{\lambda\beta} = \omega^{(1)}_{\varrho+\beta}$$

die Beziehung

$$(12.) \qquad \sum_\lambda (\omega'_\lambda \omega^{(1)}_{\varrho+\lambda} - \omega'_{\varrho+\lambda}\omega^{(1)}_\lambda) = 0.$$

Sind demnach $\omega_{\alpha\lambda}$ ($\lambda = 1, \dots 2\varrho$) für $\alpha = 1, \dots \xi$ die Lösungen erster und für $\alpha = \xi+1, \dots \zeta$ die zweiter Art, die der Wurzel m entsprechen, so ist

$$\sum_\lambda \omega_{\alpha\lambda}\omega^{(1)}_{\beta,\varrho+\lambda} - \omega_{\alpha,\varrho+\lambda}\omega^{(1)}_{\beta\lambda} = 0,$$

falls von den beiden Zahlen α und β die eine $\leqq$, die andere $>\xi$ ist. Sind also $x_1, \dots x_\zeta$ Variabeln und ist

$$\omega_\lambda = \sum_\alpha^\zeta{}_1 x_\alpha \omega_{\alpha\lambda},$$

so ist

$$\frac{i}{2}\sum_\lambda (\omega_\lambda \omega^{(1)}_{\varrho+\lambda} - \omega_{\varrho+\lambda}\omega^{(1)}_\lambda) = X - Y,$$

wo X und Y positive Formen der Variabelnpaare x_α, $x^{(1)}_\alpha$ sind, und X nur von den ersten ξ, Y nur von den letzten η abhängt. Dies ist eine Form vom Range ζ und dem Trägheitsindex ξ. Ist aber $\omega'_{\alpha\lambda}$ ($\alpha = 1, \dots \zeta$; $\lambda = 1, \dots 2\varrho$) irgend ein System von ζ unabhängigen Lösungen der Gleichungen (2.), so ist der analoge Ausdruck eine bilineare Form

$$Z = \sum_{\alpha,\beta}^\zeta{}_1 c_{\alpha\beta} x_\alpha x^{(1)}_\beta,$$

wo $c_{\alpha\beta}^{(\iota)} = c_{\beta\alpha}$ ist. Diese ist aber, da die ζ Lösungen $\omega'_{\alpha\lambda}$ lineare Verbindungen der ζ Lösungen $\omega_{\alpha\lambda}$ sind, der Form $X-Y$ äquivalent, und hat daher denselben Rang ζ und denselben Trägheitsindex ξ. Damit sind die Zahlen ξ und $\eta = \zeta - \xi$ allein durch A ohne Hülfe von T definirt.

Wählt man für die ξ Lösungen erster Art (10.) irgend ξ unabhängige lineare Verbindungen derselben, so erhält man statt der Form X irgend eine äquivalente Form. Da X eine positive Form vom Range ξ ist, so kann man daher diese Lösungen so wählen, dass $X = \sum_1^\xi x_\alpha x_\alpha^{(\iota)}$ wird, oder dass sie den Bedingungen

$$(13.) \qquad \sum_\lambda (\omega_{\alpha\lambda}\omega^{(\iota)}_{\alpha,\varrho+\lambda} - \omega_{\alpha,\varrho+\lambda}\omega^{(\iota)}_{\alpha\lambda}) = -2i,$$

$$(14.) \qquad \sum_\lambda (\omega_{\alpha\lambda}\omega^{(\iota)}_{\beta,\varrho+\lambda} - \omega_{\alpha,\varrho+\lambda}\omega^{(\iota)}_{\beta\lambda}) = 0$$

genügen. Sind dann $\omega_{\alpha\lambda}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots \varrho$; $\lambda = 1, 2, \ldots 2\varrho$) die sämmtlichen $\Sigma(\xi) = \varrho$ Lösungen erster Art, die den verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\varphi(r) = 0$ entsprechen, so genügen nach (3*.) und der eben getroffenen Festsetzung je zwei derselben der Gleichung (14.) und jede einzelne der Gleichung (13.).

§ 5.

Wenn die charakteristische Determinante $\varphi(r)$ einer Transformation A in lauter lineare Elementartheiler zerfällt, und nur für Werthe vom absoluten Betrage $\sqrt{n}$ verschwindet, so ist es nunmehr leicht zu zeigen, dass es stets Parametersysteme T giebt, für welche sie eine principale Transformation wird, und wie diese Systeme sämmtlich gefunden werden. Ist m eine ζ-fache Wurzel der Gleichung $\varphi(r) = 0$, so haben die Gleichungen

$$\sum_\lambda^{2\varrho} x_\lambda a_{\lambda\beta} = m x_\beta \qquad (\beta = 1, 2, \ldots 2\varrho)$$

ζ linearunabhängige Lösungen

$$(1.) \qquad \omega_{\alpha 1}, \quad \ldots \quad \omega_{\alpha\varrho}, \quad \omega_{\alpha,\varrho+1}, \quad \ldots \quad \omega_{\alpha,2\varrho} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \zeta).$$

Da sich aus den Gleichungen (2.) § 4 die Relationen (4.) ergeben, so sind

$$\omega^{(\iota)}_{\alpha,\varrho+1}, \quad \ldots \quad \omega^{(\iota)}_{\alpha,2\varrho}, \quad -\omega^{(\iota)}_{\alpha 1}, \quad \ldots \quad -\omega^{(\iota)}_{\alpha\varrho} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \zeta)$$

ζ linear unabhängige Lösungen der Gleichungen

$$\sum_\lambda^{2\varrho} a_{\alpha\lambda} y_\lambda = m y_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots 2\varrho).$$

Setzt man also

$$\sum_{\lambda}(\omega_{\alpha\lambda}\omega^{(0)}_{\beta,\varrho+\lambda}-\omega_{\alpha,\varrho+\lambda}\omega^{(0)}_{\beta\lambda}) = -2ic_{\alpha\beta},$$

so ist nach Satz II. die Determinante der bilinearen Form

$$Z = \sum_{\alpha,\beta}^{\zeta} c_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$$

von Null verschieden. Wählt man für die Lösungen (1.) irgend ζ unabhängige lineare Verbindungen derselben, so erhält man statt der Form Z irgend eine äquivalente Form. Einer ζ-fachen Wurzel m der Gleichung $\varphi(r)=0$ entspricht also eine bilineare Form Z vom Range ζ, oder vielmehr eine Klasse solcher Formen. Ich theile nun die 2ϱ Wurzeln der Gleichung $\varphi(r)=0$ in zwei Gruppen von je ϱ Wurzeln, die ich Wurzeln erster und zweiter Art nenne. Ist nämlich ξ der Trägheitsindex der einer Wurzel m entsprechenden Form Z, so zähle ich sie ξ Mal als Wurzel erster und $\zeta-\xi=\eta$ Mal als Wurzel zweiter Art. Ist m reell, so kann man die Lösungen (1.) reell wählen. Dann ist $c_{\alpha\beta}=-c_{\beta\alpha}$ rein imaginär und mithin nach § 1 $\zeta=2\xi$. Daher ist m ebenso oft unter die Wurzeln erster, wie unter die zweiter Art zu rechnen. Ist m aber nicht reell, so bilden die den Lösungen (1.) conjugirt complexen Werthe $\omega^{(0)}_{\alpha\lambda}$ ζ Lösungen der Gleichungen

$$\sum x_\lambda a_{\alpha\lambda} = m_0 x_\alpha.$$

Folglich entspricht der Wurzel m_0 die Form

$$-\sum c^{(0)}_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta = -\sum c_{\beta\alpha}x_\alpha y_\beta,$$

deren Trägheitsindex η ist. Daher sind $\xi+\eta=\zeta$ Wurzeln erster und ebenso viele zweiter Art gleich m oder m_0. Nach dem obigen Eintheilungsprincip erhält man also ϱ Wurzeln erster und ϱ zweiter Art, und wenn $m_1, \ldots m_\varrho$ die erster Art sind, so sind die conjugirt complexen Grössen $m_1^{(0)}, \ldots m_\varrho^{(0)}$ die zweiter Art.

Ich wähle nun die Lösungen (1.) so, dass die der Wurzel m entsprechende Form

$$Z = \sum_{\alpha}^{\xi} x_\alpha y_\alpha - \sum_{\alpha}^{\eta} x_{\xi+\alpha}y_{\xi+\alpha}$$

wird, und dass die den Wurzeln m und m_0 zugehörigen Lösungen conjugirt complexe Werthe haben. Sind dann $\omega_{\alpha\lambda}$ $(\alpha=1, 2, \ldots 2\varrho;\ \lambda=1, 2, \ldots 2\varrho)$ die den sämmtlichen Wurzeln entsprechenden Lösungen, so ist nach Formel (3*.), § 4 und der eben getroffenen Festsetzung über Z für je zwei verschiedene derselben

$$(2.) \qquad \sum_{\lambda}(\omega_{\alpha\lambda}\omega^{(0)}_{\beta,\varrho+\lambda}-\omega_{\alpha,\varrho+\lambda}\omega^{(0)}_{\beta\lambda}) = 0$$

und für jede einzelne Lösung

$$\sum_{\lambda}(\omega_{\alpha\lambda}\omega^{(\mathrm{i})}_{\alpha,\varrho+\lambda}-\omega_{\alpha,\varrho+\lambda}\omega^{(\mathrm{i})}_{\alpha\lambda}) = \mp 2i.$$

Nennt man eine dieser Lösungen von der ersten oder zweiten Art, je nachdem das obere oder untere Vorzeichen gilt, so befinden sich unter den einer Wurzel m entsprechenden Lösungen ξ erster und η zweiter Art, und man kann daher jeder Wurzel erster Art eine Lösung erster Art zuordnen, und der conjugirt complexen Wurzel zweiter Art die conjugirt complexe Lösung zweiter Art.

Entspricht der Wurzel erster Art m_α die Lösung $\omega_{\alpha\lambda}$ $(\alpha = 1, \ldots \varrho)$, so bestehen demnach die Relationen

$$(3.)\qquad \sum_{\lambda}(\omega_{\alpha\lambda}\omega_{\beta,\varrho+\lambda}-\omega_{\alpha,\varrho+\lambda}\omega_{\beta\lambda}) = 0,$$

$$(4.)\qquad \sum_{\lambda}(\omega_{\alpha\lambda}\omega^{(\mathrm{i})}_{\beta,\varrho+\lambda}-\omega_{\alpha,\varrho+\lambda}\omega^{(\mathrm{i})}_{\beta\lambda}) = -2i\varepsilon_{\alpha\beta}$$

und

$$(5.)\qquad \sum_{\lambda}^{2\varrho}\omega_{\alpha\lambda}a_{\lambda\beta} = m_\alpha\omega_{\alpha\beta} \qquad (\beta = 1, \ldots 2\varrho).$$

Nach § 2 ist folglich die Determinante ϱ^{ten} Grades $|\omega_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden, und wenn man aus den Gleichungen

$$(6.)\qquad \sum_{\lambda}\omega_{\alpha\lambda}\tau_{\lambda\beta} = \omega_{\alpha,\varrho+\beta}$$

die Unbekannten $\tau_{\alpha\beta}$ berechnet, so ist $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$ und der imaginäre Theil von $\sum_{\alpha,\beta}\tau_{\alpha\beta}n_\alpha n_\beta$ eine positive Form. Setzt man in die Gleichungen (5.) für die Grössen $\omega_{\alpha,\varrho+\beta}$ ihre Werthe aus (6.), so erhält man

$$\sum_{\lambda}\omega_{\alpha\lambda}(a_{\lambda\beta}+\sum_{\varkappa}\tau_{\lambda\varkappa}a_{\varrho+\varkappa,\beta}) = m_\alpha\omega_{\alpha\beta}, \quad \sum_{\lambda}\omega_{\alpha\lambda}(a_{\lambda,\varrho+\beta}+\sum_{\varkappa}\tau_{\lambda\varkappa}a_{\varrho+\varkappa,\varrho+\beta}) = m_\alpha\sum\omega_{\alpha\lambda}\tau_{\lambda\beta},$$

oder wenn man

$$a_{\alpha\beta}+\sum_{\lambda}\tau_{\alpha\lambda}a_{\varrho+\lambda,\beta} = \mu_{\alpha\beta}, \quad a_{\alpha,\varrho+\beta}+\sum_{\lambda}\tau_{\alpha\lambda}a_{\varrho+\lambda,\varrho+\beta} = \mu'_{\alpha\beta}$$

setzt,

$$(7.)\qquad \sum_{\lambda}\omega_{\alpha\lambda}\mu_{\lambda\beta} = m_\alpha\omega_{\alpha\beta},$$

$$\sum_{\lambda}\omega_{\alpha\lambda}\mu'_{\lambda\beta} = \sum_{\lambda}m_\alpha\omega_{\alpha\lambda}\tau_{\lambda\beta} = \sum_{\varkappa,\lambda}\omega_{\alpha\varkappa}\mu_{\varkappa\lambda}\tau_{\lambda\beta}$$

oder

$$\sum_{\lambda}\omega_{\alpha\lambda}(\mu'_{\lambda\beta}-\sum_{\varkappa}\mu_{\lambda\varkappa}\tau_{\varkappa\beta}) = 0,$$

also, weil die Determinante $|\omega_{\alpha\beta}|$ von Null verschieden ist,

$$\mu'_{\alpha\beta} = \sum_{\lambda}\mu_{\alpha\lambda}\tau_{\lambda\beta}.$$

Damit ist die Existenz eines den Gleichungen (1.) § 4 und der Convergenz-

bedingung der Thetareihe genügenden Systems von Parametern $\tau_{\alpha\beta} = \tau_{\beta\alpha}$ dargethan. Aus den Gleichungen (7.) folgt

$$\sum_{\lambda} \omega_{\alpha\lambda}(\mu_{\lambda\beta} - r\varepsilon_{\lambda\beta}) = (m_\alpha - r)\omega_{\alpha\beta}$$

und mithin

$$|\omega_{\alpha\beta}||\mu_{\alpha\beta} - r\varepsilon_{\alpha\beta}| = |\omega_{\alpha\beta}|\Pi(m_\alpha - r).$$

Daher sind $m_1, \ldots m_\varrho$ die Wurzeln der Gleichung $|M - rE| = 0$ und $m_1^{(0)}, \ldots m_\varrho^{(0)}$ die der Gleichung $|M_0 - rE| = 0$. Indem man die entwickelte Regel zur Bestimmung der Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ mit der im vorigen Paragraphen ausgeführten Analyse vergleicht, erkennt man, dass auf dem angegebenen Wege *alle* Systeme T gefunden werden, für die A principale Transformation ist. Ist demnach A eine den Eingangs angegebenen Bedingungen genügende Transformation, so gilt der Satz:

V. ***Entspricht jeder Wurzel m der charakteristischen Gleichung von A eine definite (positive oder negative) Form Z, so giebt es ein und nur ein System T, für welches A principale Transformation ist; im entgegengesetzten Falle aber giebt es unzählig viele Systeme T. Im ersten Falle sind die Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ algebraische Zahlen, im andern lassen sie sich als rationale Functionen unabhängiger Variabeln mit algebraischen Zahlencoefficienten darstellen.***

Die Veränderlichkeit dieser Variabeln ist dann aber durch gewisse Ungleichheiten so einzuschränken, dass Ψ eine positive Form wird. Im ersten Falle hat die Gleichung $\varphi(r) = 0$ keine reelle Wurzel, weil jeder solchen eine indefinite Form Z entspricht. Dieser Fall tritt stets ein, wenn die Wurzeln der Gleichung $\varphi(r) = 0$ alle unter einander verschieden sind.

Aus den Gleichungen (3.) und (4.) folgt, dass man die Grössen $\omega_{\alpha\beta}$ $(\alpha = 1, \ldots \varrho;\ \beta = 1, \ldots 2\varrho)$ als Perioden einer Thetafunction $\Theta(u_1, \ldots u_\varrho)$ mit den Parametern $\tau_{\alpha\beta}$ wählen kann. Setzt man

$$\omega_{\alpha\beta} = m_\alpha \overline{\omega}_{\alpha\beta},$$

so ist nach (5.)

$$(8.) \qquad \sum_{\lambda} \overline{\omega}_{\alpha\lambda} a_{\lambda\beta} = \omega_{\alpha\beta}.$$

Ist also

$$\Theta(m_1 u_1, \ldots m_\varrho u_\varrho) = \overline{\Theta}(u_1, \ldots u_\varrho),$$

so hat die letztere Function die Perioden $\overline{\omega}_{\alpha\beta}$, und ist daher den Formeln (8.) zufolge eine transformirte n^{ter} Ordnung der Function Θ. Aus diesem Grunde heisst die Transformation A eine principale Transformation und $m_1, \ldots m_\varrho$ die Multiplicatoren.

VI. *Bei einer principalen Transformation sind die Multiplicatoren und die ihnen conjugirt complexen Grössen die* 2ϱ *Wurzeln einer Gleichung* $(2\varrho)^{ten}$ *Grades, deren Coefficienten ganze Zahlen sind, der Coefficient der* $(2\varrho)^{ten}$ *Potenz* 1, *das constante Glied* n^{ϱ}. *Alle Multiplicatoren haben denselben absoluten Betrag* $\sqrt{n}$.

Für den Fall $n = 1$ ergiebt sich daraus eine merkwürdige Folgerung. Herr *Kronecker* hat (dieses Journal Bd. 53, S. 173) gezeigt, dass die Wurzeln einer ganzzahligen Gleichung, in welcher der Coefficient der höchsten Potenz 1 ist, falls sie alle den absoluten Betrag 1 haben, sämmtlich Einheitswurzeln sein müssen. Daraus folgt:

VII. *Bei einer principalen Transformation, die eine Transformation erster Ordnung ist, sind die Multiplicatoren sämmtlich Wurzeln der Einheit.*

Ist für ein Parametersystem T jede der beiden Transformationen A und B eine principale, so ist nach Formel (11.), § 3

$$A = P^{-1}MP, \quad B = P^{-1}NP$$

und mithin

$$AB = P^{-1}MPP^{-1}NP = P^{-1}(MN)P.$$

Da MN in derselben Weise zerlegbar ist, wie M und N (vgl. L. § 5, III), so ist folglich AB ebenfalls eine principale Transformation, und folglich bilden alle Transformationen, die für ein gegebenes T principale Transformationen sind, eine *Gruppe*. Speciell ist, wenn h eine ganze Zahl ist, A^h und hA eine solche Transformation. Da ferner

$$nA^{-1} = P^{-1}(nM^{-1})P$$

ist, so ist auch die zu A supplementäre Transformation

$$nA^{-1} = J^{-1}A'J$$

eine principale Transformation (vgl. (8.), § 3).

VIII. *Die Multiplicatoren, die der supplementären Transformation entsprechen, sind die conjugirt complexen Grössen zu denen, die der ursprünglichen Transformation entsprechen.*

Ist C eine Transformation k^{ter} Ordnung, durch welche T in $\overline{T}$ übergeht, so ist nach (7.) § 3

$$PC = N\overline{P}, \quad C^{-1}P^{-1} = \overline{P}^{-1}N^{-1},$$

wo in dem System N der zweite und dritte Quadrant verschwindet. Ist nun

$$A = P^{-1}MP,$$

so ist

$$C^{-1}AC = C^{-1}P^{-1}MPC = \bar{P}^{-1}N^{-1}MN\bar{P},$$

also wenn man

$$kC^{-1}AC = \bar{A}, \quad kN^{-1}MN = \bar{M}$$

setzt,

$$\bar{A} = \bar{P}^{-1}\bar{M}\bar{P}.$$

Daher ist $\bar{A}$ für das Parametersystem $\bar{T}$ eine principale Transformation. (Vgl. *Kronecker*, l. c. S. 281). Da $C'JC = kJ$ ist, so ist gleichzeitig

$$C^{-1}(kA)C = \bar{A} \quad \text{und} \quad C'(JA)C = (J\bar{A}),$$

es sind also nicht nur die Systeme kA und $\bar{A}$ *ähnlich*, sondern auch die Systeme JA und $J\bar{A}$ *congruent*. Betrachtet man zwei Parametersysteme als *äquivalent*, wenn sie durch eine Transformation *erster* Ordnung aus einander hervorgehen, so hat man demnach zwei Transformationen A und $\bar{A}$ als *äquivalent* anzusehen, falls zwischen ihnen die Beziehung

$$C^{-1}AC = \bar{A}, \quad C'(JA)C = J\bar{A}$$

besteht, wo C eine Transformation erster Ordnung ist. Da die Multiplicatoren die Wurzeln der Gleichung $|M - rE| = 0$ sind, so folgt aus der Relation

$$N^{-1}MN = \bar{M}, \quad N^{-1}MN = \bar{M},$$

dass zwei äquivalenten Transformationen die nämlichen Multiplicatoren entsprechen. Die beiden Systeme A und $\bar{A}$ haben also nicht nur dieselbe charakteristische Function $\varphi(r)$, sondern es entspricht auch jeder mehrfachen Wurzel m der Gleichung $\varphi(r) = 0$ in beiden der nämliche Trägheitsindex ξ. (Vgl. § 8.)

§ 6.

Da das Theorem I das Fundament der ganzen folgenden Entwicklung bildet, so will ich hier für dasselbe noch einen zweiten Beweis mittheilen. Ist $R = P + Qi$, so zerfällt die Gleichung

$$R_0'R = E, \quad (P' - iQ')(P + iQ) = E$$

in die beiden Gleichungen

$$P'P + Q'Q = E, \quad P'Q - Q'P = 0.$$

Ist also

$$W = \begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix}, \quad W' = \begin{pmatrix} P' & Q' \\ -Q' & P' \end{pmatrix},$$

so ist

$$W'W = \begin{pmatrix} P'P+Q'Q & -P'Q+Q'P \\ -Q'P+P'Q & Q'Q+P'P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

und mithin ist W ein reelles orthogonales System. Ist ferner

$$U = \begin{pmatrix} E & iE \\ iE & E \end{pmatrix},$$

so ist der Formel

$$\begin{pmatrix} E & iE \\ iE & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -iE \\ -iE & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2E & 0 \\ 0 & 2E \end{pmatrix}$$

zufolge die Determinante von U nicht gleich Null, und es ist

$$\begin{pmatrix} E & iE \\ iE & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & -Q \\ Q & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P+iQ & (P+iQ)i \\ (P-iQ)i & P-iQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P+iQ & 0 \\ 0 & P-iQ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & iE \\ iE & E \end{pmatrix}$$

oder

$$UWU^{-1} = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R_0 \end{pmatrix} = V.$$

Da die Systeme V und W ähnlich sind, so stimmen ihre charakteristischen Functionen in den Elementartheilern überein, und da V zerlegbar ist, so sind die Elementartheiler seiner charakteristischen Determinante die Elementartheiler derer von R und R_0 zusammengenommen. Daher hat $|R-rE|$ die nämlichen Eigenschaften, wie die charakteristische Function einer reellen orthogonalen Substitution.

Daraus hat sich in § 3 ergeben, dass die Wurzeln der Gleichung $(2\varrho)^{\text{ten}}$ Grades $\varphi(r) = |A-rE| = 0$ alle dem absoluten Betrage nach gleich $\sqrt{n}$ sein müssen. Damit dies der Fall sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die Wurzeln der Gleichung ϱ^{ten} Grades $\chi(s) = 0$, in welche $\varphi(r)$ durch die Substitution $r+\frac{n}{r} = s$ übergeht, alle reell sind und zwischen $+2\sqrt{n}$ und $-2\sqrt{n}$ liegen. Nach L. § 3 genügt s der Gleichung $|A+nA^{-1}-sE| = 0$, und weil $(A+nA^{-1}-sE)J = AJ-J'A'-sJ$ und die Determinante dieser alternirenden Form ein Quadrat ist, so ist $\chi(s)$ gleich der *Pfaff*schen Function derselben:

$$\chi(s) = |AJ+JA'-sJ|^{\frac{1}{2}}.$$

§ 7.

Die in § 3 angegebenen Relationen zwischen den Parametern T und $\overline{T}$ lassen mannigfache Umformungen zu, von denen ich hier die wichtigsten zusammenstellen will. Setzt man

$$F = \begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & \Psi \end{pmatrix},$$

so folgt aus der Formel (9.) § 3 und der conjugirt complexen

$$(1.) \qquad M\bar{F}M_0' = nF,$$

und mithin ist

$$M_0'F^{-1}M = n\bar{F}^{-1}, \quad \bar{P}_0'M_0'F^{-1}M\bar{P} = n\bar{P}_0'\bar{F}^{-1}\bar{P},$$

also weil nach (7.) § 3

$$PA = M\bar{P}, \quad A'P_0' = \bar{P}_0'M_0'$$

ist,

$$A'P_0'F^{-1}PA = n\bar{P}_0'\bar{F}^{-1}\bar{P},$$

oder wenn man

$$(2.) \qquad P_0'F^{-1}P = 2H$$

setzt, (vgl. L. § 8, III.)

$$(3.) \qquad A'HA = n\bar{H}.$$

Da F eine positive Form ist, so ist es nach § 1 auch F^{-1}, mithin auch die nach (2.) ihr äquivalente Form H. Ist $\bar{T} = T$, so wird demnach durch die Substitution $\frac{1}{\sqrt{n}}A$ die positive Form H in sich selbst transformirt, und daraus ergiebt sich von neuem der Satz IV. Durch Zusammensetzung der drei Systeme auf der linken Seite der Gleichung (2.) findet man

$$(4.) \qquad H = \begin{pmatrix} \Psi^{-1} & \Psi^{-1}\Phi \\ \Phi\Psi^{-1} & \Phi\Psi^{-1}\Phi + \Psi \end{pmatrix}.$$

Folglich ist H reell, also das Coefficientensystem einer positiven quadratischen Form. Da sich aus der Formel (3.) auch umgekehrt wieder die Gleichungen (1.) § 3 ableiten lassen (vgl. die Bemerkung zu Formel (15.)), so enthält sie lediglich eine Umformung der Transformationsrelationen. Die Einführung der für die Transformationstheorie ausserordentlich wichtigen Function H ist, wie bereits in der Einleitung erwähnt, Herrn *Hermite* zu verdanken.

Zu denselben Gleichungen gelangt man auch auf folgendem Wege. Nach (6.) § 3 ist

$$\begin{pmatrix} E & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & M\bar{T} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \bar{T} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und daraus folgt durch Uebergang zu den conjugirten und conjugirt complexen Systemen

$$\begin{pmatrix} A' & \Gamma' \\ B' & \Delta' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ T_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \bar{T}_0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_0' & 0 \\ 0 & M_0' \end{pmatrix}.$$

Setzt man also

$$(5.) \quad G = \begin{pmatrix} E & 0 \\ T_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^{-1} & 0 \\ 0 & \Psi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & T \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

so ist

$$A'GA = \begin{pmatrix} E & 0 \\ T_0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_0' \Psi^{-1} M & 0 \\ 0 & M_0' \Psi^{-1} M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \bar{T} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und mithin, weil nach (9.), § 3

$$M_0' \Psi^{-1} M = n \bar{\Psi}^{-1}$$

ist,

$$(6.) \quad A'GA = n\bar{G}.$$

Durch Zusammensetzung der drei Systeme auf der rechten Seite der Gleichung (5.) erhält man

$$(7.) \quad G = \begin{pmatrix} \Psi^{-1} & \Psi^{-1}(\Phi + i\Psi) \\ (\Phi - i\Psi)\Psi^{-1} & (\Phi - i\Psi)\Psi^{-1}(\Phi + i\Psi) \end{pmatrix},$$

also nach (4.)

$$(8.) \quad G = H + iJ.$$

Der Formel (5.) zufolge entsteht G aus der positiven Form F^{-1} durch conjugirt complexe Substitutionen von verschwindender Determinante. Demnach ist $G = G'$, also $H = H'$, wie auch der Ausdruck (4.) zeigt, und mithin

$$(9.) \quad G' = G_0 = H - iJ.$$

Nun ist nach (5.)

$$G' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi^{-1} & 0 \\ 0 & \Psi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & T_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

und daher ist $G'JG$ aus sieben Systemen zusammengesetzt, von denen die drei mittleren

$$\begin{pmatrix} E & T_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ T_0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ergeben. Folglich ist

$$(10.) \quad G'JG = 0$$

und daher nach (8.) und (9.)

$$(11.) \quad HJH = J.$$

Nach (5.) kann die bilineare Form G und folglich auch $2H = G + G'$ für conjugirt complexe Werthe der entsprechenden Variabeln nie negativ sein. Da ferner nach (11.) die Determinante der Form H nicht verschwindet, so ist sie eine positive Form.

Zu der Formel (10.) und den daran geknüpften Folgerungen kann man auch so gelangen: In der Determinante $|G|$ verschwinden nach (5.) alle Unterdeterminanten $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grades. Daher verschwindet die Function

$|H+rJ|$ der Variabeln r, in welcher der Coefficient von $r^{2\varrho}$ gleich 1 ist, für $r=\pm i$ mindestens von der ϱ^{ten} Ordnung, und da sie nur vom $(2\varrho)^{\text{ten}}$ Grade ist, auch nicht von höherer Ordnung. Folglich ist

$$(12.) \quad |H+rJ| = (r^2+1)^\varrho,$$

also $|H|=1$ und von Null verschieden, und da alle Unterdeterminanten $(\varrho+1)^{\text{ten}}$ Grades von G verschwinden, so zerfällt die Determinante (12.) in lauter lineare Elementartheiler. Da $(H+rJ)J=HJ-rE$ ist, so hat die charakteristische Determinante $|HJ-rE|$ von HJ die nämlichen Eigenschaften, und mithin ist (L. § 3)

$$(HJ)^2=-E \quad \text{oder} \quad HJH=J \quad \text{und} \quad (H-iJ)J(H+iJ)=0.$$

Endlich kann man auch das entwickelte Formelsystem nach der folgenden Methode ableiten, bei der ich zur Abwechslung statt des aus den Perioden und den conjugirt complexen Grössen gebildeten Systems P das aus den reellen und imaginären Theilen der Perioden gebildete System

$$(13.) \quad Q = \begin{pmatrix} E & \Phi \\ 0 & \Psi \end{pmatrix}$$

benutzen werde (Vgl. *Laguerre*, l. c. VII.). Ist $M=K+\Lambda i$, so zerfallen die Relationen (6.) § 3 in

$$\Lambda+\Phi\Gamma=K, \quad B+\Phi\Delta=K\bar{\Phi}-\Lambda\bar{\Psi},$$
$$\Psi\Gamma=\Lambda, \quad \Psi\Delta=\Lambda\bar{\Phi}+K\bar{\Psi}.$$

Daher ist

$$\begin{pmatrix} E & \Phi \\ 0 & \Psi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & K\bar{\Phi}-\Lambda\bar{\Psi} \\ \Lambda & \Lambda\Phi+K\bar{\Psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & -\Lambda \\ \Lambda & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & \bar{\Phi} \\ 0 & \bar{\Psi} \end{pmatrix},$$

oder wenn man

$$K = \begin{pmatrix} K & -\Lambda \\ \Lambda & K \end{pmatrix}$$

setzt

$$(14.) \quad QA = K\bar{Q}.$$

Ist

$$V = \begin{pmatrix} X & Y \\ \Xi & H \end{pmatrix}$$

irgend ein Elementensystem, so ist

$$J^{-1}VJ = \begin{pmatrix} H & -\Xi \\ -Y & X \end{pmatrix},$$

entsteht also aus V, indem man den ersten Quadranten mit dem vierten und den zweiten mit dem dritten vertauscht, und die Vorzeichen der beiden

letzteren umkehrt. Daher ist

$$(15.) \quad J^{-1}KJ = K, \quad JK = KJ,$$

und zugleich ist, wenn K und A beliebig sind, K das allgemeinste mit J vertauschbare reelle System. Die beiden Gleichungen (14.) und (15.) ersetzen also vollständig die Transformationsbedingungen (6.) § 3. Aus ihnen und der Relation $AJA' = nJ$ soll nun einmal Q, das andere Mal K eliminirt werden. Nach (14.) ist

$$A = Q^{-1}K\bar{Q}, \quad A' = \bar{Q}'K'Q'^{(-1)},$$

$$nJ = AJA' = Q^{-1}K\bar{Q}J\bar{Q}'K'Q'^{(-1)},$$

$$nQJQ' = K\bar{Q}J\bar{Q}'K',$$

also wenn man mit J^{-1} multiplicirt und $J^{-1}K = KJ^{-1}$ setzt.

$$nJ^{-1}QJQ' = K(J^{-1}\bar{Q}JQ')K'.$$

Nun ist

$$(J^{-1}QJ)Q' = \begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ -\Phi & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ \Phi & \Psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi & 0 \\ 0 & \Psi \end{pmatrix},$$

also

$$(16.) \quad J^{-1}QJQ' = F$$

und daher

$$(17.) \quad K\bar{F}K' = nF.$$

Aus dieser Relation, die wesentlich mit (1.) identisch ist, leitet man leicht die Formel (9.), § 3 ab. Aus derselben folgt nun, wie oben,

$$K'F^{-1}K = n\bar{F}^{-1}, \quad (\bar{Q}'K')F^{-1}(K\bar{Q}) = n\bar{Q}'\bar{F}^{-1}\bar{Q},$$

also nach (14.)

$$(A'Q')F^{-1}(QA) = n\bar{Q}'\bar{F}^{-1}\bar{Q},$$

und falls man

$$(18.) \quad H = Q'F^{-1}Q$$

setzt,

$$(19.) \quad A'HA = n\bar{H}.$$

Indem man die Reihe dieser Gleichungen rückwärts durchläuft, erhält man umgekehrt aus (19.) die Formeln (14.). Aus (16.) und (18.) folgt

$$(20.) \quad H = J^{-1}Q^{-1}JQ$$

und mithin

$$HJH = J^{-1}Q^{-1}JQJJ^{-1}Q^{-1}JQ = J.$$

Ist das System der Parameter T gegeben, so kann man alle Transformationen A, die für dasselbe principale Transformationen sind, finden, indem

man aus T das System G berechnet, und dann alle ganzzahligen cogredienten Substitutionen sucht, die G in sich selbst, mit einer positiven ganzen Zahl multiplicirt, transformiren. Denn aus $A'GA = nG$ ergeben sich durch Trennung des Reellen vom Imaginären die Gleichungen

$$A'HA = nH, \quad A'JA = nJ,$$

deren erste die Transformationen (6.) § 3 ersetzt, und deren andere das System A charakterisirt.

§ 8.

Um die charakteristische Function $\varphi(r) = |rE-A|$ in die beiden Factoren $|rE-M|.|rE-M_0|$ zu zerlegen, habe ich in § 4 jeder ζ-fachen Wurzel m der Gleichung $\varphi(r) = 0$ eine bilineare Form $Z = Z_0'$ vom Range ζ und vom Trägheitsindex ξ zugeordnet. Diese Form Z will ich jetzt genauer untersuchen. Da die Elementartheiler von $rE-A$ alle vom ersten Grade sind, so ist, nach aufsteigenden Potenzen von $r-m$ entwickelt

$$(1.) \qquad (rE-A)^{-1} = \frac{U}{r-m}+\cdots.$$

Von dem Residuum U habe ich (L. § 13) gezeigt, dass es eine Form vom Range ζ ist und der Gleichung

$$(2.) \qquad U^2 = U$$

genügt. Diese Formel ergiebt sich unmittelbar aus der Identität

$$(rE-A)^{-1}-(sE-A)^{-1} = (s-r)(rE-A)^{-1}(sE-A)^{-1}.$$

Multiplicirt man die Gleichung (1.) mit $rE-A = (r-m)E+mE-A$, so erhält man durch Coefficientenvergleichung

$$(3.) \qquad AU = UA = mU.$$

Ich beschränke nun die Veränderlichkeit von r auf das Stück der Peripherie des mit dem Radius $\sqrt{n}$ um den Coordinatenanfang beschriebenen Kreises, welches innerhalb des Convergenzkreises der Reihe (1.) liegt. Durch Aenderung des Vorzeichens von i ergiebt sich dann aus jener Entwicklung

$$\left(\frac{n}{r}E-A\right)^{-1} = \frac{U_0}{\frac{n}{r}-\frac{n}{m}}+\cdots, \quad (rE-nA^{-1})^{-1} = \frac{U_0Am}{n(r-m)}+\cdots,$$

und, weil nach (3.) $U_0A = m_0U_0$ ist,

$$(rE-nA^{-1})^{-1} = \frac{U_0}{r-m}+\cdots,$$

$$J^{-1}(rE-nA^{-1})^{-1}J = (rE-nJ^{-1}A^{-1}J)^{-1} = (rE-A')^{-1} = \frac{J^{-1}U_0J}{r-m}+\cdots,$$

also

$$(rE-A)^{-1} = \frac{J^{-1}U_0'J}{r-m}+\cdots$$

und daraus durch Vergleichung mit (1.)

$$(4.) \qquad J^{-1}U_0'J = U, \quad JU = U_0'J, \quad UJ = JU_0'.$$

Nach (3.) genügen die Elemente jeder Zeile des Systems U, für $\omega_1, \ldots \omega_{2\varrho}$ gesetzt, den Gleichungen (2.), § 4, und da der Rang von U gleich ζ ist, so erhält man aus ζ passend gewählten Zeilen von U ein vollständiges System unabhängiger Lösungen jener Gleichungen. Daraus folgt, dass die in § 4 mit $-2i\Sigma c_{\alpha\beta}x_\alpha y_\beta$ bezeichnete Form der Form UJU_0' äquivalent ist. Dieselbe ist nach (4.) gleich UUJ und nach (2.) gleich UJ. Da die Determinante von J nicht verschwindet, so ist der Rang von UJ gleich dem von U, also gleich ζ, ein neuer Beweis für den in § 5 gebrauchten Fall des Satzes II. Demnach kann man

$$(5.) \qquad Z = iUJ = iJU_0'$$

setzen, und ξ ist der Trägheitsindex dieser Form vom Range ζ. Aus einem Determinantensatze, den ich dieses Journal Bd. 82, S. 241, II abgeleitet habe, ergiebt sich, dass mindestens eine Hauptunterdeterminante ζ^{ten} Grades von Z nicht verschwindet. Man kann nun für Z auch die Form von ζ Variabelnpaaren setzen, deren Coefficienten die Elemente dieser Hauptunterdeterminante sind, und die aus der obigen Form Z von 2ϱ Variabelnpaaren entsteht, indem man gewisse $2\varrho-\zeta$ derselben gleich Null setzt.

Die Form (5.) ist nach L. S. 12 abgesehen von einem positiven Factor

$$Z = iD_r^{\zeta-1}\begin{vmatrix} 0 & x_1 & \cdots & x_\varrho & x_{\varrho+1} & \cdots & x_{2\varrho} \\ y_{\varrho+1} & a_{11}-r & \cdots & a_{1\varrho} & a_{1,\varrho+1} & \cdots & a_{1,2\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_{2\varrho} & a_{\varrho 1} & \cdots & a_{\varrho\varrho}-r & a_{\varrho,\varrho+1} & \cdots & a_{\varrho,2\varrho} \\ -y_1 & a_{\varrho+1,1} & \cdots & a_{\varrho+1,\varrho} & a_{\varrho+1,\varrho+1}-r & \cdots & a_{\varrho+1,2\varrho} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ y_\varrho & a_{2\varrho,1} & \cdots & a_{2\varrho,\varrho} & a_{2\varrho,\varrho+1} & \cdots & a_{2\varrho,2\varrho}-r \end{vmatrix} : D^\zeta\varphi(r)$$

für $r = m$. Ist $\psi(r)$ das Product der verschiedenen Linearfactoren von $\varphi(r)$, so ist $\psi(A) = 0$ die Gleichung niedrigsten Grades, der A genügt (L. § 3). Ist

$$\frac{\psi(r)-\psi(s)}{r-s} = \psi(r, s) = \psi(s, r),$$

so ist

$$(rE-A)^{-1} = \frac{\psi(A, r)}{\psi(r)}$$

und mithin

$$U = \frac{\psi(A, m)}{\psi'(m)}.$$

Da $\psi'(m)\psi'(m_0)$ positiv ist, so kann man demnach auch

$$(6.) \quad Z = i\psi'(m_0)\psi(A, m)J = i\psi'(m)J\psi(A', m_0)$$

setzen.

Ueber die Zahl ξ ist noch Folgendes zu bemerken: Seien A und B zwei *beliebige* den Gleichungen $A'JA = J$ und $B'JB = J$ genügende reelle Systeme, deren charakteristische Determinanten in lauter lineare Elementartheiler zerfallen. Damit dieselben *ähnlich* seien (L. § 7), ist dann nothwendig und hinreichend, dass sie gleiche charakteristische Functionen $\varphi(r)$ haben. Ist diese Bedingung erfüllt, so giebt es unter den unzählig vielen Transformationen von A in B, d. h. den der Gleichung $Q^{-1}AQ = B$ genügenden Systemen auch stets solche, die ausserdem noch die Bedingung

$$(7.) \quad Q'JQ = J$$

befriedigen. Man kann A auch immer durch reelle Transformationen Q in B transformiren, aber nicht immer durch solche, die zugleich reell sind und der Nebenbedingung (7.) genügen, sondern damit dies der Fall sei, muss jeder Wurzel m der Gleichung $\varphi(r) = 0$ in A und B der nämliche Trägheitsindex ξ entsprechen. In diesem Sinne sind die Zahlen ξ Invarianten des Systems A.

§ 9.

Zum Schluss will ich die entwickelte allgemeine Theorie an einigen speciellen Beispielen erläutern und werde zunächst den Fall untersuchen, wo die Multiplicatoren alle einander gleich sind. Sieht man von der gewöhnlichen Multiplication mit einer ganzen rationalen Zahl ab, so tritt dieser Fall nur ein, wenn die Gleichung $\varphi(r) = 0$ zwei ϱ-fache complexe Wurzeln hat, und einer derselben (m) eine positive, mithin der andern (m_0) eine negative Form Z entspricht. Ist $2m = p + qi$, so ist die in § 8 eingeführte Function

$$(1.) \quad \psi(r) = r^2 - pr + n$$

und mithin nach Formel (6.), § 8

$$Z = q(A - m_0)J = q\begin{pmatrix} -B & A - m_0E \\ -\Delta + m_0E & \Gamma \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichung $Z = Z'_0$ folgt

$$(2.) \quad B = B', \quad \Gamma = \Gamma', \quad A + \Delta' = pE.$$

Zu den nämlichen Relationen gelangt man mittelst der Gleichung

$$A^2-pA+nE = 0,$$

der A genügt (L. § 3). Setzt man dieselbe mit JA' zusammen, so erhält man nach (4.) § 3

$$AJ+JA' = pJ,$$

und daraus die Formeln (2.). Die charakteristische Function von M zerfällt in ϱ lineare Elementartheiler $r-m$. Daher ist (L. § 3, S. 12) $M = mE$, also nach (6.) § 3

$$\mathcal{A}+T\Gamma' = mE, \quad B+T\Delta = mT,$$

oder

$$T\Gamma' = mE-\mathcal{A}, \quad B = T(mE-\Delta).$$

Aus diesen Gleichungen und den conjugirt complexen ergiebt sich

$$(T-T_0)\Gamma' = (m-m_0)E, \quad (T^{-1}-T_0^{-1})B = T^{-1}(T_0-T)T_0^{-1}B = (m-m_0)E.$$

Folglich sind die Determinanten von B und Γ und demnach auch die von $mE-\mathcal{A}$ und $mE-\Delta$ von Null verschieden, und es ist

$$(3.) \qquad T = (mE-\mathcal{A})\Gamma'^{-1} = B(mE-\Delta)^{-1} = \Gamma'^{-1}(\Delta-m_0E) = (\mathcal{A}-m_0E)^{-1}B.$$

In Uebereinstimmung mit dem Satze V ist also, trotzdem die Gleichung $\varphi(r) = 0$ zwei ϱ-fache Wurzeln hat, das System T völlig bestimmt. Damit der eben behandelte Fall eintrete, ist ausser den Gleichungen (2.) nothwendig und hinreichend, dass B eine definite Form ist. Die Wurzel m ist dann so zu wählen, dass qB eine negative Form wird.

Zweitens betrachte ich den Fall $\varrho = 2$ und

$$A = \begin{pmatrix} p & 0 & a & b \\ 0 & p & b & c \\ -\frac{c}{k} & \frac{b}{k} & 0 & 0 \\ \frac{b}{k} & -\frac{a}{k} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wo k ein gemeinsamer Divisor von a, b, c, ferner $p^2 < 4n$ und nach (2.) § 3

$$(4.) \qquad ac-b^2 = kn$$

ist. Ist k positiv, so ist B eine definite Form, und mithin ist, wie eben gezeigt, für diejenige Wurzel der Gleichung $\varphi(r) = 0$, für welche die Or-

dinate von am negativ ist, $\xi = 2$, für die andere $\xi = 0$. Ist aber k negativ, so ist B eine indefinite Form, und daher ist für beide Wurzeln $\xi = 1$. Da in diesem Beispiel

$$\Gamma = -nB^{-1}, \quad \Delta = pE, \quad \Delta = 0$$

ist, so reduciren sich die Formeln (6.) § 3 auf

$$(5.) \qquad nTB^{-1}T - pT + B = 0$$

oder durch Multiplication mit $T^{-1}BT^{-1}$

$$nE - p(BT^{-1}) + (BT^{-1})^2 = 0,$$

also nach (1.)

$$(6.) \qquad \psi(BT^{-1}) = 0.$$

Ist dies nicht die Gleichung niedrigsten Grades, der BT^{-1} genügt; so ist dieselbe (L. § 3) $\chi(BT^{-1}) = 0$, wo $\chi(r)$ ein Divisor von $\psi(r)$ ist, etwa $\chi(r) = r - m$. Demnach ist den Formeln (3.) entsprechend

$$(7.) \qquad mT = B,$$

also B eine definite Form und k positiv. Ist dagegen (6.) die Gleichung niedrigsten Grades für BT^{-1}, so ist $|BT^{-1} - rE| = \psi(r)$, also nach (4.)

$$(8.) \qquad |rT - B| = k\psi(r)$$

oder

$$(9.) \qquad \tau_{11}c - 2\tau_{12}b + \tau_{22}a = kp, \quad \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 = k.$$

Indem man die Reihe dieser Gleichungen rückwärts durchläuft, erkennt man, dass aus den Formeln (9.) auch wieder die Gleichung (5.) folgt. Setzt man

$$\frac{m\tau_{12} - b}{m\tau_{11} - a} = -\lambda,$$

so ergiebt sich durch Auflösung der Gleichungen (9.), falls

$$(10.) \qquad f(\lambda) = a\lambda^2 + 2b\lambda + c$$

ist,

$$(11.) \qquad \tau_{11} = \frac{a}{m} + \frac{k(m - m_0)}{f(\lambda)}, \quad \tau_{12} = \frac{b}{m} - \frac{k(m - m_0)}{f(\lambda)}\lambda, \quad \tau_{22} = \frac{c}{m} + \frac{k(m - m_0)}{f(\lambda)}\lambda^2,$$

oder wenn x eine reelle Variable ist,

$$\tau_{11}x^2 + 2\tau_{12}x + \tau_{22} = \frac{f(x)}{m} + \frac{k(m - m_0)}{f(\lambda)}(x - \lambda)^2.$$

Subtrahirt man davon die conjugirt complexe Gleichung, so erkennt man, dass, falls $2m = p + qi$ ist, für alle Werthe von x

$$(12.) \qquad q\left[-\frac{f(x)}{n} + \frac{k\{(x - \lambda)^2 f(\lambda_0) + (x - \lambda_0)^2 f(\lambda)\}}{f(\lambda) f(\lambda_0)}\right] > 0$$

sein muss. Ist

$$f(x, \lambda) = ax\lambda + b(x+\lambda) + c,$$

so ist der Ausdruck in der Klammer gleich

$$knf(\lambda_{(1)})(x-\lambda)^2 - f(\lambda)f(x, \lambda_{(1)})^2.$$

Mithin ist die Determinante (B^2-AC) dieser quadratischen Function von x gleich

$$f(\lambda, \lambda_{(1)})^2 f(\lambda) f(\lambda_{(1)}) kn,$$

also negativ, wenn k negativ ist. Derselbe Ausdruck ist aber auch gleich

$$f(\lambda, \lambda_{(1)})[2nk(x-\lambda)(x-\lambda_{(1)}) - f(x)f(\lambda, \lambda_{(1)})].$$

Da k negativ ist, so sind die Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$ reell. Für eine solche ist aber der Klammerausdruck negativ. Also ist er eine negative Form von x, und die Ungleichheit (12.) ist für alle Werthe von x erfüllt, wenn

$$(13.) \qquad qf(\lambda, \lambda_{(1)}) < 0$$

ist. Es muss also λ innerhalb oder ausserhalb des mit dem Radius $\frac{\sqrt{-kn}}{a}$ um den Punkt $\frac{-b}{a}$ beschriebenen Kreises liegen, je nachdem aq positiv oder negativ ist. Man kann daher für m jede der beiden Wurzeln der Gleichung $\varphi(r) = 0$ nehmen. Die Beschränkung der Veränderlichkeit von λ ist aber von der Wahl von m abhängig.

Drittens betrachte ich den Fall, wo die Multiplicatoren alle reell, also gleich $\pm\sqrt{n}$ sind. Dann genügt A der Gleichung $A^2 = nE$ oder

$$(14.) \qquad AJ = JA' = -J'A' = -(AJ)'.$$

Demnach ist AJ eine alternirende Form, also ihre Determinante n^ϱ ein Quadrat. Also ist entweder ϱ gerade oder n ein Quadrat. Die Gleichung (14.) zerfällt in

$$(15.) \qquad B = -B', \quad \Gamma = -\Gamma', \quad A' = \Delta.$$

Ist z. B.

$$A = \begin{Vmatrix} b & a & 0 & 0 \\ -c & -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & -c \\ 0 & 0 & a & -b \end{Vmatrix},$$

also

$$(16.) \qquad b^2 - ac = n,$$

so reduciren sich die Gleichungen (6.), § 3 auf $\Delta T = T\Delta'$, und mithin sind die Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ nur der Bedingung

$$(17.) \qquad a\tau_{22}+2b\tau_{12}+c\tau_{11} = 0$$

unterworfen. Sind daher α und β die beiden (reellen) Wurzeln der Gleichung $a\lambda^2+2b\lambda+c=0$, so kann man setzen

$$(18.) \qquad \tau_{11}=\varkappa+\lambda, \quad \tau_{12}=\alpha\varkappa+\beta\lambda, \quad \tau_{22}=\alpha^2\varkappa+\beta^2\lambda,$$

und damit Ψ positiv sei, ist es nothwendig und hinreichend, dass die Ordinaten der complexen Variabeln $\varkappa$ und λ positiv sind.

Endlich will ich noch die Transformation

$$A = \begin{Vmatrix} -a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \\ -n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

untersuchen. Die Gleichungen (2.), § 4 sind für diesen Fall

$$(19.) \quad \begin{cases} a\omega_1+b\omega_2+c\omega_3+d\omega_4+n\omega_8+m\omega_1 = 0, \\ \omega_1=m\omega_2, \quad \omega_2=m\omega_3, \quad \omega_3=m\omega_4, \quad \omega_4=m\omega_5, \\ a\omega_4+n\omega_5=m\omega_6, \quad b\omega_4+n\omega_6=m\omega_7, \quad c\omega_4+n\omega_7=m\omega_8. \end{cases}$$

Daher ist

$$\omega_1=m^4, \quad \omega_2=m^3, \quad \omega_3=m^2, \quad \omega_4=m, \quad \omega_5=1,$$

$$\omega_6=m_0+a, \quad \omega_7=m_0^2+am_0+b, \quad \omega_8=m_0^3+am_0^2+bm_0+c$$

und, falls

$$\varphi(r) = r^8+ar^7+br^6+cr^5+dr^4+cnr^3+bn^2r^2+an^3r+n^4$$

gesetzt wird, $\varphi(m)=0$. Ist m eine mehrfache Wurzel dieser Gleichung, so sind, weil die Gleichungen (19.) nur eine Lösung zulassen, die entsprechenden Elementartheiler nicht alle vom ersten Grade. Ich nehme daher an, dass die Wurzeln dieser Gleichung alle einfach sind und dem absoluten Betrage nach gleich $\sqrt{n}$. Nun ist

$$\sum_1^4(\omega_\lambda\omega_{4+\lambda}^{(0)}-\omega_{4+\lambda}\omega_\lambda^{(0)}) = 4m^4+3am^3+2bm^2+cm-c\frac{n}{m}-2b\frac{n^2}{m^2}-3a\frac{n^3}{m^3}-\frac{4n^4}{m^4}.$$

Addirt man dazu $m^{-4}\varphi(m)=0$, so wird dieser Ausdruck gleich $D_r(r^{-3}\varphi(r))$ für $r=m$. Demnach muss m so gewählt werden, dass $im^{-3}\varphi'(m)$ positiv

ist, was immer für eine der beiden Wurzeln eines Paares conjugirt complexer Wurzeln eintritt. Diese Wurzeln erster Art seien m_α ($\alpha = 1, 2, 3, 4$). Dann erhält man zur Bestimmung der Parameter $\tau_{\alpha\beta}$ die Gleichungen

$$(20.)\quad \begin{cases} m^4\tau_{11}+m^3\tau_{21}+m^2\tau_{31}+m\tau_{41} &= 1, \\ m^4\tau_{12}+m^3\tau_{22}+m^2\tau_{32}+m\tau_{42} &= m_0+a, \\ m^4\tau_{13}+m^3\tau_{23}+m^2\tau_{33}+m\tau_{43} &= m_0^2+am_0+b, \\ m^4\tau_{14}+m^3\tau_{24}+m^2\tau_{34}+m\tau_{44} &= m_0^3+am_0^2+bm_0+c \end{cases}$$

für $m = m_\alpha$. Der ersten zufolge ist identisch

$$(1-\tau_{11}x^4-\tau_{21}x^3-\tau_{31}x^2-\tau_{41}x) = \Pi\Big(1-\frac{x}{m_\alpha}\Big),$$

also, wenn man

$$(21.)\quad p = -\frac{1}{\Pi(m_\alpha)},\quad q = \frac{\Sigma(m_\alpha)}{\Pi(m_\alpha)},\quad r = -\Sigma\frac{1}{m_\alpha m_\beta},\quad s = \Sigma\frac{1}{m_\alpha}$$

setzt,

$$\tau_{11} = p,\quad \tau_{21} = q,\quad \tau_{31} = r,\quad \tau_{41} = s.$$

Reducirt man die folgenden Gleichungen (20.), in denen $m_0 = \frac{n}{m}$ ist, mittelst der Gleichung $1-pm^4-qm^3-rm^2-sm = 0$ auf den dritten Grad, so müssen alle ihre Coefficienten verschwinden, und man erhält so die Grössen $\tau_{\alpha\beta}$ alle durch die vier Grössen (21.) ausgedrückt. Sind $n_1, \ldots n_4$ Variabeln, so lassen sich diese Ausdrücke in die identische Gleichung

$$(22.)\quad \begin{aligned} p\Sigma\tau_{\varkappa\lambda}n_\varkappa n_\lambda &= (pn_1+qn_2+rn_3+sn_4)^2+n(pn_2+qn_3+rn_4)^2 \\ &\quad +n^2(pn_3+qn_4)^2+n^3(pn_4)^2 \end{aligned}$$

zusammenfassen, und zwischen den Coefficienten von $\varphi(r)$ und den Grössen (21.) erhält man die Gleichungen

$$\begin{aligned} ap &= q-nps, \\ bp &= r-nqs-n^2pr, \\ cp &= s-nrs-n^2qr-n^3pq, \\ dp &= -1-ns^2-n^2r^2-n^3q^2-n^4p^2, \end{aligned}$$

welche sich auch leicht aus der Formel

$$(px^4+qx^3+rx^2+sx-1)(x^4-snx^3-rn^2x^2-qn^3x-pn^4) = p\varphi(x)$$

herleiten lassen.

Zürich, im Januar 1883.

Ueber Strahlensysteme zweiter Ordnung.

(Von Herrn *Wilhelm Stahl* in Aachen.)

Die Strahlensysteme zweiter Ordnung, welche keine Brenncurven haben, sind mit Ausnahme desjenigen siebenter Klasse wenigstens durch ein System einfach unendlich vieler Regelschaaren zweiter Ordnung beschreibbar. Geht man von dieser Eigenschaft der Strahlensysteme zweiter Ordnung aus, so wird man zunächst auf die beiden Arten von Strahlensystemen sechster Klasse, welche Herr *Kummer**) schon bestimmt hat, geführt, und dann ergeben sich für beide als gemeinschaftliche Specialfälle das Strahlensystem fünfter Klasse und die übrigen. Synthetische Constructionen dieser Systeme sind schon bekannt durch Herrn *Reye***), welcher die beiden Strahlensysteme sechster Klasse auf zwei von einander ganz verschiedenen Wegen (der eine ist direct, der andere indirect) abgeleitet hat. Es ist deshalb interessant, auf directem Wege den Zusammenhang und die Abweichungen, welche sich bei den Constructionen dieser Systeme mit Nothwendigkeit ergeben, zu ermitteln. Durch Betrachtung anderer Regelflächen, welche den Strahlensystemen angehören, wird man zu neuen Strahlensystemen geführt, welche den ersten zugeordnet sind, d. h. mit ihnen dieselbe Brennfläche besitzen, ohne ihnen gleichartig zu sein. Die Eigenthümlichkeiten dieser zugeordneten Systeme, besonders ihr Verhalten gegenüber den unter einander gleichartigen sollen in diesem Aufsatze dargestellt werden. Von ihnen hängen gewisse Singularitäten der Brennfläche ab, welche sich nicht durch die Systeme zweiter Ordnung ergeben, wie die Schaar der zweifach berührenden Tangentialebenen etc. In einem späteren Aufsatze gedenke ich für die Brennfläche des Strahlensystems vierter Klasse diese Singularitäten

*) *Kummer,* Ueber die algebraischen Strahlensysteme (Abh. d. Berl. Akad. 1866).

**) *Reye,* Ueber Strahlensysteme zweiter Klasse etc. (dieses Journal Bd. 86, S. 84) und, Ueber das Strahlensystem zweiter Klasse sechster Ord. von der ersten Art (Dieses Journal Bd. 93. S. 81).

näher zu verfolgen. Wir kommen schliesslich zu einer Anzahl interessanter, mit den Strahlensystemen in enger Verbindung stehender Erzeugungen der Kerncurve eines Flächennetzes zweiten Grades mittelst projectiver Kegelbüschel.

§ 1.

Einleitung.

1. Die acht Grundpunkte eines Flächennetzes zweiter Ordnung seien $A, B, \dots H$. Jede Gerade l des Bündels A gehört *einer* Fläche des Netzes an und bestimmt *eine* zweite Gerade l' des Bündels auf derselben Fläche. Die beiden Bündel, welche von l und l' beschrieben werden, sind eindeutig auf einander bezogen, wir bezeichnen sie mit A und A'. Das Entsprechen der Strahlen l und l' ist ein gegenseitiges. Rückt l in einen der sieben Strahlen $A(B, \dots H)$, so ist l' ein beliebiger Strahl eines Kegels dritter Ordnung mit einer Doppelkante. Trifft l' die Kerncurve C_6 des Netzes, so fällt l' mit l zusammen. Beschreibt l einen Strahlenbüschel μ um A, so beschreibt l' einen Kegel, der von μ erstens in den sechs Strahlen getroffen wird, welche die Schnittpunkte von μ mit C_6 enthalten, und zweitens in den zwei Geraden derjenigen F_2, welche von μ in A berührt wird. Dem *Strahlenbüschel* $(A\mu)$ von A entspricht deshalb in A' ein *Kegel achter Ordnung*, welcher in jedem der sieben Strahlen $A(B, \dots H)$ eine dreifache Kante hat. Einem Kegel n^{ten} Grades von A entspricht deshalb im Allgemeinen ein Kegel $8n^{\text{ten}}$ Grades in A', welcher in $A'(B, \dots H)$ $3n$-fache Kanten hat. Enthält der erste Kegel einen der Strahlen $A(B, \dots H)$ r-mal, so erniedrigt sich die Ordnung des zweiten um $3r$.

So finden wir:

Einem Kegel dritter Ordnung von A, welcher die Strahlen $A(B, \dots H)$ einfach enthält, entspricht in A' derselbe Kegel. In der That projicirt dieser Kegel stets die Grundcurve eines im Netze enthaltenen Büschels.

Einem Strahlenbüschel in A, welcher $\overline{AB}$ enthält, entspricht in A' ein Kegel fünften Grades, welcher die Strahlen $A'(C, D, \dots H)$ zu Doppelkanten hat und einfach durch $\overline{A'B}$ geht.

Einem Kegel zweiten Grades von A mit den vier Strahlen $A(B, C, D, E)$ entspricht in A' ein Kegel vierten Grades mit den Doppelkanten $A'(F, G, H)$ und den einfachen Strahlen $A'(B, C, D, E)$.

Einem Kegel dritter Ordnung in A mit der Doppelkante $\overline{AB}$ und den

einfachen Strahlen $A(D, E, \ldots H)$ entspricht in A' ein Kegel dritter Ordnung mit der Doppelkante $\overline{A'C}$ und den einfachen Strahlen $A'(D, E, \ldots H)$.

In den letzten drei Fällen haben wir rationale Kegel vor Augen, welche projectiv auf einander bezogen sind. Die Verbindungsebenen entsprechender Strahlen sind die Tangentialebenen aller ausgewählten Flächen des Netzes in dem Punkte A. Da jedesmal die Kegel die vier Strahlen, welche C_6 treffen, entsprechend gemein haben, so ist der Kegel der Tangentialebenen jedesmal von der zweiten Ordnung.

2. Wir betrachten jetzt eine Verwandtschaft zwischen den Bündeln A und B. Zwei Strahlen m und m' der Bündel seien einander entsprechend, wenn sie auf derselben F_2 des Netzes liegen und verschiedenen Schaaren angehören. Je zwei solcher Strahlen m und m' müssen sich schneiden. Beschreibt m einen Strahlenbüschel μ, so werden die Geraden m' in dem Ebenenbüschel $\overline{BA}(m\ldots)$ liegen. Die einfach unendliche Zahl von Curven des Netzes, welche in A von der Ebene μ berührt werden, wird von B durch einen Kegelbüschel dritter Ordnung projicirt. Jede Gerade m' von B ist Sehne derjenigen Netzcurve, welche von m in A berührt wird. Der Ebenenbüschel $\overline{BA}(m\ldots)$ und der Kegelbüschel B sind hierdurch projectiv und erzeugen einen Kegel vierter Ordnung, welcher $\overline{BA}$ zur dreifachen Kante hat und einfach die Strahlen $B(C, \ldots H)$ enthält; er entspricht dem Büschel $(A\mu)$. Zwischen den Bündeln A und B besteht eine Verwandtschaft vierten Grades. Den Strahlen $A(C, \ldots H)$ von A entsprechen in B unendlich viele Strahlen, welche die Geraden $A(C, \ldots H)$ projiciren. Dem Strahle $\overline{AB}$ von A entspricht in B ein Kegel dritter Ordnung, welcher BA zur Doppelkante hat.

Einem Kegel dritter Ordnung von A, welcher $\overline{AB}$ zur Doppelkante hat und $A(D, E, \ldots H)$ einfach enthält, entspricht in B ein Strahlenbüschel, welcher $\overline{BC}$ enthält etc.

3. Wir wenden uns jetzt zu Eigenschaften des ***Strahlensystems Σ_1 zweiter Ordnung***, welches keine Brenncurve hat und durch ein einfach unendliches System von Regelschaaren zweiten Grades beschrieben werden kann. Die Leitschaaren dieser Regelflächen bilden dann ein zweites Strahlensystem Σ_2 derselben Ordnung und Klasse wie Σ_1. Durch einen beliebigen Punkt P des Raumes dürfen höchstens zwei Flächen des Systems gehen. Die acht associirten Punkte, in welchen irgend drei dieser Flächen sich

schneiden, sind deshalb singuläre Punkte des Strahlensystems und enthalten unendlich viele Strahlen desselben. Alle Regelflächen zweiter Ordnung, deren eine Schaar Erzeugender ein Strahlensystem zweiter Ordnung bildet, gehören einem Flächennetze an. Die acht Grundpunkte des letzteren seien wie oben bezeichnet. Alle Strahlen von Σ_1, welche durch A gehen, bilden einen Kegel, welcher von jeder Curve des Netzes, abgesehen von den Grundpunkten, nur in zwei Punkten geschnitten werden darf. Dann sind nur folgende Fälle möglich, wenn wir die Kegel erster und zweiter Ordnung zunächst ausschliessen.

1) Der Kegel A von Σ_1 ist dritter Ordnung und enthält die Strahlen $A(B, \dots H)$ einfach. Der Kegel A' von Σ_2 fällt mit ihm zusammen. Die Systeme Σ_1 und Σ_2 sind nicht getrennt und besitzen eine Brenncurve vierter Ordnung, welche durch den Kegel A projicirt wird. Der Fall kommt hier nicht weiter in Betracht.

2) Der Kegel A von Σ_1 ist dritter Ordnung, hat $\overline{AB}$ zur Doppelkante und enthält einfach die fünf Strahlen $A(D, \dots H)$; $\overline{AC}$ liegt nicht auf ihm. Der Kegel A' von Σ_2 ist dann nach No. 1 ebenfalls dritter Ordnung, hat $\overline{A'C}$ zur Doppelkante und enthält $A'(D, \dots H)$ einfach.

3) Der Kegel A von Σ_1 ist vierter Ordnung, hat in drei Strahlen $A(B, C, D)$ Doppelkanten und enthält $A(E, \dots H)$ einfach. Der Kegel A' von Σ_2 ist zweiter Ordnung und enthält $A'(E, F, G, H)$.

4) Der Kegel A von Σ_1 ist fünfter Ordnung, hat sechs Strahlen $A(C, D, \dots H)$ zu Doppelkanten und enthält $\overline{AB}$ einfach. Der Kegel A' von Σ_2 ist ein Strahlenbüschel, welcher $\overline{A'B}$ enthält.

Man kann sich nun leicht überzeugen, dass ein Kegel A von Σ_1 vom sechsten oder höheren Grade nicht existiren kann, wenn er von jeder Curve des Netzes, abgesehen von den Grundpunkten, nur in zwei Punkten geschnitten werden soll.

Nach Nr. 2 fällt der zweite Fall mit dem vierten zusammen, und wir erledigen *alle möglichen* Fälle, indem wir als Kegel A von Σ_1 annehmen:

1) einen *Kegel zweiter Ordnung,* welcher vier der Strahlen $A(B, \dots H)$ enthält,

2) einen *Strahlenbüschel,* dessen Ebene durch einen der Punkte $B, \dots H$ geht.

Wir bemerken noch, dass die Ordnung der *Brennfläche* Φ jedes Strahlensystems zweiter Ordnung gleich vier ist.

§ 2.

Das Strahlensystem zweiter Ordnung sechster Klasse erster Art.

1. Die acht associirten Punkte theilen wir in beliebiger Weise in zwei Gruppen A_1, B_1, C_1, D_1 und A_2, B_2, C_2, D_2 von je vier Punkten. A_2 sei Mittelpunkt irgend eines Kegels zweiter Ordnung mit den Strahlen $A_2(A_1, B_1, C_1, D_1)$. Die Erzeugenden desselben liegen auf einem einfach unendlichen System von Flächen $G_{(12)}$ des durch die acht Punkte bestimmten Netzes. Die sämmtlichen Erzeugenden dieser Flächen, welche mit den Kegelstrahlen A_2 denselben Schaaren angehören, bilden dann ***ein Strahlensystem*** Σ_1 zweiter Ordnung; die Schaaren der zweiten Erzeugenden von $G_{(12)}$ liefern ein ***zweites Strahlensystem*** Σ_2 derselben Ordnung und Klasse wie Σ_1. Nach § 1 erkennen wir nun folgende Eigenschaften von Σ_1 und Σ_2. (α und β mögen die Ziffern 1 oder 2 bedeuten.)

Σ_α hat in den Bündeln $A_\beta, \ldots D_\beta$ Kegel zweiter Ordnung, welche durch die Punkte $A_\alpha, \ldots D_\alpha$ gehen, und es bilden auf zweien solcher Kegel die nach $A_\alpha, \ldots D_\alpha$ gehenden Strahlen das gleiche Doppelverhältniss.

Σ_α hat in den Bündeln $A_\alpha, \ldots D_\alpha$ Kegel vierter Ordnung mit den Doppelstrahlen $A_\alpha(B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha)$ und den einfachen Strahlen $A_\alpha(A_\beta, B_\beta, C_\beta, D_\beta)$ etc.

Der Kegel zweiter Ordnung A_2 trifft die Kerncurve C_6 des Netzes ausser in Punkten der Geraden $A_2(A_1, \ldots D_1)$ noch in vier Punkten A_3, B_3, C_3, D_3, welche Mittelpunkte von vier Kegelflächen sind, die zu dem Flächensystem $G_{(12)}$ gehören. Diese vier Punkte liegen deshalb auf allen eben angeführten Kegelflächen zweiter und vierter Ordnung. Die Strahlensysteme Σ_1 und Σ_2 haben vier Kegel zweiter Ordnung mit den Mittelpunkten A_3, B_3, C_3, D_3 gemein.

Wir erhalten so ***drei Gruppen*** von ***je vier Punkten*** und erkennen, dass je zwei dieser Gruppen acht associirte Punkte eines Flächennetzes bilden.

2. Irgend ein Strahl von Σ_1 projicirt die vier Punkte $A_1, \ldots D_1$ durch vier Ebenen, welche dieselbe projective Relation ergeben, wie ein derselben Fläche $G_{(12)}$ angehörender auf dem Kegel $A_2(A_1, \ldots)$ von Σ_1 liegender Strahl. Daher ist die projective Relation der Ebenen, durch welche die vier Punkte $A_1, \ldots D_1$ von irgend einem Strahle von Σ_1 projicirt werden, ***constant,*** oder Σ_1 gehört einem ***Reye***schen ***Complexe****) an, dessen Singularitätentetraeder

*) Vgl. ***Reye,*** dieses Journal Bd. 86, S. 87.

(A_1, B_1, C_1, D_1) ist. Ebenso gehört Σ_2 zu einem *Reye*schen Complexe mit dem Tetraeder (A_2, B_2, C_2, D_2).

Hieraus ergiebt sich nun die Klasse von Σ_1 und Σ_2. Bekanntlich bilden die sämmtlichen Geraden der Flächen des Netzes einen Strahlencomplex dritten Grades. In einer Ebene befindet sich von demselben eine Curve dritter Klasse, welche mit dem *Reye*schen Complex, dem Σ_1 angehört, sechs Tangenten gemein hat. Σ_1 und Σ_2 sind deshalb ***sechster Klasse***.

3. Die Brennfläche Φ von Σ_1 und Σ_2 wird noch von einem dritten Strahlensysteme Σ_3 gleicher Art wie die beiden ersten eingehüllt. Wir zeigen dies, indem wir ein ***zweites System*** von Regelschaaren zweiten Grades bestimmen, durch welches Σ_1 beschrieben wird.

Die Kegel zweiter Ordnung A_1 und B_1, welche zu Σ_2 gehören, werden von allen $G_{(12)}$ in kubischen Raumcurven geschnitten, welche die Punkte $A_2, \ldots D_2$ enthalten. Durch jeden Punkt des Kegels A_1 geht ***eine*** solche Curve, welcher ***eine*** andere auf B_1 entspricht. Die Punktreihen dieser Curven sind projectiv der Art, dass $A_2, \ldots D_2$ sich selbst entsprechen und die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte Strahlen von Σ_1 sind. Es ist hierdurch eine eindeutige Abbildung der Kegel A_1 und B_1 auf einander definirt. Werden jetzt je zwei der Raumcurven auf A_1 durch die Schnitte mit den Strahlen dieses Kegels projectiv auf einander bezogen, so erhalten wir zwischen je zwei Raumcurven auf B_1 ebenfalls eine projective Beziehung, in welcher $A_2, \ldots D_2$ sich selbst entsprechende Punkte sind. Es liegen demnach alle einander entsprechenden Punkte der Raumcurven von B_1 auf einem Strahle dieses Kegels. So ist nun jeder Punktreihe einer Geraden des Kegels A_1 durch die Abbildung auch eine Punktreihe einer Geraden von B_1 projectiv zugeordnet. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser geraden Punktreihen bilden eine zu Σ_1 gehörende Regelschaar. Damit ist ein zweites System von einfach unendlich vielen Regelschaaren zweiter Ordnung von Σ_1 gefunden, welches wir mit $G_{(13)}$ bezeichnen. Alle $G_{(13)}$ gehören zu dem Netze, dessen Grundpunkte $A_1, B_1, C_1, D_1, A_3, B_3, C_3, D_3$ sind. Die ***Leitstrahlen dieser Regelflächen*** bilden ein ***drittes Strahlensystem*** Σ_3 zweiter Ordnung sechster Klasse, welches mit den ersten dieselbe Brennfläche Φ umhüllt. Es besitzt in den Bündeln $A_1, \ldots D_1$, $A_2, \ldots D_2$ Kegel zweiter Ordnung, die mit den schon bekannten übereinstimmen; in den Bündeln $A_3, \ldots D_3$ aber hat es Kegel vierter Ordnung mit je drei Doppelkanten, welche Seiten des Tetraeders $(A_3, \ldots D_3)$ sind. Man erkennt nun leicht, dass

Σ_2 und Σ_3 ein drittes Flächensystem $G_{(23)}$ liefern, dessen Regelschaaren zu Σ_2, dessen Leitschaaren zu Σ_3 gehören. ***Je zwei der drei Systeme $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ können in einem Flächensystem $G_{(\alpha\beta)}$ zusammengefasst werden.***

4. Zwei Regelflächen desselben Systems schneiden sich in einer Curve vierter Ordnung, zwei Flächen verschiedener Systeme aber in einer Geraden und einer kubischen Raumcurve. ***Jeder Strahl l_α von Σ_α wird von der Flächenschaar $G_{(\beta\gamma)}$ in zwei projectiven Punktreihen geschnitten, deren Doppelelemente die Berührungspunkte von l_α mit Φ sind.*** Von drei Flächen $G_{(12)}$, $G_{(23)}$, $G_{(31)}$ haben je zwei eine Gerade gemein, und diese drei Geraden liegen in einer Ebene. Durch einen beliebigen Punkt P des Raumes gehen von Σ_1 zwei Strahlen a_1 und b_1, von Σ_2 die Strahlen a_2, b_2 und von Σ_3 a_3 und b_3, welche sich in folgender Art ordnen.

Auf einer	$G_{(12)}$	mögen	liegen	a_1	und	b_2,
- -	$G_{(23)}$	-	-	b_2	-	a_3;
auf einer	$G_{(31)}$	liegen	dann	a_3	-	b_1,
- -	$G_{(12)}$	-	-	b_1	-	a_2,
- -	$G_{(23)}$	-	-	a_2	-	b_3,
- -	$G_{(31)}$	-	-	b_3	-	a_1.

5. In dem Strahlensystem Σ_1 liegen dreifach unendlich viele ***Regelflächen vierter Ordnung,*** welche man in folgender Weise findet. Σ_1 gehört einem *Reye*schen Complexe S_1 an, dessen Tetraeder die Ecken $A_1, \ldots D_1$ hat; die ihnen gegenüberstehenden Flächen seien α_1, β_1, γ_1, δ_1. Alle kubischen Raumcurven C_1^3, welche durch die Ecken des Tetraeders gehen und auf welchen diese Ecken die projective Relation des Complexes zeigen, sind sogenannte ***Ordnungscurven*** des Complexes*). Alle Sehnen solcher Curven sind Strahlen von S_1. Jede C_1^3 bestimmt eine collineare Beziehung zwischen den Bündeln A_1 und B_1, in welcher dem Büschel $(A_1\beta_1)$ der Büschel $(B_1\alpha_1)$ jedesmal in derselben Weise entspricht und zwar so, dass entsprechende Strahlen der Büschel die Schnittpunkte der Geraden von Σ_1 mit den Ebenen β_1 und α_1 projiciren. Den Schnittgeraden der Ebene β_1 mit dem Kegel A_1, welcher zu Σ_2 und Σ_3 gehört, müssen dann die Schnittgeraden von α_1 mit dem Kegel B_1, welcher Σ_2 und Σ_3 zugehört, entsprechen.

Liegt nun eine Curve C_1^3 vor, so kann man fragen nach allen Strahlen von Σ_1, welche C_1^3 treffen und deshalb Sehnen von C_1^3 sind.

*) Vgl. *Reye*, Geometrie der Lage. Bd. II.

Durch die Zuordnung je zweier Geraden der Kegel zweiter Ordnung A_1 und B_1, welche auf derselben $G_{(12)}$ liegen, sind diese Kegel projectiv auf einander bezogen. Dem Kegel A_1 entspricht aber in der durch C_1^3 bestimmten collinearen Beziehung ein zweiter Kegel in dem Bündel B_1. Die beiden Kegel B_1 sind demnach ebenfalls projectiv und haben zwei ihrer Schnittgeraden in der Ebene α_1 entsprechend gemein. Die Verbindungsebenen entsprechender Strahlen beider Kegel B_1 liefern einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung, welcher die sämmtlichen Σ_1 angehörenden Sehnen von C_1^3 projicirt. *Die Fläche F_1^4 dieser Sehnen* ist daher *vierten Grades;* C_1^3 ist Doppelcurve derselben, und sämmtliche Tangentialebenen, welche durch einen Punkt von C_1^3 gehen, bilden einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung. F_1^4 enthält die acht Punkte $A_2, \ldots D_2, A_3, \ldots D_3$ einfach. Je *drei* Strahlen von Σ_1 bestimmen *eine* F_1^4, auf welcher sie liegen. Von jeder $G_{(12)}$ enthält F_1^4 eine Gerade, und zwei F_1^4 sind projectiv auf einander bezogen, wenn die auf derselben $G_{(12)}$ liegenden Strahlen einander entsprechen.

F_1^4 kann zerfallen in eine Fläche $G_{(12)}$ und eine $G_{(13)}$ und zwar für doppelt unendlich viele C_1^3; niemals aber kann F_1^4 aus einer Fläche dritter Ordnung und einer Ebene bestehen.

Zu den C_1^3 gehören vier Schaaren doppelt unendlich vieler Curven, welche aus einem Kegelschnitt und einer Geraden bestehen, und sechs Schaaren einfach unendlich vieler Curven, welche in drei Gerade zerfallen.

6. Die Strahlensysteme Σ_2 und Σ_3 geben in analoger Weise Veranlassung zur Construction von Flächen F_2^4 und F_3^4. Eine F_1^4 und eine F_2^4 sind projectiv auf einander bezogen, wenn diejenigen Linien einander entsprechen, welche auf derselben $G_{(12)}$ liegen. Solche Linien müssen sich schneiden und bestimmen eine *rationale Raumcurve*, welche wir zunächst construiren wollen.

F_2^4 schneidet die Doppelcurve C_1^3 von F_1^4 in 12 Punkten, vier derselben sind $A_1, \ldots D_1$; die übrigen acht müssen der gesuchten Raumcurve angehören, welche daher auf *keiner Fläche zweiten Grades* liegen kann. Zwei entsprechende Gerade a_1 und a_2 der Flächen bestimmen eine Ebene, welche C_1^3 ausser in Punkten von a_1 noch in P_1 schneiden möge; ebenso bestimme die Ebene auf C_2^3 den Punkt P_2. Von P_1 resp. P_2 projiciren wir die Regelschaaren F_1^4 resp. F_2^4 und erhalten so zwei projective Ebenenbüschel zweiter Ordnung, welche eine Ebene entsprechend gemein haben. Der Schnitt entsprechender Ebenen der Büschel P_1 und P_2 ist deshalb eine

Regelfläche dritter Ordnung, welche die rationale Raumcurve enthält. Man kann so unendlich viele Regelflächen dritter Ordnung ableiten, welche die gesuchte Curve gemein haben. Die Doppelgeraden derselben fallen aber auf einander, denn anderenfalls würden zwei solcher Doppelgeraden die entsprechenden Strahlen der bezüglichen Regelflächen dritter Ordnung durch projective Ebenenbüschel projiciren, und die Raumcurve müsste einer Fläche zweiten Grades angehören, was nicht möglich ist.

Die ***gesuchte Curve*** $R^5_{(12)}$ ist der Schnitt zweier Regelflächen dritter Ordnung mit ***gemeinsamer*** Doppelgeraden und deshalb von der ***fünften Ordnung.*** Die Doppelgerade ist die einzige Gerade, welche vier Punkte der Curve enthält, die einfachen Leitgeraden enthalten nur drei Punkte von $R^5_{(12)}$. Man sieht jetzt leicht ein, dass die Verbindungsebenen entsprechender Strahlen von F_1^4 und F_2^4 einen Ebenenbüschel dritter Ordnung ergeben.

Alle $R^5_{(12)}$ gehen durch die Punkte $A_3, \ldots D_3$; haben F_1^4 und F_2^4 eine gemeinsame sich selbst entsprechende Gerade, so muss diese durch einen der Punkte $A_3, \ldots D_3$ gehen, und $R^5_{(12)}$ reducirt sich auf die vierte Ordnung etc.

7. Drei beliebige Strahlen von Σ_1 liegen stets auf einer F_1^4 und bestimmen letztere. Liegen die drei Strahlen in einer Ebene, so besitzt F_1^4 eine ***einfache Leitgerade*** t, welche von allen Geraden der F_1^4 geschnitten wird und deren Punktreihe projectiv ist zu der Regelschaar F_1^4, wenn jedem Punkte von t der ihn enthaltende Strahl von F_1^4 zugewiesen wird. Die Strahlen von Σ_1, welche von t getroffen werden und nicht auf F_1^4 liegen, bilden eine zweite Fläche F_1^4. Die ***sämmtlichen Geraden*** t ***ergeben ein Strahlensystem*** T ***zehnter Klasse,*** da sechs in einer Ebene liegende Strahlen von Σ_1 sich auf zehn Arten zu Doppelgruppen von je dreien vereinigen lassen. Wir werden nun zeigen, dass die Geraden t für Σ_2 und Σ_3 dieselbe Bedeutung haben wie für Σ_1, d. h. dass alle t treffenden Strahlen von Σ_2 resp. Σ_3 zwei Regelflächen vierten Grades bilden. Ferner ergiebt sich, dass T dieselbe Brennfläche Φ wie die ersten Systeme hat.

8. Eine mit der Leitlinie t versehene F_1^4 und eine beliebige F_2^4 bestimmen nach No. 6 eine $R^5_{(12)}$. Schneidet nun t die F_2^4 in einem Punkte Q, welcher nicht auf $R^5_{(12)}$ liegt, so lege man durch t und den durch Q gehenden Strahl l_2 von F_2^4 eine Ebene ν. Diese enthält dann die Gerade l_1 von F_1^4, welche mit l_2 auf einer $G_{(12)}$ liegt, und bestimmt auf den Doppelcurven von F_1^4 resp. F_2^4 die Punkte P_1 resp. P_2. Die Ebenenbüschel, durch welche aus P_1 resp. P_2 die Regelschaaren F_1^4 resp. F_2^4 projicirt werden, be-

stimmen auf t zwei projective Punktreihen, deren Doppelpunkte $R^5_{(12)}$ angehören. *Also ist t Sehne einer jeden auf F^4_1 liegenden $R^5_{(12)}$.* Schneidet aber t die F^4_2 nur in drei Punkten, welche auf $R^5_{(12)}$ liegen, so ist t auch einfache Leitgerade von F^4_2, und $R^5_{(12)}$ zerfällt in diese Gerade und vier durch die Punkte $A_3, \ldots D_3$ gehende Strahlen.

Legt man nun durch drei beliebige Punkte der einfachen Leitlinie t von F^4_1 drei Linien von Σ_2, welche mit den in diesen Punkten eintreffenden Strahlen von F^4_1 entweder *in* einer $G_{(12)}$ oder *nicht in* einer $G_{(12)}$ liegen, so ist im ersten Falle t einfache Leitgerade der durch die Strahlen von Σ_2 bestimmten F^4_2, und im zweiten Falle enthält t ausser den drei gewählten Punkten noch zwei andere der bestimmten F^4_2 auf $R^5_{(12)}$ und ist deshalb auch vollständig auf F^4_2 enthalten.

Alle Strahlen eines der Systeme Σ_1, Σ_2, Σ_3, welche eine Gerade des Systemes T treffen, bilden zwei Flächen vierter Ordnung. Alle Strahlen von T aber, welche eine Gerade eines der Systeme Σ_1, Σ_2, Σ_3 schneiden, bilden eine nicht zerfallende Regelfläche.

9. Je zwei auf einer $G_{(12)}$ liegende Strahlen zweier Flächen F^4_1 und F^4_2 mit derselben Leitlinie t, welche nicht Bestandtheil der zugehörigen $R^5_{(12)}$ ist, liegen mit t in einer Ebene. Nun trifft t die Curve $R^5_{(12)}$ in zwei Punkten, durch welche jedesmal nur *ein* Strahl von Σ_1 und *ein* Strahl von Σ_2 gehen kann, und welche deshalb *auf der Brennfläche Φ* liegen. Die Tangentialebene von Φ in einem dieser Punkte verbindet die beiden durch ihn gehenden Strahlen von Σ_1 und Σ_2 und geht durch t. Jede *Gerade t berührt deshalb die Brennfläche Φ in zwei Punkten.* Entsprechende Strahlen der hier betrachteten F^4_1 und F^4_2 schneiden auf t zwei projective Punktreihen aus, und je zwei zusammengehörende Punkte derselben liegen auf einer $G_{(12)}$. Demnach folgt: *Die Flächensysteme $G_{(12)}$, $G_{(23)}$ und $G_{(31)}$ schneiden auf jedem Strahle t von T projective Punktreihen aus, welche gemeinschaftliche Doppelelemente in dem Berührungspunkte von t mit Φ haben.*

Da die Gerade t je vier Tangenten der Doppelcurven derjenigen F^4_1 schneidet, welche t zur Leitlinie haben, so lassen sich durch t noch acht Ebenen legen, in welchen jedesmal zwei Strahlen von Σ_1 sich vereinigen. Da t selbst Doppeltangente von Φ ist, so schliessen wir, dass *Φ zwölfter Klasse ist.*

10. Die Bestimmung der Ordnung des Strahlensystemes T auf directem Wege macht Schwierigkeiten. Man kann aber zeigen, dass durch

einen Punkt von Φ höchstens drei Strahlen von T gehen, und hieraus schliesst man, dass T sechster Ordnung ist.

Zwei F_1^4 mit derselben Leitlinie t schneiden sich ausser in t noch in zwei Geraden von Σ_1, welche durch die Berührungspunkte von t mit Φ gehen und in den zugehörigen Tangentialebenen liegen. Sei nun L ein beliebiger Punkt von Φ und λ die Tangentialebene von Φ in L. Durch L geht *ein* Strahl l_1 von Σ_1, welcher auch in λ liegt. Wir wollen zwei F_1^4 bestimmen, welche dieselbe Leitlinie haben und sich in l_1 schneiden. t geht durch L und liegt in λ. Die vier Strahlen von Σ_1, welche ausser l_1 in λ sich befinden, können auf drei Arten in zwei Gruppen von je zwei Strahlen getheilt werden. Jedesmal ergeben sich zwei F_1^4 mit derselben Leitlinie t. Also durch jeden Punkt der Brennfläche gehen drei Strahlen von T, welche in der zugehörigen Tangentialebene liegen. Da aber Φ vierter Ordnung ist, so giebt es keine durch L gehende nicht in λ liegende Doppeltangente von Φ. ***Es ist daher T sechster Ordnung.***

Singuläre Punkte von T sind die zwölf $A_1, \ldots D_1, A_2, \ldots D_2, A_3, \ldots D_3$, von welchen jeder den schon bekannten Kegel vierter Ordnung liefert; die Kegel zweiter Ordnung dieser Punkte gehören aber nicht zu T.

§ 3.

Das Strahlensystem zweiter Ordnung sechster Klasse zweiter Art.

1. Aus den acht associirten Punkten eines Flächennetzes wählen wir zwei A_1 und A_2 beliebig aus und bezeichnen die übrigen mit B_1, $B_2, \ldots B_6$. Durch $\overline{A_1 A_2}$ legen wir eine ***beliebige Ebene*** μ und suchen alle Flächen des Netzes auf, welche von μ berührt werden. Dabei schalten wir diejenigen aus, welche die Gerade $\overline{A_1 A_2}$ enthalten und einen Flächenbüschel bilden. Die Ebene μ möge die Kerncurve C_6 des Netzes ausser in den beiden auf $\overline{A_1 A_2}$ befindlichen Punkten in C_1, C_2, C_3, C_4 treffen.

Durch die beiden Schaaren von Erzeugenden der Flächen, welche wir mit $G_{(12)}$ bezeichnen, sind ***zwei Strahlensysteme*** Σ_1 und Σ_2 zweiter Ordnung bestimmt. Σ_1 enthalte den Strahlenbüschel (A_2, μ), Σ_2 den Büschel (A_1, μ); dann ergiebt sich nach § 1 Folgendes:

Σ_1 hat in dem Bündel A_1 einen Kegel fünfter Ordnung mit den sechs Doppelkanten $A_1(B_1, \ldots B_6)$ und den einfachen Strahlen $A_1(A_2, C_1, C_2, C_3, C_4)$; in dem Bündel B_α einen Kegel dritter Ordnung mit der Doppelgeraden $\overline{B_\alpha A_1}$ und den einfachen Linien $B_\alpha(B_1, \ldots B_6, C_1, \ldots C_4)$.

Σ_2 besitzt in dem Bündel A_2 einen Kegel fünfter Ordnung mit den Doppelkanten $A_2(B_1, \ldots B_6)$ und den einfachen Strahlen $A_2(A_1, C_1, C_2, C_3, C_4)$, in dem Bündel B_α einen Kegel dritter Ordnung mit der Doppelkante $\overline{B_\alpha A_2}$ und den einfachen Strahlen $B_\alpha(B_1, \ldots B_6, C_1, \ldots C_4)$.

Die beiden Strahlensysteme Σ_1 und Σ_2 haben dann noch vier Kegelflächen zweiter Ordnung gemein, deren Mittelpunkte $C_1, \ldots C_4$ sind, und welche die Strahlen $C_\alpha(A_1, A_2, B_1, \ldots B_6)$ enthalten. Diese Kegel gehören zu dem Flächensysteme $G_{(12)}$.

2. Σ_1 und Σ_2 sind beide von *der sechsten Klasse*. Wir wissen nämlich, dass die Tangentialebenen aller $G_{(12)}$ in dem Punkte A_1 einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung bilden (§ 1, 1.), und deshalb sind die Polarebenen eines beliebigen Punktes P des Raumes bezüglich aller $G_{(12)}$ Tangentialebenen eines Kegels zweiter Ordnung, dessen Spitze P' dem Punkte P hinsichtlich des Netzes conjugirt ist. In einer beliebigen Ebene ν hüllen nun nach bekannten Sätzen die Schnittcurven der $G_{(12)}$ mit ν eine Curve vierter Ordnung ein, welche auf der Brennfläche liegt. Dieses Curvensystem hat sechs Linienpaare und ergiebt zwölf Gerade, welche sich gleichmässig auf Σ_1 und Σ_2 vertheilen, jedoch der Art, dass alle zu Σ_1 resp. Σ_2 gehörenden Strahlen *keinen Kegelschnitt* umhüllen.

3. Wir suchen die Berührungspunkte der Ebene μ mit allen $G_{(12)}$ auf. Die durch die Punkte $B_1, \ldots B_6$ gehende kubische Raumcurve trifft μ ausser in Punkten der Geraden $\overline{A_1 A_2}$ in einem Punkte S. Alle Curven des Netzes schneiden μ ausser in A_1 und A_2 in zwei Punkten, deren Verbindungslinie durch S geht. Irgend eine Fläche des Netzes treffe μ in dem Kegelschnitte λ, auf dem durch S als Centrum eine Involution bestimmt wird. Projiciren wir die Punktepaare derselben von A_1 und A_2, so erhalten wir zwei projective Strahlenbüschel, deren Schnitt ein *Kegelschnitt ϱ ist.* ϱ ist der *gesuchte Ort der Berührungspunkte* von μ mit den $G_{(12)}$ und enthält die Punkte $(A_1, A_2, C_1, \ldots C_4)$.

4. In jedem der Strahlensysteme Σ_1 und Σ_2 ist eine doppelt unendliche Zahl von Regelflächen dritter Ordnung enthalten. Durch A_1 legen wir eine *beliebige Gerade l* und fragen nach allen Strahlen von Σ_1, *welche l schneiden.* Jede Ebene des Büschels l projicirt einen Strahl des zu Σ_2 gehörenden Strahlenbüschels $(A_1 \mu)$ und enthält *einen* Strahl von Σ_1, der mit dem ersten in einer $G_{(12)}$ liegt. Auf derselben $G_{(12)}$ befindet sich von

dem zu Σ_2 gehörenden Kegel B_1 ein bestimmter Strahl, welchen wir von der Geraden $\overline{B_1 A_2}$ aus projiciren. Durch diese Zuordnung sind die Ebenenbüschel l und $\overline{B_1 A_2}$ projectiv und erzeugen eine Regelschaar F_2' zweiter Ordnung, auf welcher der Kegelschnitt ϱ liegt. Diese Schaar F_2' ist nun auch projectiv zu dem Büschel l, und jede Gerade der Schaar wird von demjenigen zu Σ_1 gehörenden Strahle geschnitten, welcher in der ihr entsprechenden Ebene des Büschels l liegt. Durch Vertauschung von B_1 mit B_2 ergiebt sich eine zweite Regelschaar F_2'', welche ϱ enthält und projectiv zu F_2' und dem Büschel l ist. Entsprechende Strahlen von F_2' und F_2'' treffen einander auf ϱ, und es bilden daher die Verbindungsebenen derselben einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung, welcher die gesuchten Strahlen von Σ_1 enthält und projectiv zu dem Büschel l ist. Entsprechende Ebenen der letzten beiden Büschel schneiden sich in *den Geraden einer Regelfläche F_1^3 dritter Ordnung, deren Doppelgerade l ist und welche zu Σ_1 gehört.* Je zwei Strahlen von Σ_1 werden von einer durch A_1 gehenden Geraden geschnitten und liegen deshalb auf einer F_1^3. *Die Zahl dieser Flächen und demnach auch die Zahl ihrer einfachen Leitlinien t ist doppelt unendlich gross. Die Linien t bilden ein Strahlensystem T fünfzehnter Klasse,* da die sechs in einer Ebene liegenden Strahlen von Σ_1 sich auf fünfzehn Arten zu zweien combiniren lassen.

Die Ordnung von T bestimmen wir später.

5. Die Geraden des Bündels A_2 sind Doppelgeraden von *Flächen* F_2^3, welche zu Σ_2 gehören und *einfache Leitlinien* besitzen, die *wieder das Strahlensystem* T liefern.

Zwei Regelflächen F_1^3 und F_2^3 sind projectiv, wenn diejenigen Strahlen einander entsprechen, welche derselben $G_{(12)}$ angehören. Die Doppelgeraden l' und l'' dieser Flächen projiciren entsprechende Strahlen durch projective Ebenenbüschel, welche eine Fläche zweiter Ordnung erzeugen. Auf ihr liegt der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen von F_1^3 und F_2^3. Dieser ist deshalb eine rationale Raumcurve $R_{(12)}^4$, welche von den einfachen Leitgeraden der F_1^3 und F_2^3 je in zwei Punkten geschnitten wird.

Auf der einfachen Leitlinie t einer beliebigen F_1^3 greifen wir irgend zwei Punkte heraus und legen durch sie solche Strahlen von Σ_2, welche mit den durch diese Punkte gehenden zu F_1^3 gehörenden Strahlen nicht auf einer $G_{(12)}$ liegen. Diese Strahlen von Σ_2 bestimmen eine F_2^3, welche mit

F_1^3 eine $R_{(12)}^1$ liefert. *Die Gerade t* hat dann mit F_2^3 *vier* Punkte gemein und ist deshalb auch *einfache Leitgerade* dieser Fläche.

6. Eine F_1^3 und eine F_2^3 mit der gemeinschaftlichen Leitlinie t sind projectiv auf einander bezogen, wenn diejenigen Strahlen einander entsprechen, welche auf derselben $G_{(12)}$ liegen. Die Verbindungsebenen entsprechender Strahlen bilden den Ebenenbüschel t; hieraus ergiebt sich, dass die Schnittpunkte von t mit $R_{(12)}^1$ auf der Brennfläche Φ liegen und die Tangentialebenen von Φ in diesen Punkten durch t gehen. *Die Brennfläche von T ist deshalb ebenfalls die Fläche Φ.*

Da entsprechende Strahlen von F_1^3 und F_2^3 auf der gemeinsamen Leitlinie t zwei projective Punktreihen ausschneiden, so folgt, *dass das Flächensystem $G_{(12)}$ jeden Strahl t in projectiven Punktreihen trifft, deren Doppelemente die Berührungspunkte von t mit der Brennfläche sind.*

7. Wir bestimmen die *Ordnung des Strahlensystems T.* Jede F_1^3 enthält zwei Strahlen des Bündels A_1, welche auf dem in No. 1 gefundenen Kegel fünfter Ordnung liegen. Die Ebenen, welche diese Strahlen mit der Doppelgeraden l von F_1^3 verbinden, gehören dem Ebenenbüschel zweiter Ordnung an, der aus den Tangentialebenen aller $G_{(12)}$ in dem Punkte A_1 besteht. Jeder Ebene des letzteren ist projectiv ein in ihr liegender Strahl des Kegels fünfter Ordnung A_1 zugeordnet, welcher allen F_1^3 angehört, deren Doppelgeraden l in der ersten Ebene einen Büschel bilden. Beschreibt nun l einen beliebigen Strahlenbüschel $(A_1\nu)$ um A_1, so ergiebt sich auf dem Tangentialebenenkegel eine Involution, welche auf den Kegel A_1 fünfter Ordnung übertragen wird. Die Verbindungsebenen der Strahlenpaare des letzten Kegels umhüllen bekanntlich einen *Kegel K vierter Klasse,* den sogenannten *Involutionskegel.* In der Ebene ν liegt *ein* Strahl a_1 von Σ_1, welcher nicht durch A_1 geht. Er befindet sich auf allen F_1^3, deren Doppelgeraden zu $(A_1\nu)$ gehören und deren einfache Leitlinien durch die Ebenen des Kegels K projicirt werden. Durch jeden Punkt P von a_1 gehen deshalb vier solcher Leitlinien. Da P noch auf einem zweiten Strahle b_1 von Σ_1 liegt, so finden sich noch weitere vier Strahlen von T, welche durch P gehen und Leitlinien solcher F_1^3 sind, die b_1 enthalten. *Das Strahlensystem T ist achter Ordnung.* Die Gleichung achten Grades, von welcher die Bestimmung der acht durch einen Punkt gehenden Strahlen von T abhängt, ist *algebraisch* auflösbar.

8. *Die sämmtlichen Strahlen von T, welche eine Gerade a_1 von Σ_1*

schneiden, bilden zwei verschiedene Regelflächen. Die eine besteht aus allen Linien t, welche Leitgeraden solcher F_1^3 sind, die a_1 enthalten. Durch jeden Punkt von a_1 gehen vier solcher Geraden t, und in jeder Ebene durch a_1 liegen fünf solcher t. ***Diese Regelfläche ist daher vom neunten und die zweite vom vierzehnten Grade.*** Man sieht jetzt den Grund ein, warum bei dem Strahlensysteme sechster Klasse erster Art ein ähnliches Zerfallen der von Geraden des zugeordneten Systemes gebildeten Regelfläche, welche einen Strahl des ersten Systems schneiden, nicht Statt finden kann.

§. 4.

Das Strahlensystem zweiter Ordnung fünfter Klasse.

1. Die beiden oben betrachteten Strahlensysteme sechster Klasse können nur dann übereinstimmen, wenn die acht associirten Punkte, von welchen wir ausgingen, eine specielle Lage haben. Es erniedrigt sich aber dann die Klasse der Strahlensysteme, und wir erhalten die allgemeinen Strahlensysteme zweiter Ordnung fünfter Klasse.

Von den ***acht associirten*** Punkten mögen ***vier einer Ebene*** μ_1, die ***vier anderen der Ebene*** μ_2 angehören. Die Kerncurve des Netzes besteht dann aus der Geraden $\overline{\mu_1\mu_2}$ und einer nicht rationalen Raumcurve fünfter Ordnung, welche auf einer Regelfläche zweiten Grades liegt. Die sechzehn Verbindungslinien je zweier Punkte, welche nicht beide in μ_1 oder μ_2 liegen, sind Sehnen der eigentlichen Kerncurve. Anschliessend an die Bezeichnung der Singularitäten und die Construction des Strahlensystems sechster Klasse erster Art theilen wir die acht Punkte in zwei Gruppen von je vieren jedoch so, dass ein Punkt A_1 von μ_2 mit drei Punkten von μ_1 und folglich ein Punkt A_2 von μ_1 mit drei Punkten von μ_2 je eine Gruppe bildet. A_1 ist Mittelpunkt eines Kegels zweiter Ordnung, dessen Strahlen einem Systeme Σ_2 angehören, und welcher hier zerfallen muss in die Ebene $A_1(B_2, C_2, D_2)$ und eine beliebige durch $\overline{A_1A_2}$ gelegte Ebene μ_3. Die Strahlen des Kegels bilden demnach den in μ_3 liegenden Strahlenbüschel.

Man sieht sofort ein, dass wir es hier auch mit einem ***Specialfall des Strahlensystems sechster Klasse zweiter Art*** zu thun haben.

Wir suchen zunächst alle singulären Punkte der ***drei*** hier auftretenden ***gleichartigen Strahlensysteme zweiter Ordnung*** auf. Auf der Geraden $\overline{\mu_1\mu_2}$ wird durch alle Flächen des Netzes eine Involution ausgeschnitten. Der

Schnittpunkt von μ_3 mit $\overline{\mu_1\mu_2}$ sei K, welchem A_3 in der Involution zugeordnet sei. Es treffe ferner μ_3 die eigentliche Kerncurve abgesehen von den beiden auf $\overline{A_1A_2}$ liegenden Punkten in B_3, C_3, D_3. Wir haben so drei Gruppen von je vier singulären Punkten $A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha$, einen ***dreizehnten singulären Punkt*** K und ausserdem ***drei singuläre Ebenen*** μ_1, μ_2, μ_3.

Für die drei Strahlensysteme $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ haben jene folgende Bedeutung. Es mögen durch α, β, γ die Ziffern 1, 2, 3 in irgend welcher Reihenfolge bezeichnet werden.

K ist Mittelpunkt eines Strahlenbüschels von Σ_α in der Ebene μ_α. A_α ist Mittelpunkt eines Büschels von Σ_β resp. Σ_γ in der Ebene μ_γ resp. μ_β, und Mittelpunkt eines Kegels vierter Ordnung von Σ_α mit den Doppelkanten $A_\alpha(B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha)$ und den einfachen Strahlen $A_\alpha(A_\beta, A_\gamma; B_\beta, C_\beta, D_\beta; B_\gamma, C_\gamma, D_\gamma)$.

B_α ist Mittelpunkt eines Kegels dritter Ordnung von Σ_α mit der Doppelkante $\overline{B_\alpha A_\alpha}$ und den einfachen Strahlen $B_\alpha(K, B_\beta, C_\beta, D_\beta, B_\gamma, C_\gamma, D_\gamma)$ und Mittelpunkt eines Kegels zweiter Ordnung von Σ_β und Σ_γ mit den Strahlen $B_\alpha(A_\beta, B_\beta, C_\beta, D_\beta; A_\gamma, B_\gamma, C_\gamma, D_\gamma)$.

Analoges gilt für die Punkte C_α und D_α.

In *jeder* Ebene μ_α liegen ***sechs singuläre*** Punkte, welche einem ***Kegelschnitt*** angehören.

Das Flächensystem $G_{(\alpha\beta)}$ besitzt ein Ebenenpaar μ_α, μ_β mit dem Punktpaar K, A_γ. Das System Σ_α enthält alle Geraden von μ_α und seine Klasse erniedrigt sich deshalb auf fünf; es liegt ferner in einem *Reye*schen Complexe mit dem Tetraeder $(A_\alpha, B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha)$ und enthält Regelflächen vierter Ordnung, deren Doppelcurven Ordnungscurven dieses Complexes sind.

3. Das Strahlensystem Σ_α enthält eine doppelt unendliche Zahl von Regelflächen dritter Ordnung, deren einfache Leitlinien das ***zugeordnete System T sechster Ordnung zehnter Klasse*** bilden.

Alle Strahlen von Σ_α, welche eine Gerade t von T treffen, bilden eine Regelfläche dritter und eine vierter Ordnung.

Alle Strahlen von T, welche eine Gerade a_α von Σ_α schneiden, bilden eine Regelfläche siebenter und eine neunter Ordnung. Alle Strahlen von Σ_α, welche eine Gerade a_β von Σ_β treffen, liefern eine Regelfläche zweiter und eine fünfter Ordnung.

§ 5.

Das Strahlensystem zweiter Ordnung vierter Klasse.

1. Enthält das ***Flächennetz der associirten Punkte zwei Ebenenpaare,*** so wird man zu dem ***Strahlensystem vierter Klasse*** geführt. Ohne hier ausführlich auf die Eigenschaften desselben und des zugeordneten Systems einzugehen, will ich nur die Lage der singulären Punkte und Ebenen ableiten. Die Bezeichnungen derselben richten sich nach ihren Beziehungen zu den vier gleichartigen Strahlensystemen, welche hier auftreten.

Die Kerncurve des Netzes besteht aus zwei Geraden und einer Raumcurve C_4 vierter Ordnung erster Species. Acht Verbindungslinien von zwei Punkten sind Sehnen von C_4 und bilden zwei windschiefe Vierseite, welche mit C_4 je auf einer Fläche zweiten Grades liegen.

Die Ebenenpaare bezeichnen wir mit (13), (23) und (14), (24). Durch zwei Punkte, deren Verbindung eine Sehne von C_4 ist, legen wir eine beliebige Ebene (12), welche Tangentialebene aller Flächen $G_{(12)}$ sein möge. Durch die Seite, welche jener Sehne von C_4 in einem der oben genannten Vierseite gegenübersteht, geht dann ebenfalls eine allen $G_{(12)}$ gemeinsame Tangentialebene (34), welche (12) in einer Sehne von C_4 schneidet. Die beiden Punkte dieser Sehne, welche auf C_4 liegen, liefern mit den vier Punkten, in welchen (12) und (34) die Geraden $\overline{(13)(23)}$ und $\overline{(14)(24)}$ schneiden, und den acht gegebenen die ***vierzehn singulären Punkte*** der Strahlensysteme. Die ***sechs singulären Ebenen*** sind aber (12)(34), (13)(24), (14)(23). Jede dieser Ebenen enthält sechs singuläre Punkte, welche auf einem Kegelschnitte liegen.

2. Zwei Ebenen $(\alpha\beta)$ und $(\alpha\delta)$ enthalten zusammen zehn der singulären Punkte, von welchen acht nicht gleichzeitig in beiden Ebenen liegen. Man erhält so ***sechs Gruppen von acht Grundpunkten eines Flächennetzes,*** welche dieselbe Anordnung zeigen wie die gegebenen, und welche stets wieder zu ***denselben vierzehn Punkten*** führen. Es ergeben sich vier gleichartige Strahlensysteme zweiter Ordnung vierter Klasse $\Sigma_\alpha (\alpha = 1, \ldots 4)$. Je zwei derselben lassen sich durch das Flächensystem $G_{(\alpha\beta)}$ zusammenfassen, welches einem der sechs angeführten Flächennetze angehört. Ein System Σ_α lässt sich auf drei Arten durch Regelschaaren zweiter Ordnung beschreiben, und es ergeben sich somit auch ***drei Reyesche Complexe, in welchen Σ_α liegt.*** Jedes Flächensystem $G_{(\alpha\beta)}$ enthält zwei Ebenenpaare.

3. ***Das zugeordnete System T ist vierter Ordnung sechster Klasse*** und lässt sich auf *eine* Art durch Regelflächen zweiten Grades beschreiben, deren *beide* Schaaren zu T gehören. Diese Flächen liegen in einem Netze mit den *drei Ebenenpaaren* (12)(34), (13)(24), (14)(23).

Alle Strahlen von Σ_α, welche eine Gerade t von T treffen, liefern zwei Regelflächen dritter Ordnung.

Alle Strahlen von T, welche eine Gerade a_α von Σ_α schneiden, liegen in zwei Regelflächen fünfter Ordnung.

Alle Strahlen von Σ_α, welche einen Strahl a_β von Σ_β treffen, bilden eine Fläche zweiter und eine vierter Ordnung, deren Doppelcurve eine Ordnungscurve eines *Reye*schen Complexes ist, in dem Σ_α liegt.

§ 6.

Das Strahlensystem zweiter Ordnung dritter Klasse.

Enthält das Netz der ***acht associirten Punkte drei Ebenenpaare,*** so besteht die Kerncurve aus drei Geraden und einer Raumcurve C_3 dritter Ordnung. Vier Verbindungslinien von zwei Punkten sind Sehnen von C_3. Durch eine derselben lege man eine Ebene, welche von allen $G_{(12)}$ berührt werden soll. Die Ebene trifft C_3 in einem Punkte, welchen wir von den drei anderen Sehnen projiciren. So ergeben sich vier Ebenen, welche durch einen Punkt von C_3 gehen und von allen $G_{(12)}$ berührt werden. Diese vier Ebenen treffen die Schnittgeraden der Ebenenpaare in sechs Punkten, welche mit dem auf C_3 bestimmten Punkte und den acht gegebenen ***die fünfzehn singulären Punkte*** liefern. Die ***vier Tangentialebenen*** der $G_{(12)}$ und die ***drei Ebenenpaare ergeben die zehn singulären Ebenen.***

2. ***Das zugeordnete Strahlensystem T*** der vorigen Nummer zerfällt jetzt in zwei Systeme zweiter Ordnung dritter Klasse, so dass ***die Brennfläche Φ von sechs gleichartigen Systemen Σ_α umhüllt wird.*** Je zwei derselben liefern ein System $G_{(\alpha\beta)}$. Eines dieser Strahlensysteme Σ_α kann auf fünffache Weise durch Regelschaaren $G_{(\alpha\beta)}$ beschrieben werden. Je zwei solcher Systeme $G_{(\alpha\beta)}$ haben vier gemeinsame Punkte, die Ecken eines Tetraeders, welches die Singularitätenfläche eines durch Σ_α gehenden *Reye*schen Complexes ist. ***Σ_α liegt deshalb in zehn solcher Complexe.***

Alle Strahlen von Σ_α, welche eine Gerade a_β von Σ_β treffen, liefern eine Regelfläche zweiter und eine dritter Ordnung.

§ 7.

Das Strahlensystem zweiter Ordnung zweiter Klasse.

Schliesslich nehmen wir an, dass in dem ***Flächennetze zweiter Ordnung vier Ebenenpaare*** sich befinden. Dann besteht die Kerncurve aus den vier Schnittgeraden der Ebenenpaare und den beiden Geraden c_1 und c_2, welche diese vier ersten schneiden. c_1 und c_2 sind einander conjugirt bezüglich aller Flächen des Netzes. Die acht associirten Punkte sind der Art gepaart, dass die Verbindungslinie a eines jeden Paares c_1 und c_2 trifft. Die beiden durch eine Linie a an irgend eine Fläche des Netzes gelegten Tangentialebenen bilden ein Paar des involutorischen Ebenenbüschels, dessen Ordnungselemente (ac_1) und (ac_2) sind.

Legt man durch a eine beliebige Ebene μ, welche von allen Flächen $G_{(12)}$ berührt werden soll, so ist damit im Büschel a eine zweite Tangentialebene μ' aller $G_{(12)}$ bestimmt. μ und μ' schneiden die vier Schnittgeraden der Ebenenpaare in weiteren acht singulären Punkten. Die Ebenenpaare, welche von den drei übrigen Linien a nach diesen acht Punkten gelegt werden, ergeben sechs weitere Tangentialebenen aller $G_{(12)}$. Man erhält so im Ganzen ***sechzehn singuläre Punkte und ebensoviele singuläre Ebenen,*** welche die bekannte sich selbst reciproke Anordnung der Knotenpunkte und singulären Tangentialebenen einer ***Kummerschen Fläche*** zeigen.

Es giebt sechs gleichberechtigte Strahlensysteme zweiter Ordnung und zweiter Klasse mit derselben Brennfläche Φ. Je zwei derselben lassen sich auf zweifache Weise zu Regelflächen $G_{(\alpha\beta)}$ vereinigen, und es ergeben sich deshalb, wie bekannt, ***vierzig Reyesche Complexe,*** welche durch ein Strahlensystem gehen. —

§ 8.

Die Kerncurve eines Flächennetzes zweiter Ordnung.

Die Anordnungen der singulären Punkte der beiden Strahlensysteme zweiter Ordnung sechster Klasse geben Veranlassung zu zwei verschiedenen ***projectiven Erzeugungsarten*** der ***Kerncurve*** C_6 eines Flächennetzes.

Lässt man nämlich die acht associirten Punkte eines Flächensystemes $G_{(12)}$ ungeändert, so bewegen sich die vier übrigen singulären Punkte der Strahlensysteme auf der Kerncurve C_6 des durch $G_{(12)}$ bestimmten Netzes.

Dabei verändern sich die Kegelflächen der ersten acht singulären

Punkte so, dass jede derselben einen Büschel beschreibt. Alle diese Kegelbüschel sind unter einander projectiv, und wir erhalten die Punkte der Kerncurve als *Schnitte* einer Anzahl *projectiver Kegelbüschel* von *der ersten bis fünften Ordnung.* So ergiebt sich unter Berücksichtigung der Singularitäten des *Strahlensystemes sechster Klasse erster Art*:

Die Kerncurve eines Flächennetzes kann erzeugt werden durch den Schnitt von drei beliebigen aus acht projectiven Kegelbüscheln zweiter und vierter Ordnung und zwar auf 35 verschiedene Weisen *).

Aus der Anordnung der Singularitäten des *Strahlensystems sechster Klasse zweiter Art* findet man:

Die Kerncurve eines Flächennetzes kann erzeugt werden durch die Schnitte projectiver Kegelbüschel erster, dritter und fünfter Ordnung und zwar auf 28 verschiedene Weisen. —

*) Vgl. *Hesse* (dieses Journal Bd. 49. S. 279.)

Aachen im Juli 1883.

Nachtrag zur Abhandlung „Die *Steiner*schen Polygone“ Seite 105 dieses Bandes.

(Von Herrn *P. H. Schoute* in Groningen.)

Erst nachdem der oben bezeichnete Aufsatz schon abgedruckt war, erhielt ich Kenntniss von einer Arbeit, welche Herr *K. Küpper* über den nämlichen Gegenstand bereits 1873 in den Prager Abhandlungen publicirt hat, und welche einen rein geometrischen Beweis der von *Steiner* gestellten Probleme enthält.

Wenn ich im Folgenden einige Punkte der *Küpper*schen Abhandlung kurz bespreche, so verfolge ich hiermit einen doppelten Zweck, nämlich erstens die Beweisführungen beider Arbeiten einander gegenüber zu stellen, zweitens die Resultate des Herrn *Küpper* um einige zu vermehren.

1. Die Beweise von Herrn *Küpper* beruhen in letzter Instanz fast alle auf folgendem Grundsatze:

„Wenn eine Curve C^3 acht von den neun Schnittpunkten zweier Geradentripel enthält, enthält sie auch den neunten.“

In anderer Fassung bildet dieser Satz ebenfalls die Grundlage meiner Beweise.

Wo die Beweisführungen dem Kerne nach sich gleichen, können nur Unterschiede in der Form obwalten; diese sind dadurch bedingt, dass Herr *Küpper* aus der gemeinsamen Quelle sogleich einen sehr allgemeinen Hauptsatz ableitet, um diesen weiterhin zu specialisiren; dagegen habe ich mich bestrebt, immer vom Einfacheren zum Zusammengesetzteren fortzuschreiten.

Der *Küpper*sche Hauptsatz ist folgender:

I. „Wenn man auf einer Curve C^3 eine gewisse Menge von festen Fundamentalpunkten $a, b, c, d, \ldots$ beliebig annimmt und nach einander

die Geraden $0a1$, $1b2$, $2c3$, $3d4$, ... zieht, wo 0, 1, 2, 3, 4 nun mit dem Nullpunkte veränderliche Punkte von C^3 bedeuten, so schneidet die Gerade $(2m, 2n+1)$, welche irgend einen bestimmten paaren Punkt $2m$ mit irgend einem bestimmten unpaaren Punkte $2n+1$ verbindet, die Curve C^3 zum dritten Male in einem Punkte P, der bei Bewegung des Nullpunktes seine Lage nicht ändert."

Der Beweis ist ungefähr folgender:

„Angenommen, die Geraden $(2m-1, 2n)$ schneiden sich in einem festen Punkte P von C^3, so folgt aus dem Grundsatze, dass die Geraden $(2m, 2n+1)$ sich ebenfalls in einem festen Punkte Q von C^3 schneiden. Ist der Satz für die Geraden $(0, 2p+1)$ bewiesen, so ist er also allgemein bewiesen. Wiederum angenommen, die Geraden $(0, 2p-1)$ schneiden sich in einem festen Punkte P von C^3, so thun dies also die Geraden $(1, 2p)$ in einem anderen festen Punkte Q, und dem Grundsatze zufolge auch die Geraden $(0, 2p+1)$ in einem dritten festen Punkte R. Ist der Satz für die Geraden $(0, 1)$ bewiesen, so ist er also allgemein bewiesen. Aber die Geraden $(0, 1)$ gehen alle durch a, u. s. w."

Aus dem allgemeinen Hauptsatze *Küppers* leite ich die nachstehenden Theoreme ab:

a. „Es giebt vier der Curve C^3 eingeschriebene $(2n+1)$-Ecke, deren Seiten der Reihe nach durch $(2n+1)$ auf C^3 gegebene Punkte gehen".

Sind $a_1, a_2, \ldots a_{2n+1}$ die gegebenen Punkte, und zieht man von einem willkürlich auf C^3 gewählten Nullpunkte ausgehend die Geraden $0a_1 1$, $1a_2 2$, $2a_3 3$, ... und $2n\ a_{2n+1}\ 2n+1$, so gehen die Geraden $(0, 2n+1)$ bei Bewegung des Nullpunktes durch einen festen Punkt P von C^3; die vier Punkte, welche P zum Tangentialpunkte haben, sind also Coincidenzpunkte von 0 und $2n+1$, u. s. w. *).

b. „Legt man die Seiten eines eingeschriebenen $2(2n+1)$-Ecks in der nämlichen Ordnung zweimal nach einander durch $2n+1$ auf C^3 gegebene Punkte, so ist das Polygon immer ein geschlossenes".

---

2. Ist a, b ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung, so ist dies auch mit jeder Projection a_1, b_1 von a, b aus einem willkürlichen Punkte von C^3

*) Durch die drei Schnittpunkte von C^3 mit einer Geraden kann man nur drei eingeschriebene Dreiecke legen (Seite 109, 5*a*), da der vierte ganz mit der Geraden zusammenfällt.

der Fall. Deuten wir mit *Küpper* das ganze System dieser Projectionen durch das Symbol $[a, b]$ an, so sagt der oben stehende Satz von *Clebsch* aus, dass die Paare eines willkürlichen Systems $[a, b]$ entweder *alle Steiner*sche Paare n^{ter} Ordnung sind — und *Clebsch* nennt diese Paare dann Paare gleicher Klasse —, oder kein Paar die Bildung eines *Steiner*schen $2n$-Ecks zulässt.

Bekanntlich hat *Clebsch* auf analytische Weise dargethan, dass ein Punkt a, wenn n — und das will ich in der Folge immer voraussetzen — eine Primzahl ist, n^2-1 Punkte b bestimmt, die mit a ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung bilden; ferner hat er gezeigt, dass diese n^2-1 Punkte b sich so in $n+1$ Gruppen von je $n-1$ Punkten vertheilen lassen, dass die Combination von a mit den $n-1$ Punkten irgend einer dieser Gruppen eine Anzahl von n näher mit einander verwandten Punkten liefert. Ein Verdienst *Küppers* ist es, dass er diese nähere Verwandtschaft geometrisch nachgewiesen hat. Ich will versuchen in aller Kürze anzugeben, wie er dies erreicht hat, um nachher auch die verschiedenen Gruppen, welche zur Zahl n gehören, in die geometrische Betrachtung aufzunehmen.

---

3. Zum Ziele führen die folgenden Sätze, die ich mit Ausnahme des letzteren dem Inhalt nach der *Küpper*schen Abhandlung entlehne:

II. „Ist $0, 1, 2, \ldots 2n-1$ ein *Steiner*sches $2n$-Eck für das Paar a, b und δ irgend eine ungerade Zahl, so gehen die Geraden $(0, \delta)$, $(2, \delta+2)$, $(4, \delta+4)$, ... alle durch den nämlichen Punkt c von C^3, der bei Bewegung des Nullpunktes seine Lage nicht ändert. Ebenso gehen die Geraden $(1, \delta+1)$, $(3, \delta+3)$, $(5, \delta+5)$, ... alle durch einen anderen festen Punkt d von C^3“ *).

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge von I.

III. „Wenn es bei einem *Steiner*schen Polygone einmal eintritt, dass zwei paare Ecken μ, ν sich mit einer unpaaren Ecke λ auf einer Geraden befinden, so geschieht dies bei allen paaren Ecken paarweise, und es gehen die Geraden $(\mu \pm 2, \nu \mp 2)$, $(\mu \pm 4, \nu \mp 4)$, ... ebenfalls durch λ.“

Dieser Satz wird mittelst des Grundsatzes bewiesen.

Ist a, b wieder ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung und nimmt man

---

*) Da a, b und c, d die Curve C^3 im nämlichen Punkte zum dritten Male treffen, enthält dieser Satz noch mehr, was ich bei Seite lasse. Man kann ihm auch folgende Fassung geben:

„Ist $0, 1, 2, 3, \ldots$ ein *Steiner*sches $2n$-Eck, so ist $0, 3, 6, 9, \ldots$ es auch, und ebenso $0, 5, 10, 15, \ldots$ u. s. w.“

den Punkt a als Nullpunkt eines Polygons an, so erhält man ein Polygon mit sehr merkwürdigen Eigenschaften. Die Eckpunkte $0, 1, \ldots 2n-3, 2n-2, 2n-1$ sind dann der Reihe nach a, Tangentialpunkt von a, ... Tangentialpunkt von b, b und der dritte Schnittpunkt von ab mit C^3. Nennt man es mit *Küpper* ein *Kernpolygon*, so findet man weiter aus den vorhergehenden Sätzen:

IV. „Jede Gerade, die zwei paare Ecken μ, ν eines Kernpolygons verbindet, schneidet C^3 zum dritten Male in der unpaaren Ecke $\lambda = \mu + \nu + 1$ (oder $\mu+\nu+1$ um $2n$ verringert). Die unpaaren Ecken $1, 5, 9, 13, \ldots$ eines Kernpolygons sind die Tangentialpunkte der paaren Ecken $0, 2, 4, 6, \ldots$"

V. „Jede Combination μ, ν zweier paaren Ecken eines Kernpolygons bildet ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung. Sie gehören alle den Systemen $[0, 2], [0, 4], \ldots [0, 2(n-1)]$ an, die nur $\frac{n-1}{2}$ verschiedene Systeme liefern, da die Systeme $[0, 2p]$ und $[0, 2(n-p)]$ identisch sind."

Die Gruppe von n Punkten $0, 2, 4, \ldots 2(n-1)$ nennt man eine *Involutionsgruppe.*

VI. „Projicirt man die paaren Ecken eines Kernpolygons vom *Steiner*schen Paare a, b aus einem beliebigen Punkte p der C^3 und die unpaaren Ecken aus dem Tangentialpunkte von p, so erhält man die Ecken eines neuen Kernpolygons, welches den Projectionen a_1, b_1 von a, b aus p angehört."

Deshalb bilden die Projectionen einer Involutionsgruppe zum Paare a, b ein *Gruppensystem* $[a, b]$.

VII. „Zwei Involutionsgruppen, welche aus einem gewissen Punkte p_1 von C^3 Projectionen von einander sind, erscheinen auch als Projectionen von einander aus $n-1$ anderen Punkten $p_2, p_3, \ldots p_n$, und diese n Punkte p bilden wieder eine Involutionsgruppe. Je zwei dieser *drei connexen Gruppen* sind die Projectionen von einander aus jedem Punkte der dritten."

VIII. „Die im Gruppensystem $[a, b]$ einen willkürlichen Punkt von C^3 enthaltende Gruppe ist identisch mit der diesem willkürlichen Punkte zukommenden Gruppe von *Clebsch*."

Denn die kreuzweise Verbindung zweier Paare aus verschiedenen Gruppen des Gruppensystems $[a, b]$ liefert nach VII. immer wieder ein *Steiner*sches Paar einer zum nämlichen System gehörenden Gruppe.

4. Wenn es mir gelungen ist nachzuweisen, dass die Gruppensysteme $[a, b]$ von Herrn *Küpper* mit den Gruppen von *Steiner*schen Punktepaaren verschiedener Klasse von *Clebsch* identisch sind, so liegt mir noch ob zu zeigen, wie die von *Clebsch* angegebenen $n+1$ verschiedenen Gruppen zur Zahl n auch in die geometrische Betrachtung aufgenommen werden können, und dass sie $n+1$ verschiedenen *Küpper*schen Gruppensystemen äquivalent sind.

Ich schicke dabei die Bemerkung voraus, dass die besonderen Fälle $n = 2$ und $n = 3$ das Bestehen von verschiedenen zur Zahl n gehörenden Gruppensystemen anzeigen. Ist nämlich $n = 2$, so hat das Kernpolygon zwei paare Ecken, und das Gruppensystem $[ab]$ bei a bestimmt also nur einen einzigen Punkt b. Und doch hat die geometrische Behandlung schon drei zu a gehörende Punkte b kennen gelehrt: die drei Punkte, welche mit a den Tangentialpunkt gemein haben; so dass man drei verschiedene Gruppensysteme annehmen muss. Ist weiter $n = 3$, so liefert ein Gruppensystem nur zwei zu a gehörende Punkte b. Und doch giebt es deren bekanntlich acht, die acht Punkte, welche man durch Verbindung von a mit einem Wendepunkte und durch Projection der acht anderen Wendepunkte aus dem dritten Schnittpunkte dieser Geraden mit C^3 auf C^3 erhält; somit kommen hier vier verschiedene Gruppensysteme vor. Und wirklich kann man geometrisch zeigen, dass die Voraussetzung, es gebe zwei verschiedene Gruppensysteme zur Zahl n, die Existenz von mindestens $n+1$ solchen Systemen bedingt. Dies will ich noch in wenigen Zeilen beweisen.

---

5. *c.* „Deutet man durch die Schreibweise $A(pqr) = B$ an, dass ein der Curve eingeschriebenes Polygonstück, welches im Punkte A von C^3 anfängt und seine drei Seiten der Reihe nach durch die Fundamentalpunkte p, q, r von C^3 sendet, im Punkte B auf C^3 endet, so folgt aus $A(pqr) = B$ auch $A(rqp) = B$."

Denn aus dem zweiten Theoreme *b.*, das ich aus dem Hauptsatze I von Herrn *Küpper* abgeleitet habe, folgt $A(pqrpqr) = A$. Ist also $A(pqr) = B$ gegeben, so ist auch $B(pqr) = A$ oder in umgekehrter Folge $A(rqp) = B$.

d. „Der Endpunkt B eines eingeschriebenen Polygonstückes ändert seine Lage nicht, wenn man irgend zwei paare, oder wenn man irgend zwei unpaare Fundamentalpunkte mit einander vertauscht."

Der Beweis ist geliefert, sobald man nur gezeigt hat, dass in

$A(p_1p_2q_1q_2r_1r_2s_1s_2\ldots)$ die Vertauschung von zwei nur durch einen Fundamentalpunkt getrennten Fundamentalpunkten wie z. B. die von q_2 und r_2 auf die Lage des Endpunktes B keinen Einfluss hat. Wenn man nun $A(p_1p_2q_1q_2r_1r_2s_1s_2\ldots) = B$ in $A(p_1p_2q_1) = C$, $C(q_2r_1r_2) = D$ und $D(s_1s_2\ldots) = B$ zerlegt, so kann man nach dem Theoreme *c.* das Mittelstück $C(q_2r_1r_2) = D$ durch $C(r_2r_1q_2) = D$ ersetzen, und man erhält $A(p_1p_2q_1r_2r_1q_2s_1s_2\ldots) = B$, u. s. w.

e. „Wenn a, b und a_1, b_1 zwei *Steiner*sche Paare n^{ter} Ordnung sind, und man verbindet sie kreuzweise (also entweder a mit a_1 und b mit b_1 oder aber a mit b_1 und b mit a_1), so schneiden die Verbindungslinien die Curve in einem neuen *Steiner*schen Paare n^{ter} Ordnung a_2, b_2, wenn nicht a_2 und b_2 zusammenfallen, was nur eintritt, wenn a, b und a_1, b_1 Paare der nämlichen Klasse sind, d. h. dem nämlichen Systeme angehören".

Da die Punkttripel a, a_1, a_2 und b, b_1, b_2 die Schnittpunkte von C^3 mit zwei Geraden sind, so folgert man nach meinem zweiten Hülfssatze (Seite 108), dass das Sechseck $A(aba_1b_1a_2b_2)$ sich immer schliesst, wo man auch A auf C^3 annimmt. Also ist auch immer $A(aba_1b_1a_2b_2) = A$. Da man von A ausgehend nach n Umläufen wieder in A anlangt, so hat man auch $A(aba_1b_1a_2b_2)^n = A$; durch wiederholte Anwendung von *d.* kann dies aber in $A(ab)^n(a_1b_1)^n(a_2b_2)^n = A$ umgesetzt werden; da aber die Punkte a, b ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung bilden, so ist $A(ab)^n = A$ und aus gleichem Grunde $A(a_1b_1)^n = A$; man findet also $A(a_2b_2)^n = A$, was den Satz beweist*).

f. „Sind 0, 2, 4, 6, ... $2(n-1)$ die n Punkte einer Involutionsgruppe, und giebt es ausser den Punkten 2, 4, 6, ... $2(n-1)$ noch einen andern Punkt $2'$, der mit 0 ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung bildet, so giebt es auch $n+1$ Gruppensysteme $[0, 2]$, $[0, 2']$, $[2, 2']$, $[4, 2']$, ... $[2(n-1), 2']$ zur Zahl n, die alle von einander verschieden sind".

Das System $[2p, 2']$ ist erstens wirklich ein System zur Zahl n. Denn die Projectionen von $2p$ und $2'$ aus 0 auf C^3 sind die dritten Schnittpunkte von C^3 mit den Geraden $0, 2p$ und $0, 2'$, die die Punkte der *Steiner*schen Paare $0, 2'$ und $2p, 0$ kreuzweise verbinden; mithin kommt das vorhergehende Theorem hier zur Anwendung. Weiter ist das System $[2p, 2']$ verschieden von $[0, 2]$ und $[0, 2']$, da es auf die im Theoreme *e.*

*) Es ist leicht, den Satz *d.*, welcher in Bezug auf viele Fragen ein Fundamentalsatz ist, und daher auch den Satz *e.* ganz aus meinem zweiten Hülfssatze abzuleiten. Die oben gegebene Ableitung habe ich nur vorgezogen, weil sie ein wenig kürzer ist.

angegebene Weise aus diesen abgeleitet worden ist, und die Systeme [0, 2] und [0, 2′] nach dem *Küpper*schen Satze VII auch unter einander identisch sein würden, wenn es mit einem von diesen identisch wäre. Endlich sind auch die Systeme [$2p$, 2′] und [$2q$, 2′] unter einander verschieden, weil $2p$, $2q$ und 2′ nicht in eine nämliche Gruppe gehören.

Es giebt n^2 Combinationen von je einem der n Punkte 0, 2, 4, ... $2(n-1)$ mit je einem der n Punkte 0′, 2′, 4′, ... $2(n-1)'$, die sich aber wegen der Identität von 0 und 0′ auf n^2-1 reduciren. Diese Combinationen geben zu je zweien die $\frac{n^2-1}{2}$ zur Zahl n gehörenden Systeme [a, b] an; denn die Systeme [$2p$, $2q'$] und [$2(n-p)$, $2(n-q')$] sind bekanntlich identisch.

g. „Bilden die Punkte a, b und ebenso die Punkte a, c ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung, so ist dies auch mit den Punkten b, c der Fall. Entweder gehören dann die drei Punkte a, b, c zur nämlichen Gruppe, oder sie gehören paarweise zu drei verschiedenen Gruppensystemen, aus denen sich die $n-2$ übrigen Gruppensysteme ohne Mühe ableiten lassen."

---

6. Die von mir gelieferte geometrische Betrachtung der $n+1$ verschiedenen Gruppensysteme ist ohne Zweifel noch in mancher Hinsicht unvollständig. Wünschenswerth wäre es z. B. noch zu zeigen, dass die $n+1$ Gruppensysteme (bei einer Primzahl n) immer vorkommen, und dass das Gruppensystem damit abgeschlossen ist. Für jetzt sei es genug, nachgewiesen zu haben, dass die Resultate der besonderen Fälle $n=2$ und $n=3$ es nur dann wirklich anzeigen würden, wenn man vorher bewiesen hätte, dass die Ergebnisse sich für alle Primzahlen n auf gleiche Weise gestalten*).

Indem ich andere interessante Theile der *Küpper*schen Abhandlung (wie z. B. die Betrachtung der Ordnungscurve des Systemes von Punktepaaren) übergehe, schliesse ich diesen Nachtrag mit einer Frage in Bezug auf den folgenden Satz:

h. „Wenn zwei Kegelschnitte die Curve C^3 in den beiden Punktesextupeln a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1 und a_2, b_2, c_2, d_2, e_2, f_2 schneiden, so ist jedes Polygon $(a_1a_2b_1b_2c_1c_2d_1d_2e_1e_2f_1f_2)$ ein geschlossenes."

---

*) Ist es vielleicht möglich, aus der Zahl n^2-1 der Curven C^3 eines Büschels, für welche zwei der Basispunkte P und Q ein *Steiner*sches Paar n^{ter} Ordnung sind (Seite 110, 5*c*), auf die Zahl der Punkte b, die mit a ein solches Paar bilden, zu schliessen? Oder stimmen diese beiden Zahlen nur zufälligerweise überein?

Sind nämlich die dritten Schnittpunkte von der Curve C^3 mit $a_1 b_1$, $c_1 d_1$ und $e_1 f_1$ die auf einer Geraden liegenden Punkte p_1, q_1, r_1, und ebenso die dritten Schnittpunkte von C^3 mit $a_2 b_2$, $c_2 d_2$ und $e_2 f_2$ die ebenfalls auf einer Geraden liegenden Punkte p_2, q_2, r_2, und zerfällt man die Voraussetzung $A(a_1 a_2 b_1 b_2 c_1 c_2 d_1 d_2 e_1 e_2 f_1 f_2) = B$ in die drei Theile $A(a_1 a_2 b_1 b_2) = C$, $C(c_1 c_2 d_1 d_2) = D$ und $D(e_1 e_2 f_1 f_2) = B$, so folgt:

1°. aus $A(a_1 a_2 b_1 b_2) = C$ und $A(a_1 a_2 b_1 b_2 p_1 p_2) = A$ auch $C(p_1 p_2) = A$,

2°. - $C(c_1 c_2 d_1 d_2) = D$ - $C(c_1 c_2 d_1 d_2 q_1 q_2) = C$ - $D(q_1 q_2) = C$,

3°. - $D(e_1 e_2 f_1 f_2) = B$ - $D(e_1 e_2 f_1 f_2 r_1 r_2) = D$ - $B(r_1 r_2) = D$;

hieraus zusammen folgt aber auch $A(p_2 p_1 q_2 q_1 r_2 r_1) = B$, so dass meinem zweiten Hülfssatze zufolge B mit A zusammenfallen muss.

Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des zweiten Hülfssatzes, wobei Kegelschnitte an die Stelle von Geraden treten. Nun folgt aus den Betrachtungen von *Clebsch* unmittelbar, dass er wahr bleibt, wenn man die Geraden durch irgend zwei Curven der nämlichen Ordnung ersetzt. Ich frage, wie wird man dies geometrisch nachweisen?

Groningen, den 26. October 1883.

Zu der Abhandlung: Ueber die Eigenschaften des Linienelementes der Flächen von constantem Krümmungsmass.

(Dieses Journal Bd. 94, pag. 181.)

(Von Herrn *J. Weingarten.*)

6.

In den vorhergehenden Abschnitten dieser Abhandlung ist nachgewiesen worden, dass die Geometrie auf den Flächen von constantem Krümmungsmass aus der Angabe irgend einer besonderen Form

$$\sqrt{E\,dp^2+2F\,dp\,dq+G\,dq^2}$$

ihres Linienelementes zu erledigen ist, wenn es gelingt eine Function V zweier Variabeln p, q so zu bestimmen, dass dieselbe in Beziehung auf die eine der Variabeln p einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\text{(VII.)} \qquad \frac{\partial^2 V}{dp^2}+V\Big(\frac{Ek}{4}+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{i}{2}\,\frac{\partial\alpha}{\partial p}\Big)=0$$

genügt und gleichzeitig die homogene lineare partielle Differentialgleichung

$$\text{(IV.)} \qquad \frac{\partial V}{\partial q}-\varrho\,\frac{\partial V}{\partial p}+\tfrac{1}{2}V\frac{\partial\varrho}{\partial p}=0$$

befriedigt; zwei Bedingungen, welche stets gleichzeitig erfüllbar sind.

Es ist schon im ersten Abschnitte bemerkt worden, dass solche Function V stets einer zweiten linearen auf die Variable q bezüglichen Differentialgleichung zweiter Ordnung Genüge leistet, welche sich auf dem dort angegebenen Wege, oder leichter durch Vertauschung der Variabeln p, q in der Form

$$\text{(XV.)} \qquad \frac{\partial^2\frac{1}{\sqrt{\varrho}}V}{\partial q^2}+\frac{1}{\sqrt{\varrho}}V\Big(\frac{Gk}{4}+\frac{\beta^2}{4}+\frac{i}{2}\,\frac{\partial\beta}{\partial q}\Big)=0$$

ergiebt, wenn unter β die Grösse

$$\beta = \frac{Gm'' - Fn''}{G\sqrt{\Delta}} - \frac{i}{2G}\frac{\partial G}{\partial p}$$

verstanden wird.

Die Gleichungen (VII.) und (XV.) bestimmen den Charakter der gesuchten Function V in Beziehung auf jede der in sie eingehenden Variabeln durch eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung, und ihre Integration führt zur Integration der partiellen Differentialgleichung (IV.).

In der That ist eine Function V, welche der Gleichung (VII.) genügt, bestimmt, wenn man ihren Werth und den Werth ihrer ersten Derivirten nach p für irgend einen Specialwerth p_0 von p gegeben hat. Es sei vorausgesetzt, dass die Function V auch der Differentialgleichung (IV.) genüge. Bezeichnet man durch V^0 denjenigen Werth, welchen die Function V durch die Substitution $p = p_0$ annimmt, so genügt dieser Werth unter den gemachten Voraussetzungen den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{\sqrt{\varrho^0}} V^0}{\partial q^2} + \frac{1}{\sqrt{\varrho^0}} V^0 \left(\frac{E^0 k}{4} + \frac{(\beta^0)^2}{4} + \frac{i}{2}\frac{\partial \beta^0}{\partial q} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial V^0}{\partial q} - \varrho^0 \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{p=p_0} + \tfrac{1}{2} V^0 \left(\frac{\partial \varrho}{\partial p} \right)_{p=p_0} = 0.$$

Die zweite dieser Gleichungen bestimmt den Werth von $\frac{\partial V}{\partial p}$ für $p = p_0$ durch denjenigen von V^0.

Wird nunmehr eine Function V als ein Integral der Differentialgleichung (VII.) derart bestimmt, dass dieselbe für $p = p_0$ in irgend ein Integral V^0 der ersten der vorstehenden Gleichungen übergeht, und dass sich ihr Differentialquotient in Beziehung auf p für $p = p_0$ in

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_{p=p_0} = \frac{1}{\varrho^0} \left(\frac{\partial V^0}{\partial q} + \tfrac{1}{2} V^0 \left(\frac{\partial \varrho}{\partial p} \right)_{p=p_0} \right)$$

verwandelt, so erlangt man eine Function V, welche der *partiellen* Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial q} - \varrho \frac{\partial V}{\partial p} + \tfrac{1}{2} V \frac{\partial \varrho}{\partial p} = 0$$

für jedes Werthenpaar p, q Genüge leistet.

Der Beweis dieser Behauptung, welcher in indirecter Form aus der Anzahl der willkürlich bleibenden Constanten entnommen werden könnte, ergiebt sich in directer Weise aus der Untersuchung der Eigenschaften von

Functionen zweier Variabeln, welche gleichzeitig einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in Beziehung auf die eine der Variabeln und einer homogenen linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügen.

Bezeichnen $A[\varphi]$ und $C[\varphi]$ die auf irgend eine Function φ ausgeübten Operationen

$$A[\varphi] = \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial p} + a\varphi,$$

$$C[\varphi] = \frac{\partial\varphi}{\partial q} + c_1 \frac{\partial\varphi}{\partial p} + c\varphi,$$

a, a_1, c, c_1 Functionen der Variabeln p, q, so ergiebt sich ohne Mühe die Relation

$$C[A[\varphi]] - A[C[\varphi]] = -2\frac{\partial c_1}{\partial p} A[\varphi] + \delta\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \gamma\varphi,$$

$$\delta = \frac{\partial a_1}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial p}\left[a_1 c_1 - 2c - \frac{\partial c_1}{\partial p}\right],$$

$$\gamma = \frac{\partial a}{\partial q} + c_1\frac{\partial a}{\partial p} + 2a\frac{\partial c_1}{\partial p} - a_1\frac{\partial c}{\partial p} - \frac{\partial^2 c}{\partial p^2}.$$

Unter der Voraussetzung der Existenz linear unabhängiger Functionen ψ, welche den Gleichungen

$$A[\psi] = 0, \quad C[\psi] = 0$$

gleichzeitig Genüge leisten, verwandelt sich diese Relation in

$$0 = \delta\frac{\partial\psi}{\partial p} + \gamma\psi,$$

welche Gleichung die weiteren

$$\delta = 0, \quad \gamma = 0$$

zur Folge hat. Diese letzteren Gleichungen sind daher die ***nothwendigen*** Bedingungen der Coexistenz der Gleichungen

$$A[V] = 0, \quad C[V] = 0$$

für ein System linear unabhängiger Functionen V.

Es zeigt sich, dass diese Bedingungen auch hinreichend sind.

Sind dieselben durch passende Wahl der Functionen a, c erfüllt, so verwandelt sich die Relation (1.) in

$$(2.) \qquad C[A[\varphi]] - A[C[\varphi]] = -2\frac{\partial c_1}{\partial p} A[\varphi].$$

Ist U eine Function, welche der Gleichung

$$A[U] = 0$$

genügt, so folgt aus der Gleichung (2.), dass auch

$$A[C[U]] = 0,$$

dass also $C[U]$ wiederum ein Integral der linearen Differentialgleichung

$$A[U] = 0$$

angiebt. Man kann daher aus einem Integral der vorstehenden Differentialgleichung durch Differentiation wiederum ein Integral derselben Differentialgleichung ableiten.

Eliminirt man ferner aus den Gleichungen für $A[\varphi]$, $C[\varphi]$ und den zwei Differentialquotienten von $C[\varphi]$ die drei Quantitäten $\frac{\partial\varphi}{\partial p}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}$, so erhält man die weitere Relation

$$(3.)\qquad B[\varphi] = \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} + b_1\frac{\partial\varphi}{\partial q} + b\varphi = \frac{\partial C[\varphi]}{\partial q} - c_1\frac{\partial C[\varphi]}{\partial p} + \lambda C[\varphi] + c_1^2 A[\varphi],$$

in welcher die Coefficienten b, b_1, λ die nachstehenden Werthe vorstellen:

$$\lambda = \frac{1}{c_1}\frac{\partial c_1}{\partial q} - \frac{\partial c_1}{\partial p} - c + a_1 c_1,$$

$$b = \frac{\partial c}{\partial q} - c_1\frac{\partial c}{\partial p} + a c_1^2 - c\lambda,$$

$$b_1 = 2c - a_1 c_1 + \frac{\partial c_1}{\partial p} - \frac{1}{c_1}\frac{\partial c_1}{\partial q}.$$

Aus derselben folgt, dass eine Function V, welche den Differentialgleichungen

$$A[V] = 0, \quad C[V] = 0$$

gemeinschaftlich genügt, stets auch der linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in Beziehung auf die Variable q

$$B[V] = 0$$

Genüge leistet.

Bestimmt man jetzt ein Integral V der Gleichung $A[V] = 0$ so, dass für $p = p_0$ dasselbe in irgend ein Integral V^0 der Differentialgleichung

$$B(V^0) = \frac{\partial^2 V^0}{\partial q^2} + b_1^0\frac{\partial V^0}{\partial q} + b^0 V^0 = 0$$

übergeht, und dass ferner der nach p genommene erste Differentialquotient von V für $p = p_0$ aus der Gleichung

$$\{C[V]\}_{p=p_0} = \frac{\partial V^0}{\partial q} + c_1^0\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{p=p_0} + c^0 V^0 = 0$$

entnommen wird, so ist auch

$$\left\{\frac{\partial C[V]}{\partial q}\right\}_{p=p_0} = 0,$$

und die Relation (3.) ergiebt durch die Substitution der Function V für φ, und nach Einsetzung von p_0 für p

$$\left\{\frac{\partial C[V]}{\partial p}\right\}_{p=p_0} = 0.$$

Hiernach verschwindet in Folge der Bestimmung der Function V die Grösse $C[V]$ und ihr nach p genommener Differentialquotient für den Specialwerth p_0 von p.

Da aber die Grösse $C[V]$ ein Integral der linearen Differentialgleichung

$$A[V] = 0$$

ist, so verschwindet sie für jeden Werth von p, und es ist folglich

$$C[V] = \frac{\partial V}{\partial q} + c_1 \frac{\partial V}{\partial p} + cV = 0$$

für jeden Werth der Variabeln p, q.

Hat daher eine partielle lineare Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial q} + c_1 \frac{\partial V}{\partial p} + cV = 0$$

gemeinschaftliche linear unabhängige Lösungen mit einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + a_1 \frac{\partial V}{\partial p} + aV = 0,$$

so ist ihre Integration zurückführbar auf die Integration zweier gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, nämlich der vorstehenden und der zweiten:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial q^2} + b_1 \frac{\partial V}{\partial q} + bV = 0,$$

in welcher die Coefficienten die weiter oben angeführte Bedeutung haben. Die Theorie des Linienelementes der Flächen von constantem Krümmungsmass liefert ein Beispiel für das Auftreten linearer partieller Differentialgleichungen dieser Gattung.

Berlin 1883.

Ueber lineare und quadratische Strahlencomplexe und Complexen-Gewebe.

(Von Herrn *Th. Reye* in Strassburg i. E.)

Die Gesammtheit aller geraden Linien, womit die *Plücker*sche Strahlengeometrie sich beschäftigt, ist eine *quadratische* Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen, während z. B. alle Kugeln des Raumes eine *lineare* Mannigfaltigkeit vierter Stufe bilden. Rein geometrisch zeigt sich dieser wesentliche Unterschied schon darin, dass i. A. vier lineare Strahlencomplexe *zwei* Strahlen, dagegen vier lineare Kugelcomplexe nur *eine* Kugel mit einander gemein haben; und in der That sind ja die *Plücker*schen Liniencoordinaten einer quadratischen Bedingungsgleichung unterworfen. Ein Liniencomplex zweiten Grades ist deshalb, abgesehen von seinen Dimensionen, nicht sowohl einer Fläche zweiter Ordnung analog, als vielmehr einer Raumcurve vierter Ordnung, in welcher zwei solche Flächen sich durchdringen.

Legt man den sechs Liniencoordinaten auch solche relativen Werthe bei, welche der quadratischen Bedingungsgleichung nicht genügen*), so repräsentiren sie die Elemente einer linearen Mannigfaltigkeit von fünf Dimensionen, worin die quadratische der geraden Linien enthalten ist. Die Untersuchung dieser quadratischen Mannigfaltigkeit wird damit auf die viel leichtere jener linearen zurückgeführt, während die Vorzüge der Anschaulichkeit durch eine geometrische Deutung der so verallgemeinerten Liniencoordinaten sich bewahren lassen.

Diese Verallgemeinerung, von welcher bereits Herr *F. Klein**) Gebrauch gemacht hat, gestattet die unmittelbare Anwendung der bei den

*) Vgl. *Plücker*s Andeutung in seiner „Neuen Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement", Leipzig 1868/9, S. 25.

**) *F. Klein,* die allg. lin. Transf. der Linien-Coord.; Math. Ann. II, S. 368.

Flächen zweiten Grades ausgebildeten Methoden auf die Strahlengeometrie. Sie bietet für letztere dieselben Vortheile und ist ebenso berechtigt und geboten, wie die Benutzung der ausserhalb einer Fläche zweiter Ordnung gelegenen Punkte für die Theorie dieser Fläche.

Der Gang und die Ergebnisse unserer Entwickelungen werden vielfach an diejenigen einer früheren Arbeit*) erinnern. Insbesondere wird der Gesammtheit aller Geraden in jener Mannigfaltigkeit fünfter Stufe eine ähnliche Stellung angewiesen, wie dem quadratischen Complexe aller Punktkugeln in der Kugelgeometrie und dem unendlich fernen imaginären Normalkreise im Raume von drei Dimensionen. Als Analogon der Schaar confocaler Cycliden wird die Schaar quadratischer Strahlencomplexe mit gemeinschaftlicher Singularitätenfläche sich darstellen, und den ∞^2 eine Cyclide doppelt berührenden Kugeln sind die unten nachgewiesenen ∞^3 linearen Complexe analog, welche einen quadratischen Strahlencomplex doppelt berühren, zugleich aber die ∞^2 Doppeltangenten seiner Singularitätenfläche (Vgl. die Schlussbemerkung).

§ 1.

Die linearen Strahlencomplexe und Complexen-Gewebe.

1. Wir bezeichnen mit $x_1, x_2, \ldots, x_6$ die homogenen Coordinaten einer Geraden x bezüglich eines beliebigen Fundamentaltetraeders. Bekanntlich kann x_i als zweigliedrige Determinante der tetraedrischen Coordinaten zweier Punkte von x dargestellt werden, und verschwindet, wenn die i^{te} Kante des Tetraeders von x geschnitten wird. Von den sechs Tetraederkanten möge die erste der vierten, die zweite der fünften und die dritte der sechsten gegenüberliegen. Dann ist bekanntlich:

$$\text{(I.)} \qquad x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6=0 \quad \text{oder} \quad [x]=0$$

die Bedingungsgleichung, welcher die Liniencoordinaten genügen müssen, und

$$\text{(II.)} \qquad y_4x_1+y_5x_2+y_6x_3+y_1x_4+y_2x_5+y_3x_6=0 \quad \text{oder} \quad [yx]=0$$

die Bedingung, unter welcher zwei Gerade x, y sich schneiden; und zwar ist (II.) identisch mit $\Sigma\pm p_1q_2r_3s_4=0$, wenn p, q und r, s zwei Punktenpaare von x und y bezeichnen.

*) „Ueber quadr. Kugelcomplexe und confocale Cycliden“ in Cremona et Beltrami, Collectanea Mathematica, Mediolani 1881, S. 241.

Vier Strahlencomplexe vom Grade k, l, m resp. n haben i. A. nicht $klmn$ sondern $2klmn$ Strahlen mit einander gemein, weil die Coordinaten dieser Strahlen ausser den vier homogenen Gleichungen der Complexe auch die quadratische Gleichung (I.) befriedigen müssen.

2. Die lineare Gleichung $[ax]=0$, worin:

$$\text{(III.)} \quad [ax] = a_1x_1+a_5x_2+a_6x_3+a_1x_4+a_2x_5+a_3x_6,$$

repräsentirt einen linearen Complex a, welcher die sechs Coefficienten a_i zu „Coordinaten" hat. Derselbe ist durch die Verhältnisse seiner Coordinaten, also auch durch fünf beliebige seiner Strahlen bestimmt. Wenn seine „Invariante"*) $[a]=a_1a_4+a_2a_5+a_3a_6$ verschwindet, so besteht der Complex aus allen eine Axe $y\equiv a$ schneidenden Geraden (Gl. (II.)), und seine Coordinaten sind zugleich diejenigen seiner Axe a; er heisst in diesem Falle ein „specieller" Complex.

Die Complex-Coordinaten a_i, welche i. A. keiner Bedingungsgleichung unterworfen sind, können als eine Verallgemeinerung der Liniencoordinaten betrachtet werden. Sie gehen in letztere über, wenn der Complex a ein specieller ist, und mögen ebenso wie diese mit x_i und y_i oder z_i bezeichnet werden, wenn sie veränderlich sind.

3. Alle Strahlen des linearen Complexes a, welche eine Gerade g schneiden, treffen zugleich eine der g „zugeordnete" Gerade g'. Ihre Coordinaten x_i genügen nämlich den Gleichungen $[ax]=0$ und $[gx]=0$ und folglich auch der Gleichung $[g'x]=0$, wenn gesetzt wird:

$$\text{(IV.)} \quad g_i' = [ag]a_i-[a]g_i \quad \text{für} \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ 6;$$

die g_i' aber befriedigen die Gleichung $[g']=0$, sind also die Coordinaten einer Geraden.

Jeder Strahl, welcher zwei einander zugeordnete Gerade g, g' schneidet, gehört wegen (IV.) zu dem linearen Complexe a. Demzufolge enthält der Complex jeden Strahlenbüschel erster Ordnung, welcher zwei, und jede Regelschaar, welche drei Strahlen mit ihnen gemein hat; denn die Geraden, welche diese zwei resp. drei Strahlen schneiden, sind paarweise einander zugeordnet und schneiden alle Strahlen des Büschels oder der Schaar. Alle durch einen Punkt gehenden oder in einer Ebene liegenden Strahlen des linearen Complexes bilden folglich einen Strahlenbüschel erster Ordnung; der Mittelpunkt und die Ebene desselben sind einander zugeordnet.

---

*) Dieser Name rührt her von Herrn *F. Klein* (Math. Ann. II, S. 201).

Jede Gerade des Complexes ist sich selbst zugeordnet, denn für $[ag] = 0$ wird g_i' proportional zu g_i. Bezüglich eines speciellen Complexes a ist einer beliebigen Geraden die Axe zugeordnet, weil in (IV.) $[a] = 0$ wird; einer die Axe schneidenden Geraden g sind alle durch den Schnittpunkt gehenden und mit g und der Axe in einer Ebene liegenden Geraden g' zugeordnet, wie schon aus der obigen Definition der zugeordneten Geraden sich ergiebt.

4. Zwei lineare Complexe b, b' sind bezüglich eines dritten a einander zugeordnet, wenn ihre Coordinaten durch die linearen Gleichungen:

$$\text{(V.)} \qquad b_i' = [ab]a_i - [a]b_i \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, 6$$

von einander abhängen. Sind nämlich g' und g zwei einander zugeordnete veränderliche Gerade von resp. b und b', so gehen die Gleichungen $[bg'] = 0$ und $[b'g] = 0$ dieser Complexe durch die Substitution (IV.) in einander über, wenn die Gleichungen (V.) gelten.

Ist b ein specieller Complex, so ist auch b' ein solcher, und die Substitution (V.) wird identisch mit (IV.); ist a ein specieller Complex, so fällt b' mit a zusammen. Der Complex b ist sich selbst zugeordnet in Bezug auf a und identisch mit b', wenn die „simultane Invariante" von a und b:

$$[ab] = a_4b_1 + a_5b_2 + a_6b_3 + a_1b_4 + a_2b_5 + a_3b_6$$

verschwindet; wegen $[ab] = [ba]$ ist dann auch a sich selbst zugeordnet in Bezug auf b.

5. Ein linearer Complex x liegt mit zwei gegebenen b und c in einem „Complexen-Büschel", wenn $x_i = b_i + \lambda c_i$ für $i = 1, 2, \ldots, 6$, und λ ein willkürlicher Parameter ist. Dieser Complexen-Büschel (bc) wird von x beschrieben, wenn λ sich ändert; er ist durch b und c oder durch die lineare Congruenz, welche allen seinen Complexen gemein ist, eindeutig bestimmt. Durch jeden der Congruenz nicht angehörenden Strahl geht ein einziger Complex des Büschels. Die beiden linearen Complexe, welche die Coordinaten $b_i \pm \lambda c_i$ haben, trennen b und c in dem Büschel „harmonisch" (Definition); einem beliebigen Punkte sind in Bezug auf vier harmonische Complexe vier harmonische Ebenen zugeordnet, wie leicht einzusehen ist.

Der Complexen-Büschel enthält i. A. zwei specielle Complexe b', c', für deren Parameter λ sich aus (I.) die quadratische Gleichung $[c]\lambda^2 + [bc]\lambda + [b] = 0$ ergiebt. Die zugehörige lineare Congruenz besteht aus den Geraden, welche die beiden Axen von b' und c' schneiden. Be-

züglich jedes andern Complexes des Büschels sind diese Axen einander zugeordnet (3.). Ist $[\overset{\circ}{b}c]^2 = 4[b][c]$, so fallen b' und c' zusammen.

Wenn ein Complexen-Büschel mehr als zwei specielle Complexe enthält, oder auch zwei solche, deren Axen sich schneiden, so sind alle seine Complexe speciell, und ihre Axen bilden einen Strahlenbüschel erster Ordnung. Die Axen von vier harmonischen speciellen Complexen sind vier harmonische Strahlen.

6. Wenn zwei lineare Complexe b, b' bezüglich eines dritten a einander zugeordnet sind, so liegen sie mit a in einem Complexen-Büschel, weil jeder gemeinschaftliche Strahl von a und b als sich selbst zugeordneter auch zu b' gehört. Bezüglich des Complexes a ist ein anderer x sich selbst zugeordnet, wenn er zwei hinsichtlich a einander zugeordnete Gerade g, g' enthält; denn x hat mit dem ihm zugeordneten Complexe eine lineare Congruenz von a sowie die Strahlen g, g' gemein und ist folglich mit ihm identisch.

7. Ein „lineares Complexen-Gewebe vierter Stufe" besteht aus den vierfach unendlich vielen linearen Complexen x, deren Coordinaten einer linearen homogenen Gleichung $[ax] = 0$ oder:

$$a_4x_1 + a_5x_2 + a_6x_3 + a_1x_4 + a_2x_5 + a_3x_6 = 0$$

genügen. Die Axen seiner speciellen Complexe bilden einen linearen Complex a, welcher in Bezug auf jeden Complex des Gewebes sich selbst zugeordnet ist (4.). Das lineare Complexen-Gewebe besteht aus allen in Bezug auf a sich selbst zugeordneten linearen Complexen (4.); es enthält jeden linearen Complex x, welcher durch zwei hinsichtlich a einander zugeordnete Gerade geht. Jeder Complexen-Büschel, welcher zwei Complexe des linearen Complexen-Gewebes verbindet, liegt ganz in demselben; jeder andere Complexen-Büschel hat mit ihm einen einzigen Complex gemein (vgl. 5.). Durch fünf lineare Complexe kann ein, und i. A. nur ein lineares Complexen-Gewebe gelegt werden.

8. Von zwei linearen Complexen, deren simultane Invariante $[ax]$ verschwindet, von welchen also jeder bezüglich des andern sich selbst zugeordnet ist, wollen wir sagen, sie „tragen" oder „stützen" oder „ruhen auf" einander. Nach Herrn *F. Kleins* Ausdrucksweise (Math. Ann. II, S. 201) liegen sie „in Involution". Sind nämlich g, g' zwei Strahlen von x, die bezüglich a einander zugeordnet sind, und ist l ein gemeinschaftlicher Strahl von a und x, welcher g und folglich auch g' schneidet, so sind der Ebene

gl in resp. a und x dieselben beiden Punkte $g'l$ und gl zugeordnet, wie der Ebene $g'l$ in resp. x und a; die Ebene gl aber kann als eine ganz beliebige betrachtet werden. Die Punkte und Ebenen des Raumes sind also durch die beiden sich stützenden Complexe paarweise einander zugeordnet; sie bilden, wie leicht einzusehen ist, ein geschaart-involutorisches System, welches die gemeinschaftlichen Strahlen der Complexe zu Leitstrahlen hat.

Nur dann stützt ein linearer Complex a sich selber, wenn er ein specieller und $[a] = 0$ ist. Ist von zwei sich stützenden Complexen der eine oder jeder ein specieller, so liegt seine Axe in dem andern; im letzteren Falle schneiden sich die beiden Axen. — Wenn von vier harmonischen Complexen zwei getrennte a, x sich stützen, so sind bezüglich derselben die beiden übrigen b, b' einander zugeordnet; denn aus den Gleichungen:

$$\varrho\, b_i = a_i + \lambda x_i, \quad \varrho' b_i' = a_i - \lambda x_i \quad \text{und} \quad [a\,x] = 0$$

folgt durch Elimination der x_i und λ bei passender Annahme der Constanten ϱ, ϱ' die Substitution (V.).

9. Jedes lineare Complexen-Gewebe vierter Stufe hat zum „Träger" den linearen Complex, auf welchen alle seine Complexe sich stützen. Zwei lineare Complexen-Gewebe vierter Stufe durchdringen sich in einem linearen Complexen-Gewebe dritter Stufe, dessen Complexe nicht allein auf die Träger a, a' jener beiden Gewebe sich stützen, sondern zugleich auf jeden Complex des Büschels (aa'). Ebenso ruht ein lineares Complexen-Gewebe zweiter Stufe (ein „Complexen-Bündel"), in welchem drei Gewebe vierter Stufe sich durchdringen, auf einem durch deren drei Träger gehenden Complexen-Bündel. Die Axen der speciellen Complexe von zwei sich stützenden Complexen-Bündeln bilden i. A. die beiden Regelschaaren eines einschaligen Hyperboloides; in jeder dieser Schaaren durchdringen sich alle Complexe von einem der Bündel (7.). Vier resp. fünf lineare Complexen-Gewebe vierter Stufe haben i. A. einen Complexen-Büschel resp. einen einzigen Complex mit einander gemein.

§ 2.

Quadratische Strahlencomplexe und Complexen-Gewebe.

10. Eine homogene quadratische Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ für die Complex-Coordinaten x_i, worin

$$\Sigma a_{ik} x_i x_k = a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \cdots + a_{55} x_5^2 + 2a_{56} x_5 x_6 + a_{66} x_6^2 \quad \text{und} \quad a_{ik} = a_{ki},$$

repräsentirt ein quadratisches Complexen-Gewebe Γ vierter Stufe. Die Axen aller speciellen Complexe von Γ bilden einen „in Γ enthaltenen" Strahlencomplex zweiten Grades Γ_0', welcher durch die beiden quadratischen Gleichungen $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ und $x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6 = 0$ dargestellt wird. Γ ist durch zwanzig seiner linearen Complexe, und Γ_0' durch neunzehn seiner Strahlen i. A. eindeutig bestimmt.

Setzt man $x_i = y_i + \lambda z_i$, so geht die Gleichung von Γ über in

$$\Sigma a_{ik} y_i y_k + 2\lambda \Sigma a_{ik} y_i z_k + \lambda^2 \Sigma a_{ik} z_i z_k = 0;$$

das quadratische Complexen-Gewebe Γ hat demnach mit einem Complexen-Büschel (yz) i. A. zwei lineare Complexe gemein, deren Parameter λ' die Wurzeln dieser Gleichung sind. Die beiden Complexe haben die Coordinaten $y_i \pm \lambda' z_i$ und trennen y und z harmonisch (5.), wenn $\Sigma a_{ik} y_i z_k = 0$ ist; in diesem Falle heissen y und z „conjugirt" bezüglich des Complexen-Gewebes Γ. Wird zugleich $\Sigma a_{ik} y_i y_k = 0$, ist also y sich selbst conjugirt und in Γ enthalten, so vereinigen sich, indem $\pm \lambda' = 0$ wird, jene beiden linearen Complexe mit y, und der Complexen-Büschel (yz) „berührt" in y das quadratische Complexen-Gewebe Γ. Ist endlich auch noch $\Sigma a_{ik} z_i z_k = 0$, so wird λ unbestimmt, und alle Complexe des Büschels (yz) gehören zu Γ.

11. Die linearen Complexe z, welche einem gegebenen Complexe y conjugirt sind bezüglich des quadratischen Complexen-Gewebes Γ, bilden ein lineares Complexen-Gewebe vierter Stufe. Dasselbe heisst die „Polare" von y in Bezug auf Γ und wird durch die Gleichung $\Sigma a_{ik} y_i z_k = 0$ dargestellt (10.); es enthält alle linearen Complexe, welche von y durch je zwei Complexe des Gewebes Γ harmonisch getrennt sind. Ist y in Γ enthalten, so kann seine Polare durch einen das Gewebe in y berührenden Complexen-Büschel beschrieben werden (10.); sie „berührt" also Γ in y oder verbindet den Complex y mit allen ihm unendlich nahe benachbarten Complexen von Γ. Ist insbesondere y ein specieller Complex, so verbindet seine Polare ihn auch mit allen ihm unendlich nahen speciellen Complexen von Γ.

Der in Γ enthaltene quadratische Complex Γ_0' wird demnach in seinem Strahle y von dem linearen Complexe berührt, welcher die Polare von y in Bezug auf Γ trägt und aus den Axen ihrer speciellen Complexe besteht.

12. Das quadratische Complexen-Gewebe Γ möge ein „singuläres" heissen, wenn die Discriminante $\Sigma \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{66}$ seiner Gleichung verschwindet, wenn also die sechs Gleichungen:

$$a_{1k}d_1+a_{2k}d_2+\cdots+a_{6k}d_6=0, \quad \text{worin} \quad k=1,\ 2,\ \ldots.\ 6,$$

durch die Coordinaten irgend eines Complexes d zugleich befriedigt werden. Da alsdann auch $\Sigma a_{ik}d_i z_k=0$ und $\Sigma a_{ik}d_i d_k=0$ wird, so ist d jedem anderen Complexe z und sich selbst conjugirt bezüglich I'. Jeder durch d gehende Complexen-Büschel hat also mit Γ zwei in d sich vereinigende Complexe gemein (10.); er liegt ganz in Γ, wenn er d mit irgend einem anderen Complexe von I' verbindet. Das singuläre Gewebe Γ enthält demnach den linearen Complex d doppelt und kann durch einen ihn enthaltenden Complexen-Büschel beschrieben werden, ähnlich wie eine Kegelfläche durch eine Gerade.

Ein singuläres quadratisches Complexen-Gewebe wird beispielsweise von den Complexen-Büscheln gebildet, welche durch einen linearen Complex d gehen und ein beliebiges quadratisches Complexen-Gewebe berühren. Umgekehrt können jedem singulären unendlich viele andere quadratische Complexen-Gewebe eingeschrieben werden.

13. Bezüglich seines Doppelcomplexes d ist das singuläre quadratische Complexen-Gewebe I' und damit auch der quadratische Strahlencomplex I'_0 sich selbst zugeordnet, weil das Gleiche von allen durch d gehenden Complexen-Büscheln gilt (6.). Die Polaren aller Complexe eines solchen Büschels in Bezug auf I' fallen zusammen; denn aus $\Sigma a_{ik}y_i z_k=0$ und der identischen Gleichung $\Sigma a_{ik}d_i z_k=0$ folgt $\Sigma a_{ik}(d_i+\lambda y_i)z_k=0$. Das singuläre quadratische Gewebe wird deshalb nicht, wie das allgemeine, von vierfach, sondern nur von dreifach unendlich vielen linearen Complexen-Geweben berührt, und zwar von jedem derselben in allen Complexen eines durch d gehenden Complexen-Büschels. Jeder der ∞^3 linearen Complexe, auf welche diese linearen Gewebe sich stützen, berührt den in I' enthaltenen quadratischen Complex I'_0 zweimal, nämlich in den beiden Axen der speciellen Complexe des zugehörigen Complexen-Büschels (11.). Diese beiden Axen können mit einem beliebigen gemeinschaftlichen Strahle von I'_0 und d zusammenfallen; in jedem Strahle der quadratischen Congruenz $I'_0 d$ hat deshalb I'_0 mit einem auf d ruhenden linearen Complexe eine Berührung dritter Ordnung.

14. Die speciellen linearen Complexe bilden ein quadratisches Complexen-Gewebe vierter Stufe, welches durch die Gleichung $[x]=0$ oder $x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6=0$ dargestellt wird, und „das Hauptgewebe H" heissen möge. Je zwei sich stützende lineare Complexe sind conjugirt bezüglich

des Hauptgewebes H, also harmonisch getrennt durch die beiden speciellen Complexe des sie verbindenden Complexen-Büschels; und umgekehrt. Jedes lineare Complexen-Gewebe ist die Polare seines Trägers in Bezug auf H. Wenn zwei specielle Complexe conjugirt sind bezüglich H, so schneiden sich ihre Axen, und umgekehrt. Ein beliebiges Complexen-Gewebe hat mit H alle seine speciellen Complexe und nur diese gemein.

15. Die Gleichungen $\Sigma a_{ik}x_ix_k=0$, $\Sigma b_{ik}x_ix_k=0$ und $\Sigma(a_{ik}+\lambda b_{ik})x_ix_k=0$ repräsentiren drei quadratische Complexen-Gewebe vierter Stufe, von welchen das dritte durch alle gemeinschaftlichen Complexe der beiden ersteren geht. Wenn der Parameter λ sich ändert, so beschreibt dieses dritte Gewebe einen die beiden anderen enthaltenden „Büschel quadratischer Complexen-Gewebe"; derselbe ist durch zwei seiner Gewebe oder durch deren Congruenz völlig bestimmt.

Wenn zwei lineare Complexe y, z conjugirt sind in Bezug auf irgend zwei Gewebe dieses Büschels, so sind sie „bezüglich des Büschels", d. h. bezüglich aller seiner Gewebe conjugirt; denn aus den Gleichungen:

$$\Sigma(a_{ik}+\lambda' b_{ik})y_iz_k=0 \quad \text{und} \quad \Sigma(a_{ik}+\lambda'' b_{ik})y_iz_k=0, \quad \text{worin} \quad \lambda' \gtrless \lambda'',$$

folgt

$$\Sigma a_{ik}y_iz_k=0 \quad \text{und} \quad \Sigma b_{ik}y_iz_k=0, \quad \text{also auch} \quad \Sigma(a_{ik}+\lambda b_{ik})y_iz_k=0.$$

16. Der Büschel (15.) enthält i. A. sechs singuläre quadratische Complexen-Gewebe; die Parameter derselben sind die sechs Werthe von λ, für welche die Discriminante der Gleichung $\Sigma(a_{ik}+\lambda b_{ik})x_ix_k=0$ verschwindet (12.). Die Doppelcomplexe dieser sechs singulären Gewebe sind paarweise conjugirt in Bezug auf je zwei derselben (12.) und folglich (15.) auch bezüglich des Büschels. Je fünf dieser Doppelcomplexe liegen in einem linearen Complexen-Gewebe vierter Stufe, welches die Polare des sechsten ist bezüglich *aller* quadratischen Gewebe des Büschels.

17. Die Complexen-Gewebe des Büschels:

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k+2\lambda(x_1x_4+x_2x_5+x_3x_6)=0,$$

welcher ein beliebiges quadratisches Complexen-Gewebe mit dem Hauptgewebe H verbindet, haben alle ihre speciellen Complexe mit einander gemein und enthalten einen und denselben quadratischen Complex Γ_0. Umgekehrt bilden alle quadratischen Complexen-Gewebe, die einen gegebenen quadratischen Complex enthalten, einen solchen Büschel. Unter ihnen giebt es sechs singuläre Gewebe (16.), die aber paarweise imaginär sein oder

zusammenfallen können. Die sechs Doppelcomplexe*) d derselben stützen einander, weil sie bezüglich des Büschels und somit auch bezüglich des Hauptgewebes conjugirt sind (16.); ihre Coordinaten genügen den sechs Gleichungen (12.):

$$\text{(VI.)}\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3+(a_{41}+\lambda)x_4+a_{51}x_5+a_{61}x_6 = 0, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3+a_{42}x_4+(a_{52}+\lambda)x_5+a_{62}x_6 = 0, \\ a_{13}x_1+a_{23}x_2+a_{33}x_3+a_{43}x_4+a_{53}x_5+(a_{63}+\lambda)x_6 = 0, \\ (a_{14}+\lambda)x_1+a_{24}x_2+a_{34}x_3+a_{44}x_4+a_{54}x_5+a_{64}x_6 = 0, \\ a_{15}x_1+(a_{25}+\lambda)x_2+a_{35}x_3+a_{45}x_4+a_{55}x_5+a_{65}x_6 = 0, \\ a_{16}x_1+a_{26}x_2+(a_{36}+\lambda)x_3+a_{46}x_4+a_{56}x_5+a_{66}x_6 = 0, \end{cases}$$

aus denen sich durch Eliminirung der x_i die Gleichung für die Parameter λ der sechs singulären Gewebe ergiebt. Die Polare eines jeden der sechs Complexe d bezüglich aller Gewebe des Büschels hat diesen Complex zum Träger (vgl. 21.), und geht durch die fünf übrigen Doppelcomplexe.

18. In Bezug auf jeden der sechs linearen Doppelcomplexe d ist (13.) der quadratische Strahlencomplex I_0' und jedes ihn enthaltende quadratische Complexen-Gewebe I' sich selbst zugeordnet; denn je zwei Complexe von I', welche mit d in einem Complexen-Büschel liegen, trennen einen auf d ruhenden Complex harmonisch von d (17.), sind also (8.) in Bezug auf d einander zugeordnet. Der quadratische Complex I_0' ist demnach zu sich selbst reciprok, und jeder Eigenschaft desselben, welche sich auf Punkte bezieht, muss eine auf Ebenen bezügliche reciproke Eigenschaft gegenüberstehen.

Auf jedem der sechs Doppelcomplexe d ruhen dreifach unendlich viele lineare Complexe, welche den quadratischen I_0' doppelt berühren (13.). Die quadratische Congruenz, welche I_0' mit einem dieser doppelt berührenden Complexe gemein hat, kann durch eine die beiden Berührungsstrahlen enthaltende Regelschaar beschrieben werden; sie hat nämlich diese beiden Strahlen zu Doppelstrahlen, woraus der Satz folgt, weil I_0' mit drei linearen Complexen und folglich auch mit einer Regelschaar i. A. nur vier Strahlen gemein hat (1.).

---

*) Dieses sind die sechs „Fundamentalcomplexe", welche Herr *F. Klein* (Math. Ann. II. S. 203) bei dem allgemeinen quadr. Strahlencomplexe entdeckt hat.

§ 3.

Die Polare eines quadratischen Complexen-Gewebes bezüglich des Hauptgewebes. Singuläre Strahlen, Punkte und Ebenen eines quadratischen Complexes.

19. Die Polare eines linearen Complexes x bezüglich des quadratischen Complexen-Gewebes I' oder $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ ist ein lineares Complexen-Gewebe, für dessen Träger x' wir durch Identificirung seiner Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i z_k = 0$ mit $[x'z] = 0$ folgende Coordinaten erhalten:

$$\text{(VII.)} \quad \begin{cases} x'_4 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{61}x_6, \\ x'_5 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{62}x_6, \\ x'_6 = a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + \cdots + a_{63}x_6, \\ x'_1 = a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + \cdots + a_{64}x_6, \\ x'_2 = a_{15}x_1 + a_{25}x_2 + \cdots + a_{65}x_6, \\ x'_3 = a_{16}x_1 + a_{26}x_2 + \cdots + a_{66}x_6. \end{cases}$$

Ist x ein Complex des quadratischen Gewebes I', so liegt er in seiner Polare und stützt sich auf x', sodass:

$$0 = x'_4x_1 + x'_5x_2 + x'_6x_3 + x'_1x_4 + x'_2x_5 + x'_3x_6$$

wird. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich durch Eliminirung der x_i für die Coordinaten eines linearen Complexes x', welcher irgend ein I' berührendes lineares Gewebe stützt, die quadratische Gleichung:

$$\text{(VIII.)} \quad \begin{vmatrix} 0 & x'_4 & x'_5 & x'_6 & x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ x'_4 & a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & a_{51} & a_{61} \\ x'_5 & a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52} & a_{62} \\ x'_6 & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63} \\ x'_1 & a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{64} \\ x'_2 & a_{15} & a_{25} & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{65} \\ x'_3 & a_{16} & a_{26} & a_{36} & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{vmatrix} = 0.$$

20. Die Gleichung (VIII.) repräsentirt ein quadratisches Complexen-Gewebe I'', welches zu dem gegebenen I' in folgenden Beziehungen steht. Die beiden quadratischen Complexen-Gewebe I', I'' sind reciproke Polaren bezüglich des Hauptgewebes H, indem das eine und folglich jedes derselben umhüllt wird von den linearen Complexen-Geweben, deren Träger das andere Gewebe bilden. Durch die Substitution (VII.) sind I' und I'' projectiv auf einander bezogen; ihre homologen Complexe x, x' stützen einander, und wenn der eine x (oder x') derselben ein singulärer ist, so wird

in seiner Axe der in I' (resp. I'') enthaltene quadratische Complex I_0' (I_0'') von dem andern Complexe x' (resp. x) berührt (11.).

Ruht auf einem beliebigen linearen Complexe x' die Polare eines andern x in Bezug auf I', so ruht umgekehrt auf x die Polare von x' bezüglich I'', wie sich durch Eliminirung der x_i aus (VII.) und der Gleichung $[xy'] = 0$ sofort ergiebt. Der Complex x stützt folglich, wenn x' mit ihm zusammenfällt, seine Polaren bezüglich *beider* Gewebe I', I''.

21. Die Polare von x in Bezug auf I' hat nur dann einen mit x identischen Träger x', wenn in den Gleichungen (VII.) die Coordinaten x_i' zu den x_i proportional sind. Aber für $x_i' = -\lambda x_i$ gehen diese Gleichungen über in die früheren (VI.). Daraus folgt: Nur die sechs linearen Complexe d, in Bezug auf welche das quadratische Complexen-Gewebe I' und der darin enthaltene quadratische Complex I_0' sich selbst zugeordnet sind, stützen ihre eigenen Polaren. Uebrigens ruhen auf diesen sechs Complexen d auch ihre resp. Polaren bezüglich des Gewebes I'' (20.), und auch I'' und der darin enthaltene quadratische Complex I_0'' sind bezüglich der sechs d sich selbst zugeordnet.

22. Der Axe x eines speciellen Complexes ist bezüglich des entsprechenden Complexes x' eine Gerade x^0 zugeordnet, die „Polare" von x bezüglich des quadratischen Complexes I_0'. Jede auf x und x^0 sich stützende Gerade l ist die Axe eines auf x' ruhenden speciellen Complexes, welcher dem Complexe x conjugirt und von ihm durch zwei specielle Complexe des Gewebes I' harmonisch getrennt ist (11., 5.). Die Geraden x und l sind sonach harmonisch getrennt durch die beiden Strahlen des quadratischen Complexes I_0', welche mit ihnen in einem Strahlenbüschel erster Ordnung liegen (5.). Daraus folgt: Durch die Polare x^0 gehen die Polarebenen von x bezüglich aller Complexkegel von I_0', deren Mittelpunkte auf x liegen; und auf x^0 liegen die Pole von x bezüglich aller Complexcurven von I_0', deren Ebenen durch x gehen*).

23. Sind die homologen Complexe x, x' beide speciell, so fällt i. A. die Polare x^0 der Geraden x bezüglich I_0' mit der Axe x' zusammen; nur wenn x diese Axe schneidet, kann jede durch den Punkt xx' gehende und in der Ebene xx' liegende Gerade als Polare von x betrachtet werden (3.). Im letzteren Falle heisst x ein „singulärer Strahl" des quadratischen Com-

*) Vgl. *Plücker* a. a. O. S. 294 und 299.

plexes I_0'; und da die ihm unendlich nahe benachbarten Strahlen von I_0' auch x' schneiden (11.), so liegen sie theils in der Ebene xx', theils gehen sie durch den Punkt xx'. Alle durch den singulären Strahl x gehenden Complexkegel von I_0' berühren folglich in x die „singuläre Ebene" xx', und alle durch x gehenden Strahlenbüschel zweiter Ordnung (oder Complexcurven) von I_0' haben in x den „singulären Punkt" xx' zum Berührungspunkt*). Damit dieses möglich sei, muss sowohl die Complexcurve der singulären Ebene xx' als auch der Complexkegel des singulären Punktes xx' in zwei durch x gehende Strahlenbüschel erster Ordnung zerfallen.

Wie x ein singulärer Strahl von I_0', so ist zugleich die homologe Axe x' ein singulärer Strahl des quadratischen Complexes I_0'' (20.). Die singulären Punkte und Ebenen xx' dieser beiden Strahlen fallen zusammen.

24. Die Polare eines linearen Complexes x bezüglich des quadratischen Gewebes I' stützt sich auf einen ***speciellen*** Complex x', wenn $[x']$ verschwindet und folglich wegen (VII.):

$$\text{(IX.)} \quad \left\{\begin{array}{l}(a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{61}x_6)(a_{14}x_1+a_{24}x_2+\cdots+a_{64}x_6)\\ +(a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{62}x_6)(a_{15}x_1+a_{25}x_2+\cdots+a_{65}x_6)\\ +(a_{13}x_1+a_{23}x_2+\cdots+a_{63}x_6)(a_{16}x_1+a_{26}x_2+\cdots+a_{66}x_6)\end{array}\right\} = 0$$

ist. Diese Gleichung repräsentirt, wenn $[x]=0$ gesetzt wird, einen quadratischen Complex I_0''', welcher mit I_0' die (biquadratische) Congruenz der singulären Strahlen von I_0' gemein hat (23.). Durch einen Punkt gehen i. A. vier singuläre Strahlen von I_0'; in denselben schneiden sich zwei concentrische Complexkegel von I_0' und I_0''', und zwei von ihnen vereinigen sich folglich, wenn der Punkt ein singulärer ist, mit dem zugehörigen singulären Strahle (23.). In einer beliebigen Ebene liegen ebenso i. A. vier singuläre Strahlen von I_0'; zwei derselben fallen zusammen, wenn die Ebene eine singuläre ist. Die „Brennfläche" der biquadratischen Congruenz aller singulären Strahlen von I_0' enthält sonach den Ort der singulären Punkte und Ebenen von I_0' und I_0'' als besonderen Theil.

25. Von zwei beliebigen Geraden g, g' werden i. A. acht singuläre Strahlen des quadratischen Complexes I_0' geschnitten, weil eine lineare Congruenz mit einer biquadratischen i. A. acht Strahlen gemein hat (1.). Die Gerade g schneidet zwei homologe singuläre Strahlen x, x' der Complexe I_0' und I_0'', wenn $[gx]$ und $[gx']$ verschwinden, wenn also die Co-

*) Vgl. *Plücker* a. a. O. S. 300.

ordinaten von x den beiden Gleichungen $[gx] = 0$ und $\Sigma a_{ik} g_i x_k = 0$ genügen (vgl. (VII.)); alsdann aber schneidet x auch die Polare g^0 von g in Bezug auf Γ_0 (22.). Es giebt folglich i. A. acht singuläre Strahlen x von Γ_0, welche zugleich mit den ihnen entsprechenden Strahlen x' von Γ_0' eine gegebene Gerade g schneiden, von denen also theils die singulären Punkte xx' auf g liegen, theils die singulären Ebenen xx' durch g gehen. Daraus folgt (vgl. 18.): Auf einer Geraden g liegen i. A. vier singuläre Punkte und durch sie gehen i. A. vier singuläre Ebenen des quadratischen Complexes Γ_0; die Singularitätenfläche Φ^4 von Γ_0, d. h. der Ort der singulären Punkte und Ebenen des Complexes ist von der vierten Ordnung und der vierten Klasse (vgl. 29.).

26. Der quadratische Complex Γ_0 und die biquadratische Congruenz seiner singulären Strahlen ändern sich nicht, wenn in (IX.) und in der Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ von I' gesetzt wird:

$$a_{14}+\lambda, \quad a_{25}+\lambda, \quad a_{36}+\lambda \quad \text{statt resp.} \quad a_{14}, \quad a_{25}, \quad a_{36};$$

denn die linke Seite von (IX.) ändert sich dadurch um das Binom $\lambda \Sigma a_{ik} x_i x_k + \lambda^2 [x]$, dessen beide Theile für alle Strahlen von Γ_0 verschwinden. Wohl aber erhält der einem singulären Strahle x entsprechende Strahl x' von Γ_0' eine andere Lage, indem er um den singulären Punkt und in der singulären Ebene von x sich dreht (23.). Der quadratische Complex Γ_0' und seine singulären Strahlen x' ändern sich demnach mit λ, aber die singulären Punkte und Ebenen der x' bleiben ungeändert und fallen mit denjenigen der entsprechenden x von Γ_0 zusammen.

§ 4.

Quadratische Complexe mit gemeinschaftlichen singulären Punkten und Ebenen.

27. Wie die Gleichung $\Sigma a_{ik} x_i x_k + 2\lambda(x_1 x_4 + x_2 x_5 + x_3 x_6) = 0$ einen Büschel quadratischer Complexen-Gewebe Γ repräsentirt, die alle denselben Complex zweiten Grades Γ_0 enthalten, so repräsentirt die Gleichung $L = 0$, worin:

$$L = \begin{vmatrix} 0 & x_4' & x_5' & x_6' & x_1' & x_2' & x_3' \\ x_4' & a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41}+\lambda & a_{51} & a_{61} \\ x_5' & a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & a_{52}+\lambda & a_{62} \\ x_6' & a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & a_{53} & a_{63}+\lambda \\ x_1' & a_{14}+\lambda & a_{24} & a_{34} & a_{44} & a_{54} & a_{64} \\ x_2' & a_{15} & a_{25}+\lambda & a_{35} & a_{45} & a_{55} & a_{65} \\ x_3' & a_{16} & a_{26} & a_{36}+\lambda & a_{46} & a_{56} & a_{66} \end{vmatrix},$$

eine „Schaar quadratischer Complexen-Gewebe I''," die Polare jenes I'-Büschels bezüglich des Hauptgewebes H (19.). Jedem Complexen-Gewebe des I'-Büschels entspricht in der I''-Schaar seine Polare bezüglich H (20.); dieses Hauptgewebe aber ist in beiden Gebilden zugleich enthalten und entspricht sich selbst, weil für $\lambda = \infty$ die beiden obigen Gleichungen übergehen in $[x] = 0$ und $[x'] = 0$.

Die I''-Schaar enthält eine Schaar quadratischer Complexe I''_0, welche mit einander und mit I'_0 den Ort Φ^4 ihrer singulären Punkte und Ebenen gemein haben (26.). Die singulären Strahlen der Complexe I''_0 sind die Tangenten der Fläche Φ^4.

28. Die I''-Schaar $L = 0$ wird eingehüllt von den ∞^3 linearen Complexen-Geweben, welche auf den speciellen linearen Complexen des I'-Büschels ruhen (20.); und zwar berührt jedes dieser Gewebe die Schaar in den ∞^1 Complexen, welche I'_0 in der Axe des speciellen Complexes tangiren (11.). Die vierfach unendlich vielen linearen Berührungscomplexe von I'_0 bilden demnach ein die Schaar umhüllendes und von ihr eingehülltes Complexen-Gewebe sechzehnten Grades, dessen Gleichung sich aus $L = 0$ und $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ durch Eliminirung von λ ergiebt; denn die beiden unendlich nahe benachbarten Gewebe $L = 0$ und $L + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda = 0$ der I''-Schaar durchdringen sich in den Complexen, welche sie mit dem sie umhüllenden Gewebe gemein haben. In einem Complexen-Büschel giebt es also i. A. sechzehn lineare Complexe, welche einen gegebenen quadratischen berühren. Wir kommen auf das Gewebe der Berührungscomplexe von I'_0 weiter unten zurück.

29. Sechs Gewebe der I''-Schaar, nämlich die Polaren der sechs singulären Gewebe des I'-Büschels in Bezug auf das Hauptgewebe, reduciren sich auf quadratische Complexen-Gewebe *dritter* Stufe; sie bestehen aus den ∞^3 linearen Complexen, welche I'_0 in je zwei Strahlen berühren und auf den Doppelcomplex d von je einem der singulären Gewebe sich stützen (13.). Die Schaar der quadratischen Complexe I''_0 enthält demzufolge sechs quadratische Congruenzen, welche in den linearen Complexen d liegen. Die Geraden dieser sechs Congruenzen sind Doppeltangenten der Singularitätenfläche Φ^4; denn sie sind die Axen specieller Complexe, welche I'_0 in je zwei Strahlen berühren, und tangiren Φ^4 in ihren Schnittpunkten mit den zugehörigen beiden Berührungsstrahlen (23., 27.).

Als Brennfläche quadratischer Congruenzen wurde Φ^4 bekanntlich von Herrn *Kummer* *) zuerst untersucht. Die Mittelpunkte und Ebenen der sechzehn in einer solchen Congruenz i. A. enthaltenen Strahlenbüschel sind die sechzehn Knotenpunkte und sechzehn singulären Ebenen von Φ^4. Die Fläche enthält die singulären Punkte der Congruenzen und Complexe I_0'' und wird zugleich von deren singulären Ebenen eingehüllt.

Die quadratischen Gewebe I'' und Complexe I_0'' der Schaar und die Fläche Φ^4 sind bezüglich der sechs linearen Complexe d sich selbst zugeordnet, ebenso wie die Gewebe I' und der quadratische Complex I_0' des Büschels (21.); die Doppelelemente von Φ^4 sind bezüglich derselben paarweise einander zugeordnet.

30. Die Gleichung $L = 0$ ist für den Parameter λ vom fünften Grade; durch einen beliebigen linearen Complex x' gehen deshalb fünf Gewebe der I''-Schaar. Das lineare Complexen-Gewebe, welches auf x' sich stützt, wird folglich von den entsprechenden fünf Geweben des I'-Büschels berührt, und zwar ist es bezüglich dieser fünf I' die Polare der fünf Berührungscomplexe. Letztere sind somit paarweise conjugirt in Bezug auf zwei der fünf I', also auch bezüglich des I'-Büschels (15.); sie stützen einander (16.) und bilden mit x' zusammen eine Gruppe von sechs sich gegenseitig stützenden Complexen. Die fünf Complexen-Gewebe, deren Träger sie sind, gehen durch je vier von ihnen, und berühren in x' je eines der fünf durch x' gehenden Gewebe der I''-Schaar.

31. Wird der Complex x' so gewählt, dass die Gleichung $L = 0$ zwei gleiche Wurzeln hat und von den fünf durch x' gehenden Geweben der I''-Schaar zwei zusammenfallen, so genügen die x_i' den beiden Gleichungen $L = 0$ und $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$. Zugleich vereinigen sich zwei von den fünf Geweben des I'-Büschels, welche das auf x' ruhende Complexen-Gewebe berühren, und ihre beiden Berührungscomplexe reduciren sich, weil auch sie zusammenfallen und einander und x' stützen, auf einen speciellen Complex (8.), dessen Axe in x' liegt. In dieser Axe aber wird der quadratische Complex I_0' von x' berührt (11.); sie ist ein singulärer Strahl von I_0', wenn auch x' ein specieller Complex ist (23.), und berührt alsdann ebenso wie die Axe x' die Singularitätenfläche Φ^4 im Punkte xx'. So ergiebt sich

*) *Kummer*, über die algebraischen Strahlensysteme (Abhandlungen der Berliner Akademie, math. Kl. 1866, S. 52).

wiederum, dass das Gewebe aller linearen Complexe, welche den quadratischen Γ_0 berühren, durch das Verschwinden der Discriminante von L dargestellt wird. Die Axen der speciellen Complexe dieses Gewebes sind die Tangenten der Singularitätenfläche Φ^4.

32. Die linearen Complexe x', deren Coordinaten für irgend welche Werthe von λ den drei, vier oder fünf ersten der Gleichungen:

$$L=0,\quad \frac{\partial L}{\partial\lambda}=0,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial\lambda^2}=0,\quad \frac{\partial^3 L}{\partial\lambda^3}=0,\quad \frac{\partial^4 L}{\partial\lambda^4}=0,\quad \frac{\partial^5 L}{\partial\lambda^5}=0$$

genügen, haben ebenso mit Γ_0 eine Berührung zweiter, dritter resp. vierter Ordnung; die Axen der speciellen unter ihnen berühren die Singularitätenfläche Φ^4 drei-, vier- resp. fünfpunktig *). Die dreipunktigen sind die Haupttangenten von Φ^4; die vierpunktigen bilden, wie schon Herr *F. Klein* hervorhebt, sowohl die Tangentenkegel der sechzehn Knotenpunkte als auch die Berührungscurven der sechzehn singulären Ebenen von Φ^4; fünfpunktige Tangenten hat Φ^4 i. A. nicht.

Ist nach Potenzen von λ entwickelt

$$L = A_0\lambda^5+A_1\lambda^4+A_2\lambda^3+\cdots+A_5,$$

so ergiebt sich

$$A_0=2[x'] \quad\text{und}\quad A_1=-\Sigma a_{ik}x_i'x_k'+4(a_{14}+a_{25}+a_{36})[x'].$$

33. Die Gleichung $L=0$ repräsentirt, wenn $[x']=0$ ist, eine Schaar quadratischer Complexe Γ_0'' mit gemeinschaftlicher Singularitätenfläche Φ^4 (27.). Sie ist in diesem Falle für λ nur noch vom vierten Grade, und es gehen deshalb durch einen beliebigen Strahl x' i. A. vier von den Complexen Γ_0''. Die Γ_0''-Schaar wird eingehüllt von den doppelt unendlich vielen speciellen Complexen, welche die singulären Strahlen des Complexes Γ_0 zu Axen haben (20.). Jeder dieser linearen Complexe berührt die quadratischen Γ_0'' in singulären Strahlen, die einen Strahlenbüschel erster Ordnung bilden und Φ^4 in einem und demselben Punkte berühren (11., 26.).

Die Γ_0''-Schaar enthält auch den quadratischen Complex Γ_0, denn ihre Gleichung geht für $\lambda=\infty$ über in $A_1=-\Sigma a_{ik}x_i'x_k'=0$. Es lässt sich beweisen, dass die Schaar durch jeden ihrer Complexe Γ_0'' ebenso wie durch Γ_0 bestimmt ist, und dass i. A. auch ihre Singularitätenfläche zu ihrer Bestimmung ausreicht. Sie wird deshalb von den ∞^3 speciellen Complexen umhüllt, welche die Tangenten von Φ^4 zu Axen haben.

*) Wegen des Beweises dieser letzteren Behauptung vgl. *F. Klein* in den Math. Ann. II, S. 225.

Schlussbemerkung.

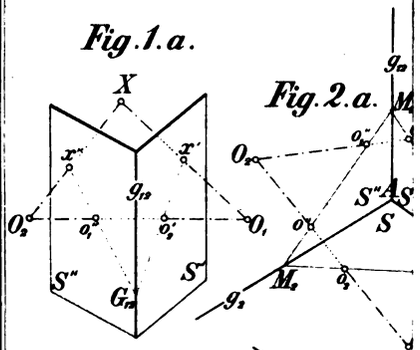
Die Liniengeometrie hat sich uns zu einer Geometrie der fünffach unendlich vielen linearen Complexe und der aus ihnen gebildeten Complexen-Gewebe erweitert. Dabei ist ihre schon erwähnte Analogie mit der Kugelgeometrie und der Geometrie des Raumes von drei Dimensionen so vielfach hervorgetreten, dass es sich wohl verlohnt, noch einmal kurz darauf zurückzukommen.

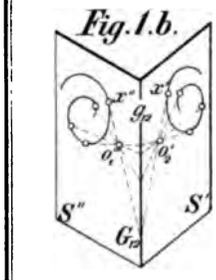
Wie die Punktkugeln eines linearen oder quadratischen Kugelcomplexes auf einer Kugel resp. einer Cyclide liegen, so bilden die Axen der speciellen Complexe eines linearen oder quadratischen Complexen-Gewebes einen linearen resp. quadratischen Strahlencomplex. Ein Büschel quadratischer Kugelcomplexe mit gemeinschaftlicher Cyclide hat zur Polare bezüglich des quadratischen Punktkugel-Complexes Π eine Schaar confocaler Kugelcomplexe zweiten Grades; diese Schaar wird eingehüllt von allen Kugelgebüschen, welche zwei ihrer Complexe oder einen derselben und zugleich Π berühren: sie enthält eine Schaar confocaler Cycliden. Ein Büschel quadratischer Complexen-Gewebe I', welche alle denselben quadratischen Complex I'_0 enthalten, hat ebenso zur Polare bezüglich des Hauptcomplexes H eine Schaar quadratischer Complexen-Gewebe I'', und jedes lineare Complexen-Gewebe, welches zwei dieser quadratischen I'' oder eines derselben und zugleich H berührt, tangirt alle Gewebe der Schaar (28.); letztere enthält eine Schaar quadratischer Complexe I''_0 mit gemeinschaftlicher Singularitätenfläche Φ^3. In analoger Weise wird eine Schaar confocaler Flächen zweiten Grades von jeder (imaginären) Ebene berührt, welche irgend zwei ihrer Flächen oder eine derselben und den unendlich fernen imaginären Normalkreis berührt; doch ist letzterer eine *singuläre* Fläche zweiten Grades.

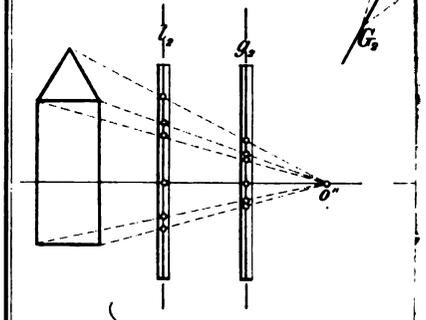
Wie zu der Schaar confocaler Flächen zweiten Grades vier Kegelschnitte (die drei Focalcurven und der Normalkreis) gehören, so enthält die Schaar confocaler Kugelcomplexe fünf quadratische Kugelcongruenzen und die I''-Schaar sechs quadratische Complexen-Gewebe *dritter* Stufe (29.). Die hier auftretenden Zahlen sind nur deshalb verschieden, weil die Elemente der drei Schaaren von verschiedenen Dimensionen sind. In der Schaar confocaler Cycliden giebt es fünf Focalcurven, und in der Schaar quadratischer Complexe I''_0 reduciren sich ebenso sechs auf quadratische

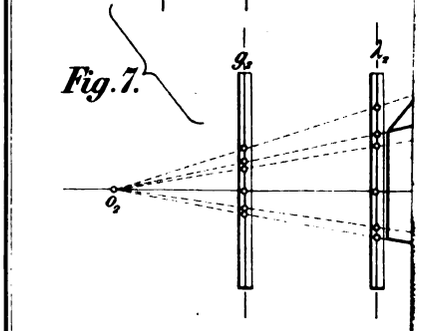
Congruenzen. Ein quadratischer Kugelcomplex und seine Cyclide sind in Bezug auf fünf Kugeln zu sich selbst invers; ein quadratisches Complexen-Gewebe und der darin enthaltene quadratische Complex sind in Bezug auf sechs lineare Complexe sich selbst zugeordnet. Endlich giebt es i. A. fünf quadratische Congruenzen von Kugeln, welche eine Cyclide, und sechs solche von Geraden, welche eine Singularitätenfläche Φ^4 doppelt berühren.

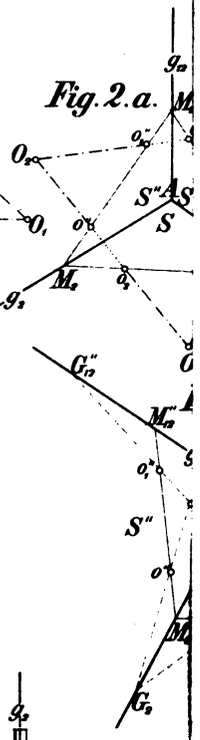
Strassburg i. E., den 3. October 1883.

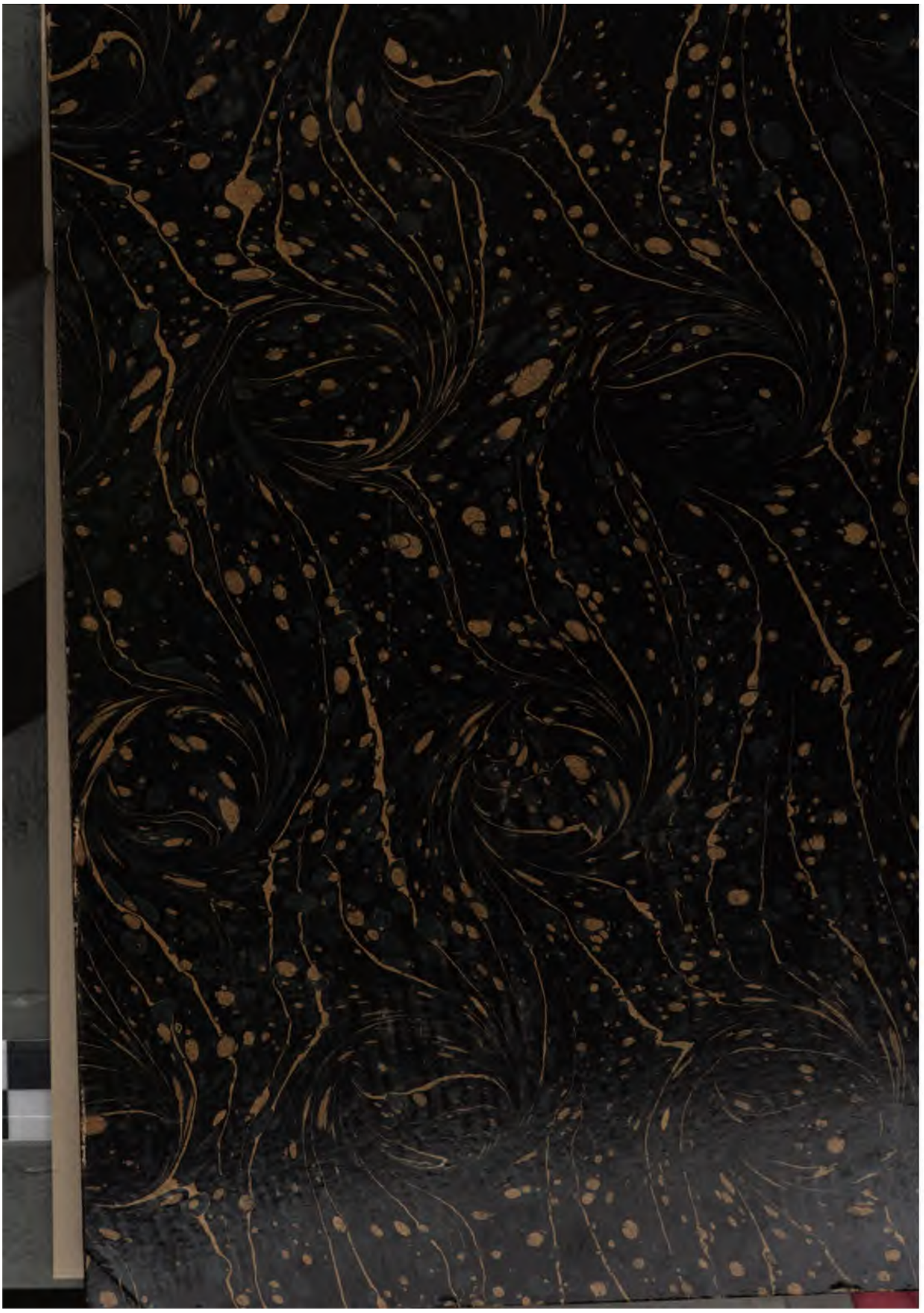










Lith. Anst v. Leop. Kraatz, Berlin.

STORAGE A